

### Задание 1 (на 19.01.14)

1. Вычислите коэффициенты Фурье функции  $NAE : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , которая равна единице, если среди  $n$  входов есть различные.
2. Сколько булевых функций  $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$  имеют ровно один ненулевой коэффициент?
3. Пусть  $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \{0, 1\}$  и пусть  $\#\{x \mid f(x) = 1\}$  нечетно. Докажите, что все коэффициенты Фурье функции  $f$  отличны от нуля.
4. Покажите, что булева функция  $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$  имеет не больше одного коэффициента Фурье по модулю большего  $\frac{1}{2}$ .
5. Докажите, что не существует функции  $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$ , у которой ровно 2 ненулевых коэффициента Фурье.
6. Функция  $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется нечетной, если для любого  $x \in \{-1, 1\}^n$  выполняется  $f(-x) = -f(x)$ . Докажите, что у нечетной функции все коэффициенты Фурье, которые соответствуют четным множествам, нулевые.
7. Для функции  $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$  докажите, что а)  $D[f] = 4dist(f, 1) \cdot dist(f, -1)$ ; б)  $2\epsilon \leq D[f] \leq 4\epsilon$ , где  $\epsilon = \min\{dist(f, 1), dist(f, -1)\}$ .