

Задание 2.

В этом задании мы считаем, что все схемы и формулы имеют гейты \vee , \wedge и \neg . Когда речь идет о схемах константой глубины, то арность \vee , \wedge не ограничена. Размером формулы мы будем называть число листьев в дереве, которое эту формулу представляет. Для булевой функции f обозначим через $L(f)$ формульную сложность функции f . B_n обозначает множество всех булевых функций из $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$.

СС6. Формальной мерой сложности называется отображение из B_n в \mathbb{N} , обладающее следующими свойствами:

- $FC(x_i) = 1$
- $FC(f) = FC(\neg f)$
- $FC(f \vee g) \leq FC(f) + FC(g)$

а) Докажите, что $FC(f \wedge g) \leq FC(f) + FC(g)$; б) Покажите, что $L(f)$ — это формальная мера сложности; в) (лемма Патерсона) Докажите, что для любой формальной меры сложности FC выполняется неравенство: $L(f) \geq FC(f)$

СС7. Для множеств $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ обозначим через $H(A, B)$ — множество пар-соседей $\{(a, b) \in A \times B \mid \rho(a, b) = 1\}$, тут ρ — это расстояние Хемминга. Определим $K_{AB} = \frac{|H(A, B)|^2}{|A||B|}$ и функцию $K(f) = \max\{K_{AB} \mid A \subseteq f^{-1}(1), B \subseteq f^{-1}(0)\}$. а) Докажите, что $K(f)$ — это формальная мера сложности. б) (Теорема Храпченко) Докажите, что $L(f) \geq K(f)$. в) Докажите, что $K(f) \leq n^2$. г) Докажите, что $L(MOD_2) = \Omega(n^2)$. д) Докажите, что $L(Maj) = \Omega(n^2)$.

СС8. Покажите, что представление $\bigvee_{i=1}^n x_i$ в виде полинома $\mathbb{F}_q[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (q — простое число) требует степень ровно n .

СС1. Рассмотрим функцию $Maj : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, которая выдает 1, если не менее половины входных битов равны 1. Докажите, что существует полиномиального размера в) монотонная формула (т.е. схема, использующая только гейты \vee и \wedge), вычисляющая функцию Maj .

СС3. Докажите, что любая формула в КНФ (или ДНФ) от переменных x_1, x_2, \dots, x_n , которая эквивалентна функции б) $Maj(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет экспоненциальный размер.

СС5. Докажите, что функция Maj не может быть вычислена с помощью полиномиального размера из гейтов схем константной глубины.