

Задание 10 (на 23.04.14)

45. Дана формула в k -КНФ, в каждый дизъюнкт этой формулы входит k различных переменных. Постройте детерминированный полиномиальный по времени алгоритм, который построит по этой формуле набор, который выполняет как минимум $1 - \frac{1}{2^k}$ долю дизъюнктов, если $k = O(\log n)$.

46. Пусть A, B, C — три матрицы размера $n \times n$. Придумайте вероятностный алгоритм, который за время $O(n^2)$, используя а) n ; б) $O(\log n)$ случайных битов проверит, верно ли равенство $AB = C$ при этом, если равенство верное, то ответ алгоритма должен быть правильным с вероятностью 1, а если неверно, то ответ алгоритма должен быть правильным с вероятностью как минимум а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$.

47. Пусть $A \subseteq \{-1, 1\}^n$ — мультимножество. Пусть плотность ϕ_A является k -независимой. Докажите, что $|A| \geq \Omega(n^{\lfloor k/2 \rfloor})$ (для константы k) по следующему плану:

а) Пусть $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ — это набор подмножеств $[n]$, таких что $|S \cup T| \leq k$ для всех $S, T \in \mathcal{F}$. Для каждого $S \in \mathcal{F}$ определим $\chi_S^A \in \{-1, 1\}^{|A|} \subseteq \mathbb{R}^{|A|}$ вещественнозначный вектор, проиндексированный A , a -я координата которого равна $a^S = \prod_{i \in S} a_i$. Покажите, что множество векторов $\{\frac{1}{\sqrt{|A|}} \chi_S^A : S \in \mathcal{F}\}$ является ортонормальным, следовательно $|A| \geq |\mathcal{F}|$. б) Покажите, что можно найти \mathcal{F} , что выполняется $|\mathcal{F}| \geq \sum_{j=0}^{k/2} \binom{n}{j}$, если k четно, и $|\mathcal{F}| \geq \sum_{j=0}^{(k-1)/2} \binom{n}{j} + \binom{n-1}{(k-1)/2}$, если k нечетно.

31. Пусть некоторое свойство m -битных строк имеет РСРР длины $\ell(m)$. Покажите, что для этого свойства существует РСРР длины $\text{poly}(\ell(m))$, в котором проверяющий алгоритм делает 3 запроса и затем использует один из восьми возможных ОР-предикатов: $v_{i_1} \vee v_{i_2} \vee v_{i_3}, \neg v_{i_1} \vee v_{i_2} \vee v_{i_3}, \dots, \neg v_{i_1} \vee \neg v_{i_2} \vee \neg v_{i_3}$.

38. Рассмотрим функцию $f : \{-1, 1\}^{n+1} \rightarrow \{-1, 1\}$, которая определена так: $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0 \text{Maj}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. а) Покажите, что $\text{Inf}_0^{1-\delta}[f] = \text{Stab}_{1-\delta}[\text{Maj}_n]$ для всех $\delta \in (1, 1)$. б) Покажите, что f не является (ϵ, δ) -квазислучайной, если $\epsilon < 1 - \sqrt{\delta}$. в) Покажите, что f является $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -регулярной.

44. Пусть $\phi : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ — вероятностная плотность некоторого распределения и ϕ является ϵ -смещенной. Покажите, что а) $\mathbb{E}[|\phi(x) - 1|] \leq \epsilon 2^{n/2}$; б) для любого x выполняется $|\phi(x) - 1| \leq \epsilon 2^n$.