

Задание 3.

СС9. Докажите, что для любой формулы F размера s существует эквивалентная формула глубины $O(\log s)$.

СС10. Пусть $f_1(x_{11}, \dots, x_{1n_1}), \dots, f_m(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})$ — произвольные булевы функции, зависящие от непересекающегося множества переменных. Докажите, что выполняется неравенство:

$$L(f_1(x_{11}, \dots, x_{1n_1}) \oplus \dots \oplus f_m(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})) \geq \frac{1}{2} \sum_i L(f_i),$$

где $L(f)$ обозначает минимальное количество гейтов в $\{\wedge, \vee, \neg\}$ -формуле, вычисляющей f .

Коммуникационная сложность. Алиса и Боб хотят совместно вычислить функцию $f : X \times Y \rightarrow Z$, причем Алиса знает $x \in X$, а Боб знает $y \in Y$. Коммуникационным протоколом называется бинарное дерево, листья которого помечены элементами Z , а в остальных вершинах которых стоят функции $a_i : X \rightarrow \{0, 1\}$ или $b_j : Y \rightarrow \{0, 1\}$. Вычисление по такому протоколу состоит в следующем: начиная от корня движемся по дереву к тому потомку, куда указывает функция, стоящая в вершине. Например, если в вершине стоит функция a_i и ее значение 1, то движемся к правому потомку, если 0, то к левому. (Значение функций $a_i(x)$ вычисляет Алиса, а $b_j(y)$ — Боб). В листе, к которому приводит путь из корня должно стоять значение функции $f(x, y)$. Коммуникационной сложностью функции f называется корректный протокол с минимальным числом листьев.

СС11. Каждая функция $f : X \times Y \rightarrow Z$ задает раскраску элементов матрицы $M[X, Y]$ в цвета из множества Z . Прямоугольником называется множество $X' \times Y'$, где $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$. Прямоугольник $X' \times Y'$ называется одноцветным если все элементы $M[X', Y']$ покрашены в один цвет. Пусть $R(M)$ — минимальное число одноцветных прямоугольников, которыми можно покрыть все элементы M . а) Докажите, что $C(f) \geq R(M)$. б) Докажите, что $R(M) \geq \text{rk} M$, если Z — это множество чисел.

Игры Карчмера-Вигдерсона. Дана функция $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Алиса получает $x \in f^{-1}(0)$, а Боб получает $y \in f^{-1}(1)$. Им требуется вычислить какую-нибудь координату i , что $x_i \neq y_i$. Для $B_0 \subseteq f^{-1}(0)$ и $B_1 \subseteq f^{-1}(1)$ обозначим $C(B_0, B_1)$ — коммуникационную сложность игры Карчмера-Вигдерсона, если Алиса получает элемент B_0 , а Боб получает B_1 .

СС12. Докажите теорему Карчмера-Вигдерсона а) для $B_0 \subseteq f^{-1}(0)$ и $B_1 \subseteq f^{-1}(1)$ выполняется $L(f) \geq C(B_0, B_1)$; б) $L(f) = C(f^{-1}(0), f^{-1}(1))$, где $L(f)$ — формульная сложность в базисе $\{\wedge, \vee, \neg\}$ (минимальное число листьев).

СС13. а) Пусть $M[X, X]$ — это 0/1-матрица, которая содержит перестановочную матрицу размера $|X|$ (т.е. ее перманент над \mathbb{R} не ноль). Докажите, что $R(M) \cdot T(M) \geq |X|^2$, где $T(M)$ — это число единиц в M . б) Докажите с помощью этой техники, что $L(\text{MOD}_2) = \Omega(n^2)$.

СС1. Рассмотрим функцию $\text{Maj} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, которая выдает 1, если не менее половины входных битов равны 1. Докажите, что существует полиномиального размера в) монотонная формула (т.е. схема, использующая только гейты \vee и \wedge), вычисляющая функцию Maj .

СС3. Докажите, что любая формула в КНФ (или ДНФ) от переменных x_1, x_2, \dots, x_n , которая эквивалентна функции б) $\text{Maj}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет экспоненциальный размер.

СС5. Докажите, что функция Maj не может быть вычислена с помощью полиномиального размера из гейтов схем константной глубины.