

Задание 1.

СС1. Рассмотрим функцию $Maj : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, которая выдает 1, если не менее половины входных битов равны 1. Докажите, что существует полиномиального размера а) схема; б) монотонная схема; в) монотонная формула (т.е. схема, использующая только гейты \vee и \wedge), вычисляющая функцию Maj .

СС2. Докажите, что для любой симметрической булевой функции (симметрическая функция зависит только от числа единиц во входе) существует вычисляющая ее схема полиномиального размера.

СС3. Докажите, что любая формула в КНФ (или ДНФ) от переменных x_1, x_2, \dots, x_n , которая эквивалентна функции а) $x_1 + x_2 + \dots + x_n \bmod 2$; б) $Maj(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет экспоненциальный размер.

СС4. Докажите, что существует формула от \vee, \wedge, \neg размера $O(n^2)$, которая вычисляет функцию $x_1 + x_2 + \dots + x_n \bmod 2$.

СС5. Докажите, что функция Maj не может быть вычислена с помощью полиномиального размера (из гейтов \neg арности 2 и \vee и \wedge неограниченной арности) схем константной глубины.