Задание 11 (на 25.04.18)

$\boxed{\textbf{51.}}$ Дана булева формула ϕ от n переменных. Требуется по числу $r \in \{0, 2^n - 1\}$ проверить, верно ли, что число выполняющих наборов ϕ не превосходит r. Придумайте для этой задачи а)вероятностный алгоритм с ограниченной ошибкой; б) детерминированный алгоритм, который решит эту задачу за время $poly(|\phi|/\delta)$ для всех r кроме доли δ (на этой доле можно выдавать неверные ответы, для вероятностного алгоритма с неограниченной ошибкой).

$\boxed{\textbf{52.}}$ Сэмплер $S(n, \epsilon, \delta)$ называется усредняющим, если он делает несколько неадаптивных запросов к функции f и выдает среднее арифметическое полученных ответов. Покажите, что если $S(n, \epsilon, \delta)$ — это усредняющий булев сэмплер (т.е., который работает для булевых функций $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$), то $S(n, \epsilon/4, \delta/3)$ является сэмплером общего вида, т.е. для функций $f : \{0,1\}^n \to [0,1]$. В доказательстве можно пользоваться, что любой булев сэмплер делает не менее, чем $\frac{\log 1/\delta}{8\epsilon^2}$ запросов.

---

39. Рассмотрим такой тест, который тестирует функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ на линейность: выбираем x случайно из $\{0,1\}^n$, а y выбираем из ϵ-смещенного распределения на $\{0,1\}^n$ и проверяем, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Сколько случайных битов требует этот тест? Проверьте, что если тест проходит с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2}$, то функция f находится на расстоянии не более $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 - \epsilon}$ от некоторой линейной функции.

41. Покажите, что если f линейная пороговая функция, то не меньше половины веса ее коэффициентов Фурье сосредоточено на множествах размера не более 1 (т.е. $\sum_{S \subseteq [n], |S| \le 1} (\hat{f}(S))^2 \ge \frac{1}{2}$).