Остатки.

$\boxed{\textbf{CC10.}}$ Пусть $f_1(x_{11}, \dots, x_{1n1}), \dots, f_m(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})$ — произвольные булевы функции, зависящие от непересекающегося множества переменных. Докажите, что выполняется неравенство:

$$L\left(f_1(x_{11}, \dots, x_{1n1}) \oplus \dots \oplus f_m(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})\right) \geq \frac{1}{2} \sum_i L(f_i),$$

где $L(f)$ обозначает минимальное количество гейтов в $\{\wedge, \vee, \neg\}$-формуле, вычисляющей f.

$\boxed{\textbf{CC16.}}$ Для графа G обозначим через G' граф, в котором к каждому ребру нарисовали параллельную копию. Мы рассматриваем невыполнимую цейтинскую формулу $T_{G'}$, построенную по графу G' а) Рассмотрим случайную частичную подстановку: из каждого из двух параллельных ребер графа G' выбирается одно и переменной, которая этому ребру соответствует, подставляется случайное значение из $\{0, 1\}$, переменной из второго ребра ничего не подставляется. Для дизъюнкта размера W оцените вероятность того, что он не будет выполнен этой подстановкой. б) Докажите, что резолюционное доказательство формулы $T_{G'}$ имеет размер $2^{\Omega(e(G))}$.

$\boxed{\textbf{CC19.}}$ Докажите, что если существует $S(\ell)$-псевдослучайный генератор, то существует такая функция $f \in \mathrm{E}$, что $H_{wrs}(f)(n) \geq S(n)$.

$\boxed{\textbf{CC20.}}$ Докажите, что если существует $f \in \mathrm{E}$ и $\epsilon > 0$, что $H_{avg}(f)(n) \geq 2^{\epsilon n}$ при всех n, то $\mathrm{MA} = \mathrm{NP}$.

$\boxed{\textbf{CC23.}}$ Докажите, что если существует δ-плотное распределение H на $\{0, 1\}^n$, что $\Pr_{x \leftarrow H}[C(x) = f(x)] \leq \frac{1}{2} + \epsilon$ для любой схемы C размера $S \leq \sqrt{\epsilon^2 \delta 2^n / 100}$, то существует подмножество $I \subseteq \{0, 1\}^n$ размера хотя бы $\frac{\delta}{2} 2^n$, что $\Pr_{x \leftarrow U(I)}[C(x) = f(x)] \leq \frac{1}{2} + \epsilon$.

$\boxed{\textbf{CC24.}}$ а) Покажите, что существует детерминированный $poly(n)$ алгоритм A, который получает вход, распределеный согласно распределению X с $H_\infty(X) \geq n^{100}$ и имеет оракульный доступ к функции $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, который удовлетворяет следующим свойствам:

- Если $E[f(U_n)] \geq 2/3$, то A отвечает 1 с вероятностью хотя бы 0.99;
- Если $E[f(U_n)] \leq 1/3$, то A отвечает 0 с вероятностью хотя бы 0.99.

Такой алгоритм будем называть аппроксиматором функции.

б) Покажите, что не существует аппроксиматора без доступа к случайным числам.

в) Покажите, что если распределение X находится на расстоянии более $\frac{1}{5}$ от каждого распределения Y с $H_\infty(Y) \geq n/2$, то не существует аппроксиматора, вход которого распределен согласно распределению X.