Задание 2 (на 28.02.14)

$\boxed{\mathbf{8.}}$ Случайные величины X и Y распределены равномерно на $\{-1,1\}$ и при этом $\mathrm{E}[X]=\mathrm{E}[Y]=0$ и $\mathrm{E}[XY]=\rho$. Покажите, что существует такая случайная величина Z со значениями из $\{-1,1\}$, независимая от X, что $Y=ZX$ и $\Pr[Z=1]=\frac{1+\rho}{2}$

$\boxed{\mathbf{9.}}$ Для функции $f:\{-1,1\}^n\to\{-1,1\}$ докажите неравенство $\mathrm{Inf}_i(f)\geq|\hat{f}(i)|$. Когда достигается равенство?

$\boxed{\mathbf{10.}}$ Докажите, что для функций $f:\{-1,1\}^n\to\mathbb{R}$ выполняется неравенство Пуанкаре: $\mathrm{D}(f)\leq\mathrm{I}[f]$, где $\mathrm{I}[f]=\sum_{i=1}^n\mathrm{Inf}_i[f]$.

$\boxed{\mathbf{11.}}$ Докажите, что для четных функций $f:\{-1,1\}^n\to\mathbb{R}$ выполняется усиленное неравенство Пуанкаре: $\mathrm{D}(f)\leq\frac{1}{2}\mathrm{Inf}[f]$.

$\boxed{\mathbf{12.}}$ Пусть $f:\{-1,1\}^n\to\{-1,1\}$ и $\mathrm{E}[f]=0$. Докажите, что $\max_i\{\mathrm{Inf}_i[f]\}\geq\frac{1}{n}$.

$\boxed{\mathbf{13.}}$ Пусть $f:\{-1,1\}^n\to\{-1,1\}$ принимает значение 1 в трех точках. Для какой такой функции достигается максимум $\mathrm{I}[f]$?

$\boxed{\mathbf{14.}}$ Пусть $f:\{-1,1\}^n\to\{-1,1\}$ случайная функция (равномерно распределенная на множестве всех функций). Вычислите среднее значение $\mathrm{Inf}_1[f]$.

$\boxed{\mathbf{15.}}$ Пусть $\rho\in(0,1)$, $f:\{-1,1\}^n\to\{-1,1\}$ и $\mathrm{E}[f]=0$. Докажите, что $\mathrm{Stab}_\rho[f]\leq\rho$ и равенство достигается только, если f — диктатор или отрицание диктатора.