Задание 7.

$\boxed{\textbf{DM 29.}}$ Проверьте следующие свойства энтропии: а) $H[X \mid Y, Z] \le H[X \mid Y]$; б) $H[X, Y] = H[Y] + H[X \mid Y]$; в) $H[X \mid Y] \le H[X]$, г) $H[X, Y] \ge H[X]$.

$\boxed{\textbf{DM 30.}}$ Приведите пример случайной величины X, что $H[X \mid X^2] \ne 0$

$\boxed{\textbf{DM 31.}}$ Докажите, что при $0 \le \alpha \le 1$ выполняется неравенство $H[\alpha X + (1-\alpha)Y] \ge \alpha H[X] + (1-\alpha)H[Y]$.

$\boxed{\textbf{DM 32.}}$ Пусть $n \ge 4$, $\mathcal{F}$ — семейство подграфов полного графа на n вершинах, причем пересечение любых двух графов из $\mathcal{F}$ содержит треугольник. Докажите, что $|\mathcal{F}| \le 2^{C_n^2 - 2}$.

$\boxed{\textbf{DM 9.}}$ Пусть G — это алгебраический (n, d, α)-экспандер. Пусть $k \le \frac{1}{\alpha}$ и n делится на k. Докажите, что если покрасить вершины в k цветов так, чтобы каждый цвет использовался ровно $\frac{n}{k}$ раз, то найдтется хотя бы одна вершина, среди соседей которой встречаются все k цветов.

$\boxed{\textbf{DM 22.}}$ Докажите усиления оценки Варшамова-Гилберта. Докажите, что существует линейный код $\Sigma^k \to \Sigma^n$ с расстоянием d, где $|\Sigma| = q$, если выполняется а) $q^k V_q(d-1, n) \le q^n$; б)$q^k V_q(d-2, n) \le q^n$.

$\boxed{\textbf{DM 23.}}$ A set $S \subseteq \{0,1\}^n$ is a <u>pairwise independent</u> space, if, for every pair $i \ne j \in \{1, \dots, x\}$, it is the case that if you pick a random element of S and project it onto the ith coordinate and $j$the coordinate you get a <u>pair</u> of independent bits drawn uniformly from $\{0, 1\}$.

1. Let H be the $(2^\ell - 1) \times \ell$ parity check matrix of a binary Hamming code. Show that the collection of vectors $S = \{\vec{x}H^T | \vec{x} \in \{0,1\}^\ell\}$ forms a pairwise independent space. (H^T denotes the transpose of H.)
2. Show that any pairwise independent space on n bits must contain at least $n+1$ points.

$\boxed{\textbf{DM 26.}}$ Пусть $E_1 : \{0,1\}^n \to \Sigma^m$ и $E_2 : \Sigma \to \{0,1\}^k$ — это два кода с локальными декодерами, которые делают q_1 и q_2 запросов и обрабатывают ρ_1 и ρ_2 ошибок соответственно. Докажите, что у каскадного кода $E_1 \circ E_2$ существует локальный декодер, который делает $O(q_1 q_2 \log q_1 \log |\Sigma|)$ запросов и обрабатывает $\rho_1 \rho_2$ ошибок.

$\boxed{\textbf{DM 27.}}$ Покажите, что существует код $E : \{0,1\}^N \to \{0,1\}^{N^C}$, где $C > 1$ — некоторая константа, что E вычислим за время $poly(N)$ и существует локальный декодер для E, который работает время $poly(\log N)$ и обрабатывает 0.01 долю ошибок. (Подсказка: используйте каскадный код из Рида-Маллера и Адамара).

$\boxed{\textbf{DM 28.}}$ Пусть $E_1 : \{0,1\}^n \to \Sigma^m$ и $E_2 : \Sigma \to \{0,1\}^k$ — это два кода с локальными списочными декодерами. Декодер кода E_1 выдает список размера ℓ_1, и обрабатывает $1 - \epsilon_1$ ошибок. Декодер для кода E_2 выдает список размера ℓ_2 и обрабатывает $\frac{1}{2} - \epsilon_2$ ошибок. Докажите, что у каскадного кода $E_1 \circ E_2$ существует локальный списочный декодер, который обрабатывает $\frac{1}{2} - \epsilon_1 \epsilon_2 \ell_2$ ошибок и выдает список размера $\ell_1 \ell_2$.