Задание 9 (на 18.04.18)

$\boxed{\textbf{46.}}$ (Лемма о сглаживании) Пусть G — это (n, d, α)-алгебраический экспандер. X — такая случайная величина со значениями на вершинах G, что для каждой вершины v выпооняется $\Pr[X = v] \le \frac{K}{n}$. Пусть Y — это случайная соседняя с X вершина. Докажите, что $\sum_{v \in V} |\Pr[Y = v] - \frac{1}{n}| < \alpha\sqrt{K-1}$.

Определение. Функция $f : \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ называется (ϵ, k)-регулярной, если для всех $S \ne \emptyset$ и $|S| \le k$ выполняется $|\hat{f}(S)| \le \epsilon$.

Пусть $\rho \in [0, 1]$, ρ-устойчивым влияеним i-й координаты функции f называется $\mathrm{Inf}_i^{(\rho)}[f] = \mathrm{Stab}_\rho[D_i f] = \sum_{S: i \in S} |\rho|^{|S|-1} \hat{f}(S)^2$.

Функция $f : \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ называется (ϵ, δ)-квазислучайной, если для любого $i \in [n]$ выполняется $\mathrm{Inf}_i^{(1-\delta)}[f] \le \epsilon$.

$\boxed{\textbf{47.}}$ Покажите, что существует функция $f : \{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$, которая является $((1-\delta)^n, \delta)$-квазислучайной, но которая не является ϵ-регулярной ни для какого $\epsilon < 1$.

$\boxed{\textbf{48.}}$ Рассмотрим функцию $f : \{-1, 1\}^{n+1} \to \{-1, 1\}$, котрая определена так: $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0 Maj_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. а) Покажите, что $\mathrm{Inf}_0^{1-\delta}[f] = \mathrm{Stab}_{1-\delta}[Maj_n]$ для всех $\delta \in (1, 1)$. б) Покажите, что f не является (ϵ, δ)-квазислучайной, если $\epsilon < 1 - \sqrt{\delta}$. в) Покажите, что f является $\frac{1}{\sqrt{n}}$-регулярной.

$\boxed{\textbf{49.}}$ Покажите, что если $f : \{-1, 1\}^n \to \mathbb{R}$ является (ϵ, δ)-квазислучайной, то f является (μ, k)-регулярной для $\mu = \sqrt{\epsilon/(1-\delta)^{k-1}}$.

$\boxed{\textbf{50.}}$ Покажите, что f является $(\epsilon, 1)$-квазислучайной тогда и только тогда, когда f является $(\sqrt{\epsilon}, 1)$-регулярной.

---

23. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

33. Покажите, что существует такое распределение D на $\{0, 1\}^n$, которое является $(t, t2^{-t})$-независимым для которого существует такой вероятностный алгоритм A, который получает оракульный доступ к входу длины n и может во время своей работы адаптивно запросить t битов входа, что $|\Pr_{x \leftarrow D}[A(x) = 1] - \Pr_{x \leftarrow U_n}[A(x) = 1]| \ge \frac{1}{2}$.

39. Рассмотрим такой тест, который тестирует функцию $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ на линейность: выбираем x случайно из $\{0, 1\}^n$, а y выбираем из ϵ-смещенного распределения на $\{0, 1\}^n$ и проверяем, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Сколько случайных битов требует этот тест? Проверьте, что если тест проходит с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2}$, то функция f находится на расстоянии не более $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 - \epsilon}$ от некоторой линейной функции.

41. Покажите, что если f линейная пороговая функция, то не меньше половины веса ее коэффициентов Фурье сосредоточено на множествах размера не более 1 (т.е. $\sum_{S \subseteq [n], |S| \le 1} (\hat{f}(S))^2 \ge \frac{1}{2}$).