Задание 3 (на 05.03.14)

$\boxed{\mathbf{15.}}$ а) Докажите, что если функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ вычисляется деревом принятия решения глубины k, то степень f не превосходит k; б) Покажите, что если функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ вычисляется деревом принятия решения размера s, то спектр f ϵ-сосредоточен на степенях до $\log s/\epsilon$.

$\boxed{\mathbf{16.}}$ Пусть функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ имеет степень не более k. Докажите, что f зависит от $k2^{k-1}$ переменных.

$\boxed{\mathbf{17.}}$ Пусть функция $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ отлична от нуля и имеет степень не более k. Докажите, что $\Pr[f(x) \neq 0] \geq 2^{-k}$.

$\boxed{\mathbf{18.}}$ Пусть функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ имеет степень не более k. Докажите, что $\mathrm{Inf}_i[f]$ либо 0, либо как минимум 2^{1-k}.

$\boxed{\mathbf{19.}}$ Докажите для функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, что влияние $I[f]$ не превосходит степени.

$\boxed{\mathbf{20.}}$ Пусть $\mathcal{C}$ — это класс функций, спектр которых $\epsilon/4$-сосредоточен на не более, чем M множествах. Докажите, что функции из $\mathcal{C}$ могут быть выучены с точностью ϵ и ошибкой $\frac{1}{10}$ за $poly(M, n, 1/\epsilon)$ шагов.

$\boxed{\mathbf{21.}}$ Матрица Уолша-Адамара H_k — это вещественная матрица размера $2^k \times 2^k$, которая определяется индуктивно: $H_0 = 1$, $H_{k+1} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$. а) Проверьте, что различные столбцы матрицы H_n ортогональны. б) Будем индексировать строки и столбцы матрицы H_n битовыми строками длины n. Докажите, что клетка матрицы H_n с координатами (x, y) содержит число $(-1)^{x \cdot y}$. в) Пусть функция $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{R}$ представлена в виде вектора из $\mathbb{R}^{2^n}$. Покажите, что $2^{-n}H_n f = \hat{f}$, где $\hat{f}$ проиндексирована характеристическими векторами множеств. г) Покажите, что можно вычислить $H_n f$, используя $n2^n$ сложений и вычитаний. д) Проверьте, что $\hat{\hat{f}} = 2^{-n} f$.