

Программа курса «Аналитические и вероятностные методы в теоретической информатике», 2018

1. Разложение Фурье, ортогональный базис, скалярное произведение, расстояние между функциями, дисперсия, ковариация, функция плотности, свертка, коэффициенты Фурье свертки. Тест на линейность (BLR-тест).
2. Влияние i -й координаты, дискретная производная, формула для влияния i -й координаты (в том числе монотонный случай), чувствительность, полное влияние, среднее число голосов, которое согласуется с результатом голосования, максимум влияния для монотонной функции. Устойчивость относительно шума, ρ -связанные случайные величины. Оператор шума и формула для устойчивости.
3. Модели обучения для булевых функций, сконцентрированность спектра, обучения функции у которой спектр сконцентрирован. Спектр, сконцентрированный на степенях до k : связь с влиянием, монотонные функции, деревья принятия решений. Теорема Голдрейха-Левина о декодировании списком кода Уолша-Адамара.
4. Независимые события и случайные величины, неравенство Чебышева, закон больших чисел для попарно независимых случайных величин, закон больших чисел для t -независимых случайных величин. Оценки Чернова-Хоефдинга.
5. Маленькие k -независимые множества и их применение для поиска набора, выполняющего $7/8$ дизъюнктов. Конструкция 2-независимого множества. Конструкция k -независимого множества.
6. Матричные конструкции 2-независимых множеств. Матрицы Теплица.
7. Семейства попарно независимых хеш-функций. Основная лемма о хешировании для попарно независимых хеш-функций. k -независимые хеш-функции, конструкции. Лемма о хешировании для $2t$ -независимых хеш-функций.
8. Сравнение сложности NP-задач. Приближенный подсчет числа подсказок с оракулом из NP.
9. Генерация равномерного распределения на множестве подсказок с помощью k -независимых хеш-функций с оракулом из NP.
10. Немного смещенные распределения. Статистическое расстояние между распределениями. ϵ -смещенные распределения, их расстояние от равномерного.
11. (ϵ, k) -независимые множества. Построение из маленького ϵ -смещенного множества. Применение для поиска набора, выполняющего $\frac{2^k-1}{2^k}$ дизъюнктов формулы в k -КНФ. Эффективное построение (ϵ, k) -независимого множества из маленького ϵ -смещенного множества (теорема Наора-Наора).
12. Существование маленького ϵ -смещенного множества. Явная конструкция.
13. NP-трудность приближенного решения задачи MAXQE.
14. Обманывание многочленов небольшой степени, Теорема Виолы.
15. Комбинаторный и алгебраические экспандеры. Лемма о перемешивании. Связь собственных чисел и комбинаторного расширения.
16. Случайное блуждание по экспандеру (сходимость к равномерному распределению), вероятность блуждания по множеству. Аналог оценок Чернова на экспандерах.
17. Сэмплеры: наивный сэмплер, попарно-независимый сэмплер, медиана из усреднений.
18. Булев сэмплер из экспандера, усредняющие сэмплеры, "самый лучший" сэмплер из (n, d, α) -алгебраического экспандера, сэмплер из булева сэмплера.
19. Хитгер из сэмплера. Использование сэмплера для понижения ошибки в вероятностных алгоритмах с экономией случайных битов.

20. Минимальная энтропия, экстракторы, плоские источники, представление источника в виде выпуклой комбинации плоских. Теорема о существовании экстракторов.
21. Построение экстрактора из усредняющего булева сэмплера.
22. Локальное тестирование свойств булевых функций. NAE-тест и спектральные свойства функций. Тест на диктатуру. Тест на принадлежность подмножеству диктаторов.
23. Тестирование свойств подмножеств множества строк. РСРР: определение, пример для множества строк нечетного веса, для произвольного множества строк.