Задание 7 (на 04.04.18)

$\boxed{\textbf{37.}}$ Пусть ϕ — формула в КНФ, в которой m дизъюнктов, в каждый дизъюнкт входит не менее k различных переменных, где $k > \log m$. Покажите, что формула ϕ выполнима, и придумайте полиномиальный от длины формулы алгоритм, который найдет выполняющий набор этой формулы.

$\boxed{\textbf{38.}}$ Пусть A — вероятностный алгоритм, который получает оракульный доступ к входу длины n, алгоритм A может во время своей работы адаптивно запросить t битов входа. Покажите, что если распределение D на $\{0,1\}^n$ является (t,ϵ)-независимым, то $|\Pr_{x\leftarrow D}[A(x)=1]-\Pr_{x\leftarrow U_n}[A(x)=1]| \le 2^t\epsilon$.

$\boxed{\textbf{39.}}$ Рассмотрим такой тест, который тестирует функцию $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ на линейность: выбираем x случайно из $\{0,1\}^n$, а y выбираем из ϵ-смещенного распределения на $\{0,1\}^n$ и проверяем, что $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Сколько случайных битов требует этот тест? Проверьте, что если тест проходит с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2}+\frac{\theta}{2}$, то функция f находится на расстоянии не более $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\theta^2-\epsilon}$ от некоторой линейной функции.

Определение.. Линейной пороговой функцией называется функция $f:\{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, для которой $f(x)=\mathrm{sign}(a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n)$ для некоторых вещественных чисел $a_0,a_1,\ldots,a_n$.

$\boxed{\textbf{40.}}$ Покажите, что если две линейные пороговые функции f и g имеют одинаковые коэффициенты Фурье, соответствующие одноэлементным множествам, то они совпадают.

$\boxed{\textbf{41.}}$ Покажите, что если f линейная пороговая функция, то не меньше половины веса ее коэффициентов Фурье сосредоточено на множествах размера не более 1 (т.е. $\sum_{S\subseteq[n],|S|\le 1}(\hat{f}(S))^2 \ge \frac{1}{2}$).

---

23. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

33. Покажите, что существует такое распределение D на $\{0,1\}^n$, которое является $(t,t2^{-t})$-независимым для которого существует такой вероятностный алгоритм A, который получает оракульный доступ к входу длины n и может во время своей работы адаптивно запросить t битов входа, что $|\Pr_{x\leftarrow D}[A(x)=1]-\Pr_{x\leftarrow U_n}[A(x)=1]| \ge \frac{1}{2}$.

34. Пусть S — это множество n-битных, в которых число единиц делится на 3. Докажите, что равномерное распределение на S является ϵ-смещенным при $\epsilon = 2^{-\Omega(n)}$.