Задание 4 (на 14.03.18)

$\boxed{\textbf{22.}}$ Даны функции $f, g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$. Пусть Фурье спектр f ϵ_1-сосредоточен на $\mathcal{F}$ и $||f-g||_2^2 \leq \epsilon_2$. Докажите, что Фурье спектр g $2(\epsilon_1+\epsilon_2)$-сосредоточен на $\mathcal{F}$.

$\boxed{\textbf{23.}}$ Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

$\boxed{\textbf{24.}}$ а) Покажите, что размер любого 2-независимого подмножества $\{0,1\}^n$ имеет размер хотя бы $n+1$. б) Покажите, что если $n = 2^k - 1$, то существует 2-независимое поднмножетсво $\{0,1\}^n$ размера $n+1$.

$\boxed{\textbf{25.}}$ Распределение D на $\{0,1\}^n$ называется t-независимым, если для любой случайной величины X распределенной согласно D, для любых различных $i_1, i_2, \ldots, i_t \in \{1, 2, \ldots, n\}$, случайная величина $X_{i_1 i_2 \ldots i_t}$ имеет распределение U_t. Пусть A — вероятностный алгоритм, который получает оракульный доступ к входу длины n, алгоритм A может во время своей работы адаптивно запросить t битов входа. Докажите, что если D является t-независимым, то $\Pr_{x \leftarrow D}[A(x) = 1] = \Pr_{x \leftarrow U_n}[A(x) = 1]$. Иными словами даже адаптивный алгоритм, который изучает t битов входа не может отличить распределение D от равномерного.

$\boxed{\textbf{26.}}$ Матрицей Теплица называется матрица, для которой выполняется $A_{i+1,j+1} = A_{i,j}$. Докажите, что для произвольного вектора $u \in \{0,1\}^l$ отличного от нуля и произвольного вектора $b \in \{0,1\}^k$ выполняется $\Pr_A[Au = b] = \frac{1}{2^k}$, где вероятность берется по случайной матрице Теплица A размером $k \times l$, состоящей из нулей и единиц (все такие матрицы равновероятны).

$\boxed{\textbf{27.}}$ Распределение D на $\{0,1\}^n$ называется k-независимым, если для любой случайной величины X распределенной согласно D случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ являются k-независимыми. Пусть для распределения D функция $\phi_D : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\phi(a) = \Pr_{X \leftarrow D}[X = a]$. Покажите, D является k-независимым тогда и только тогда, когда $\hat{\phi_D}(S) = 0$ для всех $S \neq \emptyset$ размера не более k.

---

21. (Теорема Арроу). Есть три кандидата на должность президента: A, B и C. Есть n участников голосования. Выборы проводятся по такой схеме: сначала все решают, кто лучше A или B и голосуют (+1) за A, (-1) за B. Получается вектор $x_{A,B} \in \{-1,1\}^n$, затем все выбирают между B (+1) и C (-1) и формируют вектор $x_{B,C}$, затем выбирают между C (+1) и A (-1) и получают вектор $x_{C,A}$. Итог голосования подводится с помощью функции $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, которая должна удовлетворять такому свойству: $f(1,1,\ldots,1) = 1$ и $f(-1,-1,\ldots,-1) = -1$. А именно получается такой порядок на кандидатах, из A(+1) и B(-1) лучше $f(x_{A,B})$, из B(+1) и C(-1) лучше $f(x_{B,C})$ и из C (+1) и A (-1) лучше $f(x_{C,A})$. Функция f называется хорошим правилом голосования, если таким образом всегда будет найден победитель выборов (не будет циклов), как бы не голосовали избиратели. а) Покажите, что если каждый голосующий независимо выбирает из 6 вариантов упорядочивания кандидатов один случайным образом равновероятно, то вероятность того, что функция f позволяет выбрать победителя равняется $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{Stab}_{-1/3}[f]$. б) Покажите, что если f хорошая функция голосования, то f — диктатор.