

Задание 1 (на 21.02.18)

1. Вычислите коэффициенты Фурье функции $NAE : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, которая равна единице, если среди n входов есть различные.
2. Пусть $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \{0, 1\}$ и пусть $\#\{x \mid f(x) = 1\}$ нечетно. Докажите, что все коэффициенты Фурье функции f отличны от нуля.
3. Покажите, что булева функция $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$ имеет не больше одного коэффициента Фурье по модулю большего $\frac{1}{2}$.
4. Докажите, что не существует функции $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$, у которой ровно 2 ненулевых коэффициента Фурье.
5. Функция $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется нечетной, если для любого $x \in \{-1, 1\}^n$ выполняется $f(-x) = -f(x)$. Докажите, что у нечетной функции все коэффициенты Фурье, которые соответствуют четным множествам, нулевые.
6. Для функции $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$ докажите, что а) $D[f] = 4 \text{dist}(f, 1) \cdot \text{dist}(f, -1)$; б) $2\epsilon \leq D[f] \leq 4\epsilon$, где $\epsilon = \min\{\text{dist}(f, 1), \text{dist}(f, -1)\}$.
7. Матрица Уолша-Адамара H_k — это вещественная матрица размера $2^k \times 2^k$, которая определяется индуктивно: $H_0 = 1$, $H_{k+1} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$. а) Проверьте, что различные столбцы матрицы H_n ортогональны. б) Будем индексировать строки и столбцы матрицы H_n битовыми строками длины n . Докажите, что клетка матрицы H_n с координатами (x, y) содержит число $(-1)^{x \cdot y}$. в) Пусть функция $f : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{R}$ представлена в виде вектора из \mathbb{R}^{2^n} . Покажите, что $2^{-n} H_n f = \hat{f}$, где \hat{f} проиндексирована характеристическими векторами множеств. г) Покажите, что можно вычислить $H_n f$, используя $n2^n$ сложений и вычитаний. д) Проверьте, что $\hat{\hat{f}} = 2^{-n} f$.