

Задание 4 (на 12.03.14)

22. Даны функции $f, g : \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть Фурье спектр f ϵ_1 -сосредоточен на \mathcal{F} и $\|f - g\|_2^2 \leq \epsilon_2$. Докажите, что Фурье спектр g $2(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ -сосредоточен на \mathcal{F} .

23. Для множества $M = \{xx \mid x \in \{0, 1\}^n\}$ постройте тестирующий алгоритм с двумя запросами и коэффициентом отказа 1.

24. Пусть O — это множество строк из $\{0, 1\}^n$, в которых нечетное количество единиц. Пусть тестирующий алгоритм T делает $n - 1$ запрос к строке и принимает любую строку из O с вероятностью 1. Докажите, что T принимает любую строку из $\{0, 1\}^n$ с вероятностью 1.

20. Пусть \mathcal{C} — это класс функций, спектр которых $\epsilon/4$ -сосредоточен на не более, чем M множествах. Докажите, что функции из \mathcal{C} могут быть выучены с точностью ϵ и ошибкой $\frac{1}{10}$ за $\text{poly}(M, n, 1/\epsilon)$ шагов.

21. Матрица Уолша-Адамара H_k — это вещественная матрица размера $2^k \times 2^k$, которая определяется индуктивно: $H_0 = 1$, $H_{k+1} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$. а) Проверьте, что различные столбцы матрицы H_n ортогональны. б) Будем индексировать строки и столбцы матрицы H_n битовыми строками длины n . Докажите, что клетка матрицы H_n с координатами (x, y) содержит число $(-1)^{x \cdot y}$. в) Пусть функция $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{R}$ представлена в виде вектора из \mathbb{R}^{2^n} . Покажите, что $2^{-n} H_n f = \hat{f}$, где \hat{f} проиндексирована характеристическими векторами множеств. г) Покажите, что можно вычислить $H_n f$, используя $n2^n$ сложений и вычитаний. д) Проверьте, что $\hat{\hat{f}} = 2^{-n} f$.