Задание 5 (на 19.03.14)

$\boxed{\textbf{25.}}$ Постройте 3-запросовую PCPP систему для класса $\{w \mid IP_n(w) = 1\}$ с доказательствами длины $O(n)$, где $IP_n(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots y_n) = -(1)^{\sum_i x_i y_i}$.

$\boxed{\textbf{26.}}$ Докажите, что если существует r-запросовая PCPP с коэффициентом отказа λ для некоторого множества, то по нему можно эффективно построить 3-х запросовую PCPP с коэффициентом отказа $\lambda/(r2^r)$, причем длина доказательства увеличивается на $r2^r m$, где m — это размер описания тестирующего алгоритма.

$\boxed{\textbf{27.}}$ Пусть $\gamma \in \mathbb{F}_2^n$, Γ — это матрица из $\mathbb{F}^{n\times n}$, а векторы x, y выбираются случайно и равномерно из $\mathbb{F}_2^n$ независимым образом. Покажите, что если $\Gamma = \gamma\gamma^T$, то $\Pr[(\gamma^T x)(\gamma^T y) = \Gamma \bullet (xy^T)] = 1$. А если $\Gamma \neq \gamma\gamma^T$, то $\Pr[(\gamma^T x)(\gamma^T y) = \Gamma \bullet (xy^T)] \leq \frac{3}{4}$, где для двух матриц $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $A \bullet B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} B_{i,j}$.

$\boxed{\textbf{28.}}$ Предположим, что есть оракульный доступ к двум функциям $\ell : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ и $q : \mathbb{F}_2^{n\times n} \to \mathbb{F}_2$. Предложите 4-запросовый тестирующий алгоритм, который обладает следующими свойствами: (1) Если $\ell = \chi_\gamma$ и $q = \chi_{\gamma\gamma^T}$, то тест принимает с вероятностью 1. (2) Если тест принимает с вероятностью хотя бы $1 - \lambda\epsilon$, то существует некоторое $\gamma \in \mathbb{F}_2^n$, что ℓ является ϵ-близким к χ_γ, а q является ϵ-близким к $\chi_{\gamma\gamma^T}$.

$\boxed{\textbf{29.}}$ Пусть L — это список однородных полиномиальных равенств степени 2 над переменными $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{F}_2$. Пусть $\mathcal{L}$ состоит из $w \in \mathbb{F}_2^n\}$, которые выполняют все равенства из списка L. Покажите, что существует 4-запросовая PCPP с длиной доказательства $2^n + 2^{n^2}$ для L.

$\boxed{\textbf{30.}}$ Дана булева схема C с n входами. Докажите, что для множества для множества выполняющих наборов схемы C можно построить 3-запросовую PCPP с длиной доказательства $2^{poly(|C|)}$.

---

21. Матрица Уолша-Адамара H_k — это вещественная матрица размера $2^k \times 2^k$, которая определяется индуктивно: $H_0 = 1$, $H_{k+1} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$. Проверьте, что различные столбцы матрицы H_n ортогональны. Будем индексировать строки и столбцы матрицы H_n битовыми строками длины n. Докажите, что клетка матрицы H_n с координатами (x, y) содержит число $(-1)^{x\cdot y}$. в) Пусть функция $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{R}$ представлена в виде вектора из $\mathbb{R}^{2^n}$. Покажите, что $2^{-n} H_n f = \hat{f}$, где $\hat{f}$ проиндексирована характеристическими векторами множеств. г) Покажите, что можно вычислить $H_n f$, используя $n2^n$ сложений и вычитаний. д) Проверьте, что $\hat{\hat{f}} = 2^{-n} f$.