Задание 4.

$\boxed{\textbf{CC14.}}$ Докажите, что любой (n, k)-источник представляется в виде выпуклой комбинации плоских (n, k)-источников.

$\boxed{\textbf{CC15.}}$ Пусть ϕ — это формула в k-КНФ. Докажите, что размер любого древовидного доказательства формулы ϕ не меньше, чем $2^{W(\phi)-k}$, где $W(\phi)$ — это минимальная ширина резолюционного доказательства формулы ϕ.

$\boxed{\textbf{CC16.}}$ Для графа G обозначим через G' граф, в котором к каждому ребру нарисовали параллельную копию. Мы рассматриваем невыполнимую цейтинскую формулу $T_{G'}$, построенную по графу G' а) Рассмотрим случайную частичную подстановку: из каждого из двух параллельных ребер графа G' выбирается одно и переменной, которая этому ребру соответствует, подставляется случайное значение из $\{0, 1\}$, переменной из второго ребра ничего не подставляется. Для дизъюнкта размера W оцените вероятность того, что он не будет выполнен этой подстановкой. б) Докажите, что резолюционное доказательство формулы $T_{G'}$ имеет размер $2^{\Omega(e(G))}$.

$\boxed{\textbf{CC17.}}$ Рассмотрим многочлен $P_k(x) = (-1)^k(x-1)^k \left(\sum_{i=0}^{k-1} C_{k+i-1}^{i} x^i\right) + 1$. Докажите, что если $x = 0 \bmod p$, то $P_k(x) = 0 \bmod p^k$ и если $x = 1 \bmod p$, то $P_k(x) = 1 \bmod p^k$.

$\boxed{\textbf{CC1.}}$ Рассмотрим функцию $Maj : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, которая выдает 1, если не менее половины входных битов равны 1. Докажите, что существует полиномиального размера в) монотонная формула (т.е. схема, использующая только гейты $\vee$ и $\wedge$), вычисляющая функцию Maj.

$\boxed{\textbf{CC10.}}$ Пусть $f_1(x_{11}, \dots, x_{1n_1}), \dots, f_m(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})$ — произвольные булевы функции, зависящие от непересекающегося множества переменных. Докажите, что выполняется неравенство:

$$L\left(f_1(x_{11}, \dots, x_{1n1}) \oplus \dots \oplus f_m(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})\right) \geq \frac{1}{2} \sum_i L(f_i),$$

где $L(f)$ обозначает минимальное количество гейтов в $\{\wedge, \vee, \neg\}$-формуле, вычисляющей f.

$\boxed{\textbf{CC12.}}$ Докажите теорему Карчмера-Вигдерсона б) $L(f) = C(f^{-1}(0), f^{-1}(1))$, где $L(f)$ — формульная сложность в базисе $\{\wedge, \vee, \neg\}$ (минимальное число листьев).

$\boxed{\textbf{CC13.}}$ а) Пусть $M[X, X]$ это 0/1-матрица, которая содержит перестановочную матрицу размера $|X|$ (т.е. ее перманент над $\mathbb{R}$ не ноль). Докажите, что $R(M) \cdot T(M) \geq |X|^2$, где $T(M)$ — это число единиц в M. б) Докажите с помощью этой техники, что $L(MOD_2) = \Omega(n^2)$.