

Задание 4.

DM 17. Граф с n входами и n выходами называется суперконцентратором, если для любых заданных подмножеств из k входов и k выходов ($k < n$) существует k непересекающихся путей с началами в заданных входах и концами в заданных выходах.) Покажите, что существует суперконцентраторы с числом вершин и ребер $O(n)$.

DM 18. Придумайте, как уменьшить вероятность ошибки в алгоритме для языка из класса ВРР в полиномиальное число раз без использования дополнительных случайных чисел.

DM 19. Пусть дан код Рида-Соломона, который исправляет e ошибок. Покажите, что есть алгоритм, который исправляет p пропусков и k ошибок, если $p/2 + k \leq e$. Пропуск — это отсутствие символа, а не искажение его.

DM 20. (The Hat Problem) The Hat Problem involves n people in a room, each of whom is given a black/white hat chosen uniformly at random (and independent of the choices of all other people). Each person can see the hat color of all other people, but not their own. Each person is asked if (s)he wishes to guess their own hat color. They can either guess, or abstain. Each person makes their choice without knowledge of what the other people are doing. They either win collectively, or lose collectively. They win if all the people who don't abstain guess their hat color correctly and at least one person does not abstain. They lose if all people abstain, or if some person guesses their color incorrectly. Your goal below is to come up with a strategy that will allow the n people to win, with pretty high probability. The problem involves some careful modelling, and some knowledge of Hamming codes!

a) Lets say that a directed graph G is a subgraph of the n -dimensional hypercube if its vertex set is $\{0, 1\}^n$ and if $u \rightarrow v$ is an edge in G , then u and v differ in at most one coordinate. Let $K(G)$ be the number of vertices of G with in-degree at least one, and out-degree zero. Show that the probability of winning the hat problem equals the maximum, over directed subgraphs G of the n -dimensional hypercube, of $K(G)/2^n$.

b) Using the fact that the out-degree of any vertex is at most n , show that $K(G)/2^n$ is at most $\frac{n}{n+1}$ for any directed subgraph G of the n -dimensional hypercube.

c) Show that if $n = 2^\ell - 1$, then there exists a directed subgraph G of the n -dimensional hypercube with $K(G)/2^n = \frac{n}{n+1}$. (This is where the Hamming code comes in.)

DM 9. Пусть G — это алгебраический (n, d, α) -экспандер. Пусть $k \leq \frac{1}{\alpha}$ и n делится на k . Докажите, что если покрасить вершины в k цветов так, чтобы каждый цвет использовался ровно $\frac{n}{k}$ раз, то найдется хотя бы одна вершина, среди соседей которой встречаются все k цветов.

DM 14. Пусть G — случайный граф на n вершинах, в котором каждая вершина независимо случайным образом выбирает себе d соседей (повторы разрешены). Докажите, что существует такая константа a , что с большой вероятностью размер независимого множества такого графа не больше, чем $an \frac{\log d}{d}$.