Задание 8 (на 11.04.18)

$\boxed{\textbf{42.}}$ Пусть $\phi : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{R}_+$ — вероятностная плотность равномерного распределения на носителе функции $IP_n : \mathbb{F}_2^n \to \{0,1\}$ (носитель — это прообраз 1). Покажите, что ϕ является ϵ-смещенной для $\epsilon = 2^{-n/2}/(1-2^{-n/2})$, но ни для какого меньшего ϵ не является.

$\boxed{\textbf{43.}}$ Пусть $\phi : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{R}_+$ — вероятностная плотность некоторого ϵ-смещенного распределения. Покажите, что а) $\mathrm{E}[|\phi(x)-1|] \le \epsilon 2^{n/2}$; б) для любого x выполняется $|\phi(x)-1| \le \epsilon 2^n$.

Определение. Функция $f : \{-1,1\} \to \mathbb{R}$ называется ϵ-регулярной, если для всех $S \ne \emptyset$ выполняется $|\hat{f}(S)| \le \epsilon$.

$\boxed{\textbf{44.}}$ Пусть для $f : \{-1,1\} \to \mathbb{R}$ выполняется $\mathrm{Inf}_i[f] \le \epsilon$ для всех i. Покажите, что f является $\sqrt{\epsilon}$-регулярной.

$\boxed{\textbf{45.}}$ Покажите, что для всех четных n существует функция $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, которая является $2^{-n/2}$-регулярной, но найдется i, что $\mathrm{Inf}_i[f] \ge \frac{1}{2}$.

---

23. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

33. Покажите, что существует такое распределение D на $\{0,1\}^n$, которое является $(t, t2^{-t})$-независимым для которого существует такой вероятностный алгоритм A, который получает оракульный доступ к входу длины n и может во время своей работы адаптивно запросить t битов входа, что $|\Pr_{x \leftarrow D}[A(x)=1] - \Pr_{x \leftarrow U_n}[A(x)=1]| \ge \frac{1}{2}$.

39. Рассмотрим такой тест, который тестирует функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ на линейность: выбираем x случайно из $\{0,1\}^n$, а y выбираем из ϵ-смещенного распределения на $\{0,1\}^n$ и проверяем, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Сколько случайных битов требует этот тест? Проверьте, что если тест проходит с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2}$, то функция f находится на расстоянии не более $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 - \epsilon}$ от некоторой линейной функции.

41. Покажите, что если f линейная пороговая функция, то не меньше половины веса ее коэффициентов Фурье сосредоточено на множествах размера не более 1 (т.е. $\sum_{S \subseteq [n], |S| \le 1} (\hat{f}(S))^2 \ge \frac{1}{2}$).