Задание 3 (на 07.03.18)

$\boxed{\textbf{15.}}$ а) Докажите, что если функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ вычисляется деревом решений глубины k, то степень f (как многочлена из $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$) не превосходит k; б) Покажите, что если функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ вычисляется деревом решений размера s, то спектр f ϵ-сосредоточен на степенях до $\log s/\epsilon$.

$\boxed{\textbf{16.}}$ Пусть функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ имеет степень не более k. Докажите, что f зависит от $k2^{k-1}$ переменных.

$\boxed{\textbf{17.}}$ Пусть функция $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ отлична от нуля и имеет степень не более k. Докажите, что $\Pr[f(x) \neq 0] \geq 2^{-k}$.

$\boxed{\textbf{18.}}$ Пусть функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ имеет степень не более k. Докажите, что $\mathrm{Inf}_i[f]$ либо 0, либо как минимум 2^{1-k}.

$\boxed{\textbf{19.}}$ Докажите для функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, что влияние $I[f]$ не превосходит степени.

$\boxed{\textbf{20.}}$ Пусть $\mathcal{C}$ — это класс функций, спектр которых $\epsilon/4$-сосредоточен на не более, чем M множествах. Докажите, что функции из $\mathcal{C}$ могут быть выучены (существует PAC-схема обучения с моделью запросов) с точностью ϵ и ошибкой $\frac{1}{10}$ за $poly(M, n, 1/\epsilon)$ шагов.

$\boxed{\textbf{21.}}$ (Теорема Арроу). Есть три кандидата на должность президента: A, B и C. Есть n участников голосования. Выборы проводятся по такой схеме: сначала все решают, кто лучше A или B и голосуют (+1) за A, (-1) за B. Получается вектор $x_{A,B} \in \{-1,1\}^n$, затем все выбирают между B (+1) и C (-1) и формируют вектор $x_{B,C}$, затем выбирают между C (+1) и A (-1) и получают вектор $x_{C,A}$. Итог голосования подводится с помощью функции $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, которая должна удовлетворять такому свойству: $f(1,1,\ldots,1) = 1$ и $f(-1,-1,\ldots,-1) = -1$. А именно получается такой порядок на кандидатах, из A(+1) и B(-1) лучше $f(x_{A,B})$, из B(+1) и C(-1) лучше $f(x_{B,C})$ и из C (+1) и A (-1) лучше $f(x_{C,A})$. Функция f называется хорошим правилом голосования, если таким образом всегда будет найден победитель выборов (не будет циклов), как бы не голосовали избиратели. а) Покажите, что если каждый голосующий независимо выбирает из 6 вариантов упорядочивания кандидатов один случайным образом равновероятно, то вероятность того, что функция f позволяет выбрать победителя равняется $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{Stab}_{-1/3}[f]$. б) Покажите, что если f хорошая функция голосования, то f — диктатор.