

Вопросы к экзамену по курсу “Дополнительные главы дискретной математики”

1. Матрица графа, комбинаторный смысл ее собственных чисел. Алгебраический экспандер. Лемма о перемешивании.
2. Свойство реберного расширения алгебраического экспандера.
3. Нижняя оценка на второе собственное число.
4. Существование алгебраических экспандеров: большинство d -регулярных графов являются экспандерами.
5. Произведения графов: матричное произведение, тензорное произведение, простой и сбалансированный варианты подстановочного произведения, зигзаг-произведение. Оценка второго собственного числа в графе зигзаг-произведения. Явное построение экспандеров (рекурсивная конструкция с зигзаг-произведением).
6. Оценка второго собственного числа для сбалансированного подстановочного произведения. Вторая явная конструкция экспандера (рекурсивная конструкция с подстановочным произведением).
7. Вычисление спектра для графа аффинной плоскости. Использование графа аффинной плоскости в явных конструкциях экспандеров.
8. Графы Кэли. Спектр графа Кэли для конечных абелевых групп. Примеры. Построение экспандера из кодов, исправляющих ошибки. Графы Рамунаджана (без доказательства).
9. Понижение ошибки в \mathbb{R}^p : в полиномиальное число раз без использования дополнительных случайных битов. Оценка Чернова для блуждания по экспандеру.
10. Наивный и попарно-независимый булевы сэмплеры. Сэмплер, основанный на медиане усреднений. Сэмплер, основанный на экспандере.
11. Понижение ошибки в вероятностных алгоритмах с помощью сэмплера. Хиттер из сэмплера.
12. Алгоритм Рейнголда: решение задачи URATH детерминированным алгоритмом с логарифмической памятью.
13. Коды, исправляющие ошибки. Границы Хемминга, Гилберта. Линейные коды: граница Варшамова-Гилберта. Проверочная матрица, код Хемминга.
14. Оценка Синглтона. Код Рида-Соломона. Алгоритм Берлекампа-Велша.
15. Каскадные коды. Декодирующий алгоритм, позволяющий исправлять $d_1 e_2$ ошибок.
16. Коды с большими расстояниями. Оценка Плоткина.
17. Код Адамара и его локальное декодирование. Каскадный код из кода Адамара и Рида-Соломона.
18. Декодирование списком при выполнении оценки Хемминга. Кодовое расстояние и декодирование списком.
19. Декодирование списком кодов Адамара. Оценка Джонсона. Оценка Элайеса-Бассальго.
20. Декодирование списком кода Рида-Соломона.
21. Декодирование списком каскадного кода из Рида-Соломона и Адамара.
22. Коды, основанные на экспандерах: коды Земора.
23. Энтропия и ее свойства. Полуаддитивность. Оценка для $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k$.
24. Условная энтропия и ее свойства. Обобщенная полуаддитивность. Пересекающиеся множества и графы.
25. Энтропия и однозначно декодируемые коды.
26. Дизайны и их свойства. Семейство регулярных подмножеств. Разностные множества и дизайны. Разностное множество из квадратичных вычетов.
27. Конечные геометрии. Конечные проективные и аффинные плоскости, их свойства. Построение проективных плоскостей порядка p^k .
28. Мартингалы. Мартингал проявления вершин и ребер. Неравенство Ацумы, пример о плотной концентрации хроматических чисел.
29. Пример применения неравенства Ацумы: хроматическое число $G(n, p)$ сконцентрировано в четырех значениях.