Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
имени В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Карпов Дмитрий Валерьевич

СТРУКТУРА СВЯЗНОСТИ ГРАФА

(01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика)

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2015

Оглавление

Введение

Актуальность темы диссертации

Теория графов является важным, интересным и динамично развивающимся разделом дискретной математики. Одним из классических направлений исследований в теории графов являются исследования по вершинной связности графов. Понятие k-связного графа является естественным обобщением понятия связного графа. Это подчеркивает и классическая теорема Менгера, с которой в 1927 году фактически начались исследования по связности. Их продолжили Уитни, Татт, Форд и Фалкерсон, Дирак, Халин, Мадер и другие. В 60-80 годы XX века был всплеск интереса к связности графов. Сейчас продолжают появляться новые работы по этой тематике, пусть и не в таком количестве, как 30 лет назад.

Диссертация посвящена исследованию структуры взаимного расположения разделяющих множеств наименьшего размера в графе. Остановимся на классических аналогах решаемых в диссертации задач. Понятия блоков и точек сочленения связного графа хорошо известны и весьма полезны, с их помощью доказано немало утверждений, причем не только о связности графов. Помогает работать с блоками структура *дерева блоков и точек сочленения*, описанная, например, в классической книге Ф. Харари "Теория графов" [57]. Именно структура дерева позволяет успешно применять блоки в доказательствах.

Поэтому неоднократно возникали вопросы об аналогичной структуре для графов большей связности. Но даже структура разбиения двусвязного графа его двухвершинными разделяющими множествами, построенная В. Т. Таттом в 1966 году [36], намного сложнее. Главная причина в том, что уже двухвершинные разделяющие множества могут быть *зависимы*, то есть, разбивать друг друга на части. Поэтому невозможно построить древовидную структуру, последовательно проводя разрезы двусвязного графа по двухвершинным разделяющим множествам: разрезая граф по некоторому множеству, мы теряем информацию обо всех зависимых с ним множествах, а структура, зависящая от порядка разбиения, бесполезна. К сожалению, дерево блоков двусвязного графа, построенное Таттом, практически не нашло применения. Однако, многие работы, вышедшие позже, могли бы быть значительно упрощены с помощью результатов Татта.

С повышением вершинной связности сложность структуры возрастает многократно. Только в 2011 году диссертант и А. В. Пастор [54] завершили работу по построению аналогичной структуры разбиения трёхсвязного графа его трёхвершинными разделяющими множествами. Эта структура намного сложнее и разнообразнее, чем структура разбиения двусвязного графа.

Именно исследования по связности графов способны приоткрыть нам новые инварианты графов, которые будут полезны и в других областях математики. Поэтому имеет смысл продолжать такие исследования, строить новые структурные инварианты графов и изучать построенные ранее.

Цели диссертации

Основные цели диссертации:

— построить структуру, обобщающую дерево блоков и точек сочленения и описывающую для произвольного k разбиение k-связного графа наборами k-вершинных разделяющих множеств или k-элементных разрезов;

— изучить структуру минимальных k-связных графов с малым числом вершин степени k;

— изучить множества вершин k-связного графа, одновременное удаление которых не нарушает k-связность;

— доказать новые нижние оценки на количество листьев в остовном дереве связного графа.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту

1. Построено дерево, описывающее структуру разбиения k-связного графа наборами из попарно независимых k-вершинных разделяющих множеств или k-элементных разрезов для произвольного k. Доказаны свойства построенных деревьев, показывающие их аналогию с деревом блоков и точек сочленения связного графа. Частным случаем построенной структуры является дерево разбиения двусвязного графа, похожее на конструкцию, придуманную в 1966 году В.Т.Таттом. Полученные конструкции применены для оценки хроматического числа двусвязного графа и для описания структуры минимальных и критических двусвязных графов.

2. Доказано, что минимальные k-связные графы с наименьшим числом вершин степени k — это графы вида $G_{k,T}$, где T — произвольное дерево, степени вершин которых не превосходят $k+1$, и только они. Граф $G_{k,T}$ строится из k непересекающихся копий дерева T. Для каждой вершины a дерева T обозначим через a_1, ..., a_k соответствующие ей вершины копий. Если вершина a имеет степень j в дереве T, то добавляются $k+1-j$ новых вершин степени k, смежных с $\{a_1,\dots,a_k\}$.

С помощью графов вида $G_{2,T}$, а также операций стягивания и удаления рёбер классифицированы минимальные двусвязные графы с малым числом вершин степени 2.

3. При $k \leq 5$ для произвольного минимального k-связного графа с помощью дерева описано взаимное расположение рёбер, соединяющих пары вершин степени более k.

4. Доказана *теорема о разбиении* — абстрактное утверждение о структуре, обобщающей классическое дерево блоков и точек сочленения связного графа. С помощью теоремы о разбиении описана структура взаимного расположения компонент зависимости произвольного набора k-вершинных разделяющих множеств k-связного графа и частей, на которые множества этого набора разбивают граф.

5. Доказано, что при удалении из двусвязного графа множества из нескольких внутренних вершин его частей-блоков, содержащего не более чем по одной вершине из каждого блока, граф остается двусвязным. Доказана теорема об одновременном удалении нескольких вершин из k-связного графа без потери k-связности.

6. Доказано, что в связном графе с более чем одной вершиной, s вершинами степени 3 и t вершинами степени не менее 4 можно выделить остовное дерево, в котором не менее чем $\frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + \alpha$ листьев, где $\alpha \geq \frac{8}{5}$ и, более того, $\alpha \geq 2$, кроме трёх графов-исключений, содержащих не более 8 вершин. Построена бесконечная серия графов, для которых оценка достигается.

7. Доказано, что в связном графе с более чем одной вершиной, s вершинами степеней 1 и 3, и t вершинами степени не менее 4, можно выделить остовное дерево, в котором не менее чем $\frac{1}{3}t + \frac{1}{4}s + \frac{3}{2}$ листьев. Построена бесконечная серия графов, для которых оценка достигается.

8. Доказано, что при $k \geq 1$ в связном графе с $n \geq 2$ вершинами, максимальная цепочка последовательно соединённых вершин степени 2 в котором имеет длину не более k, можно выделить остовное дерево, в котором не менее чем $\frac{1}{2k+4}n + \frac{3}{2}$ листьев. Построена бесконечная серия графов, для которых оценка достигается.

Методы исследований

В работе использовались классические методы работы с k-связными графами и новые идеи. Одной из наиболее существенных новых методик изучения структуры разбиения k-связного графа в работе является придуманное диссертантом понятие *части разбиения* графа набором разделяющих множеств.

Кроме того, отметим, что описанные в первой главе диссертации *деревья разбиения* сами по себе являются новым методом работы с графами большой связности. Этот метод применяется во второй главе для работы с минимальными k-связными графами, а также в пятой главе диссертации.

Описанное в третьей главе *гипердерево разбиения* также является новым методом работы с k-связными графами и применяется в четвертой главе для описания взаимного расположения компонент зависимости k-связного графа.

Для оценки наибольшего количества листьев в остовном дереве связного графа применяются модификации классических методов и новые методы, основанные на использовании дерева блоков и точек сочленения. Именно эти методы позволяют получить новые нижние оценки на количество листьев в остовном дереве, учитывающие вершины степеней 1 и 2 исходного связного графа.

Подробнее о результатах диссертации и применяемых методах написано в разделе “ Содержание диссертации”.

Новизна, степень достоверности и апробация результатов

Все результаты, изложенные в диссертации, являются новыми, достоверными, математически строго доказанными фактами. Основные результаты диссертации докладывались на Седьмом и Восьмом Международных семинарах "Дискретная математика и ее приложения" (Москва, МГУ, 2001 и 2004), на Третьем Российско-Финском симпозиуме по дискретной математике (Петрозаводск, 2014), на Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory (Долгопрудный, 2014). Результаты диссертации докладывались на семинарах по дискретной математике в ПОМИ им. В.А.Стеклова РАН, институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН, МФТИ, МГУ, СПбГУ.

Результаты и материалы диссертации опубликованы в работах [42] -[53].

Теоретическая значимость диссертации

Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы для дальнейшего изучения свойств k-связных графов. Описанные в диссертации обобщения дерева блоков и точек сочленения на графы большей связности могут быть полезны для дальнейшего изучения структуры взаимного расположения разделяющих множеств в k-связном графе. Поскольку определения и свойства описанных в диссертации структур аналогичны свойствам классического дерева блоков и точек сочленения, эти структуры могут быть полезны не только в теории связности, но и в других областях теории графов.

Новые методы нижней оценки количества листьев в остовном дереве связного графа, основанные на использовании блоков и точек сочленения, позволяют получать оценки, в которых учитываются вершины степеней 1 и 2, и могут быть применены для получения новых оценок.

Далее следуют основные обозначения и более подробный рассказ о результатах диссертации и используемых в диссертации методах.

Обозначения

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных рёбер. В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$. Множество рёбер графа G мы будем обозначать через $E(G)$.

Для количества вершин и рёбер графа G мы используем обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Для множеств вершин $A, B \subset V(G)$ обозначим через $e_G(A, B)$ количество рёбер графа G, у которых один конец лежит в A, а другой — в B.

Определение 1. Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Через $G - R$ мы обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер множества R, а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R.

2) Пусть $x, y \in V(G)$. Если $xy \notin E(G)$, то обозначим через $G + xy$ граф G, к которому добавлено ребро xy. Если $xy \in E(G)$, то граф $G + xy$ совадает с G.

3) Назовём множество R *разделяющим*, если граф $G - R$ несвязен.

Через $\mathfrak{R}(G)$ обозначим набор, состоящий из всех разделяющих множеств графа G.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G. Минимальную степень вершины графа G обозначим через $\delta(G)$, а максимальную степень — через $\Delta(G)$.

Вершина x графа G называется *висячей*, если $d_G(x) = 1$. Если граф G — дерево, его висячие вершины часто называют *листьями*.

Для ребра $e \in E(G)$ через $G \cdot e$ мы обозначим граф, полученный в результате *стягивания* ребра e (концы ребра $e = xy$ стягиваются в новую вершину $x \cdot y$, с которой в графе $G \cdot e$ будут смежны все отличные от x и y вершины, смежные в G хотя бы с одним из концов ребра e).

Через $\chi(G)$ обозначаем *хроматическое число* графа G, то есть, наименьшее возможное количество цветов в правильной раскраске вершин этого графа.

Для вершины $x \in V(G)$ через $\mathrm{N}_G(x)$ обозначим ее окрестность в графе G, то есть, множество всех вершин графа G, смежных с x.

Пусть $X \subset V(G)$. Через $\mathrm{N}_G(X)$ обозначим *окрестность* этого множества в графе G, то есть, множество всех не принадлежащих X вершин, смежных хотя бы с одной вершиной из X.

Через $G(X)$ обозначим *индуцированный подграф* графа G на множестве вершин X (то есть, граф с множеством вершин X и всеми рёбрами графа G, оба конца которых лежат в X).

Через K_n обозначим полный граф на n вершинах, а через $K_{m,n}$ — полный двудольный граф, доли которого содержат m и n вершин.

Вершинная связность

Одним из основных понятий в теории графов является понятие *связности.* Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами существует путь. Множество вершин несвязного графа разбивается на *компоненты связности.* (Под компонентой связности мы понимаем максимальное по включению множество вершин графа, любые две из которых связаны путем.)

Определение 2. 1) Граф называется *(вершинно) k-связным*, если в нем не менее $k+1$ вершин и при удалении любых $k-1$ вершин получается связный граф.

2) *Связностью* двух вершин x и y графа G называется наименьшее количество вершин, которое необходимо удалить из G для того, чтобы в оставшемся графе вершины x и y оказались в разных компонентах связности. Вершинная связность двух смежных вершин считается равной $+\infty$. Обозначается вершинная связность x и y через $\kappa_G(x, y)$.

Таким образом, граф является k-связным тогда и только тогда, когда в нем хотя бы $k+1$ вершина и $\kappa_G(x, y) \geq k$ для любых двух вершин x и y.

Начало исследований свойств вершинной связности графа положил в 1927 году К. Менгер [28], доказавший следующую теорему: для любых двух несмежных вершин x, y связность $\kappa_G(x, y)$ равняется наибольшему количеству непересекающихся простых путей между x и y в графе G. Позже, в 1932 году, Х. Уитни доказал, что в k-связном графе между любыми двумя вершинами есть k путей без общих внутренних вершин. Обратное утверждение очевидно. Тем самым, понятие вершинной k-связности является обобщением понятия связности. С этим связаны и попытки обобщить классические результаты для связных графов на графы большей связности.

Понятно, что минимальная степень вершины k-связного графа не менее k. В связи с этим многие исследователи изучали вершины степени k в k-связном графе. Существенная часть диссертации также посвящена этому. Определим два важных понятия.

Определение 3. Пусть G — k-связный граф.

1) Граф G называется *критическим*, если $v(G) \geq k+2$ и для любой вершины $x \in V(G)$ граф $G - x$ не является k-связным.

2) Граф G называется *минимальным*, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G - e$ не является k-связным.

Критические k-связные графы исследовались, начиная с 70-х годов 20 века, в работах [5, 14, 29]. В основном, исследования посвящены доказательству наличия вершин степени k в критических графах и оценке количества таких вершин.

Про минимальные k-связные графы известно довольно много. Они изучались с конца 60-х годов 20 века в работах [7, 31, 24, 25, 30] и других. Исследования минимальных k-связных графов также в основном посвящены оценке количества вершин степени k в таких графах. Подробнее о минимальных k-связных графах мы скажем позже.

Дерево блоков и точек сочленения

Диссертация посвящена изучению деревьев, в той или иной степени отображающих структуру связности графа. Наиболее классическим объектом такого рода является *дерево блоков и точек сочленения*. Мы напомним понятия блока и точки сочленения связного графа, а также ряд их свойств. Подробнее о них можно прочитать, например, в книге [57].

Определение 4. Пусть G — связный граф. Вершина $a \in V(G)$ называется *точкой сочленения*, если граф $G - a$ несвязен.

Блоком называется любой максимальный по включению подграф графа G, не имеющий точек сочленения.

Отметим, что точки сочленения — это как раз одновершинные разделяющие множества. Блоки и точки сочленения — это мощный и полезный инструмент работы с графами, с помощью которого доказано множество фактов, причем не только из теории связности. В доказательствах часто используется дерево блоков и точек сочленения, которое мы сейчас определим.

Определение 5. *Дерево блоков и точек сочленения* графа G — это двудольный граф $B(G)$, вершины одной доли которого соответствуют всем точкам сочленения $a_1, \dots, a_n$ графа G, а другой — всем его блокам $B_1, \dots,$

B_n (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j смежны, если и только если $a_i \in V(B_j)$.

Несложно доказать, что дерево блоков и точек сочленения — это действительно дерево, все висячие вершины которого соответствуют блокам (доказательство можно найти, например, в [57]). Именно структура дерева помогает работать с блоками и точками сочленения. Поэтому неоднократно возникали и возникают попытки построения для графов большей связности структуры, аналогичной по своим свойствам дереву блоков и точек сочленения. Некоторые из таких структур описываются в первой главе диссертации.

Части разбиения, граница и внутренность

Перед описанием результатов диссертации определим необходимые нам понятия. Впервые определенные диссертантом в [43], они оказались удобны для описания взаимного расположения разделяющих множеств в графе. Можно сказать, что это один из основных новых методов работы со структурой связности графа, придуманный диссертантом.

Обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ набор, состоящий из всех k-вершинных разделяющих множеств графа G.

Определение 6. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью* $\mathfrak{S}$*-разбиения*, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G набором разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. (В случае, когда неочевидно, какой граф разбивается, мы будем писать $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$.)

2) Вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ назовем *внутренними*, если они не входят ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин назовем *внутренностью* части A и будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$.

Вершины, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$ мы будем называть *граничными*, а все их множество — *границей* и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Замечание. Если $A, B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ — две различные части, то существует множество $S \in \mathfrak{S}$, отделяющее A от B. Понятно, что тогда $A \cap B \subset S$.

Следующая лемма показывает, что понятия границы и внутренности части разбиения могут быть определены независимо от набора разделяющих множеств $\mathfrak{S}$. Доказательство леммы несложно и приведено в главе 4.

Лемма 4.3. *Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ и $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Вершина $x \in \mathrm{Int}(A)$ не смежна ни с одной из вершин множества $V(G) \setminus A$. Граница $\mathrm{Bound}(A)$ состоит из всех вершин части A, имеющих смежные вершины в $V(G) \setminus A$.*

2) *Если $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Bound}(A)$ отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от $V(G) \setminus A$.*

Рассмотрим в качестве иллюстрации этих понятий самый простой, и в то же время очень важный случай: разбиение k-связного графа одним k-вершинным разделяющим множеством S. Что такое тогда часть $A \in \mathrm{Part}(S)$? Легко понять, что ее внутренность $\mathrm{Int}(A)$ — это компонента связности графа $G - S$, а сама часть A получается добавлением к этой компоненте вершин множества S. Следовательно, индуцированный подграф $G(A)$ связен и из каждой вершины множества S выходит хотя бы одно ребро к вершинам из $\mathrm{Int}(A)$.

Вернемся к случаю $k = 1$ и отметим, что точки сочленения связного графа G — это его разделяющие множества, из них состоит $\mathfrak{R}_1(G)$. Множества вершин всех блоков — это части $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_1(G))$. С помощью понятия части разбиения удобно описывать свойства блоков и точек сочленения.

Содержание диссертации

Дерево разбиения

Неоднократно возникали и возникают попытки построения для графов большей связности структуры, аналогичной по своим свойствам дереву блоков и точек сочленения.

Так как основные проблемы в описании структуры разбиения k-связного графа при $k \geq 2$ представляют пары зависимых множеств, в первой главе диссертации мы сосредоточимся на описании структуры разбиения k-связного графа наборами из попарно независимых разделяющих множеств или разрезов (для произвольного k). Получается дерево, по свойствам во многом аналогичное дереву блоков и точек сочленения связного графа. Частным случаем построенной структуры является дерево разбиения двусвязного графа, похожее на контрукцию Татта [36]. Для построения структуры мы используем определенное выше понятие части разбиения. Начнем с необходимых определений.

Определение 7. Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Пусть $X, Y \subset V(G)$, $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R *отделяет* множество X от множества Y, если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

2) Будем говорить, что R *разделяет* множество $X \subset V(G)$, если не все вершины множества $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

Определение 8. Пусть G — k-связный граф. Назовем множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

К сожалению, разделяющие множества, состоящие из $k \geq 2$ вершин, могут быть зависимыми. Именно с этим связаны основные трудности в изучении k-связных графов при $k \geq 2$. В работах [17, 53] доказано, что для множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо они независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта — очень простое.

Наличие пар зависимых множеств мешает построить на множествах из $\mathfrak{R}_k(G)$ и частях из $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$ отображающее их структуру дерево, похожее на дерево блоков и точек сочленения. Однако, такую структуру можно построить для набора из попарно независимых множеств, что мы покажем далее.

Определение 9. Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, причем все множества набора $\mathfrak{S}$ попарно независимы. Построим *дерево разбиения* $T(G, \mathfrak{S})$ следующим образом. Вершины одной доли $T(G, \mathfrak{S})$ — это множества из $\mathfrak{S}$, а вершины другой доли — части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Обозначать вершины $T(G, \mathfrak{S})$ мы будем так же, как соответствующие множества вершин графа G. Вершины $S \in \mathfrak{S}$ и $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны в $T(G, \mathfrak{S})$, если и только если $S \subset A$.

Построение $T(G, \mathfrak{S})$ аналогично построению дерева блоков и точек сочленения. Аналогичными будут и его свойства.

Теорема 1.1. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ — набор, состоящий из попарно независимых множеств. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *$T(G, \mathfrak{S})$ — это дерево.*

2) *Для каждого множества $S \in \mathfrak{S}$ выполняется равенство*

$$d_{T(G,\mathfrak{S})}(S) = |\mathrm{Part}(S)|.$$

Более того, для каждой части $A \in \mathrm{Part}(S)$ существует единственная часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, такая, что $B \subset A$ и B смежна с S в $T(G, \mathfrak{S})$. Все висячие вершины дерева $T(G, \mathfrak{S})$ соответствуют частям $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

3) *Множество S разделяет в графе G части $B, B' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда S разделяет B и B' в $T(G, \mathfrak{S})$.*

Теорема включена в главу 1 диссертации.

Дерево разбиения двусвязного графа

Частным случаем дерева разбиения является дерево разбиения двусвязного графа. Дадим необходимые определения. Далее до конца раздела граф G будет двусвязным. Объектом рассмотрения будут множества из $\mathfrak{R}_2(G)$.

Определение 10. Назовем множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ *одиночным*, если оно независимо со всеми другими множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор, состоящий из всех одиночных множеств графа G.

В 1966 году В. Т. Татт [36] описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе именно с помощью дерева, которое он назвал $T(G)$. Это дерево — почти что дерево разбиения двусвязного графа одиночными разделяющими множествами (только эти множества и само дерево были определены в книге Татта более сложным образом).

Мы построим похожее дерево с помощью разработанной выше техники. Понятно, что одиночные множества попарно независимы, что позволяет нам дать следующее определение.

Определение 11. 1) *Дерево разбиения* $\mathrm{BT}(G)$ двусвязного графа G — это дерево $T(G, \mathfrak{O}(G))$.

2) Будем использовать обозначение $\mathrm{Part}(G)$ вместо $\mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$ и называть части этого разбиения просто *частями графа G*. Часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ назовем *крайней*, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения $\mathrm{BT}(G)$.

Замечание. 1) Из теоремы 1.1 следует, что $\mathrm{BT}(G)$ — дерево, все висячие вершины которого соответствуют крайним частям $\mathrm{Part}(G)$.

2) Если $A \in \mathrm{Part}(G)$ — крайняя часть, то $\mathrm{Bound}(A)$ — одиночное множество графа G.

Далее мы характеризуем части графа G и изучим расположение неодиночных двухвершинных разделяющих множеств в этом графе.

Определение 12. 1) Для двусвязного графа G обозначим через G' граф, полученный из G добавлением всех отсутствующих в $E(G)$ ребер вида ab, где $\{a, b\} \in \mathfrak{O}(G)$.

2) Назовём часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ *циклом*, если граф $G'(A)$ — простой цикл и *блоком*, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A — цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A.

Теорема 1.2. *Пусть G — двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Каждая часть графа G — блок или цикл.*

2) *Множество $R = \{a, b\}$ — неодиночное множество из $\mathfrak{R}_2(G)$, если и только если a и b — несоседние в циклическом порядке вершины некоторой части-цикла.*

Таким образом, неодиночные двухвершинные разделяющие множества графа G соответствуют диагоналям частей-циклов, имеющих длину хотя бы 4.

Применение дерева разбиения двусвязного графа

Важно не только построить структуру, но и показать, как она применяется. Удивительно, но структура Татта практически не нашла применения за столько лет. Следующие результаты подчеркнут аналогию между классическими двусвязными блоками связного графа и частями разбиения двусвязного графа. Мы применим дерево разбиения двусвязного графа для оценки его хроматического числа. С помощью дерева разбиения мы поймем, как выглядят критические двусвязные графы.

Очевидно, несвязный граф планарен тогда и только тогда, когда планарен индуцированный подграф на каждой из его компонент связности. Понятно, что связный граф планарен тогда и только тогда, когда планарен любой его блок. В 1937 году Маклейн [20] исследовал процесс разбиения двусвязного графа на *атомы* и показал с помощью теоремы Куратовского о характеризации непланарных графов, что двусвязный граф планарен тогда и только тогда, когда планарны все его атомы. Мы покажем связь между атомами и частями двусвязного графа и переформулируем теорему Маклейна в наших терминах: двусвязный граф планарен если и только если планарны индуцированные подграфы на всех его частях-блоках.

Понятно, что хроматическое число связного графа равно максимуму хроматических чисел его двусвязных блоков. Мы докажем верхние оценки на хроматическое число графа через хроматические числа его подграфов, индуцированных на частях разбиения.

Теорема 1.4. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $$\chi(G) \le \chi(G') = \max_{A \in \mathrm{Part}(G)} \chi(G'(A)).$$

2) $$\chi(G) \le \max_{A \in \mathrm{Part}(G)} \chi(G(A)) + 1.$$

3) $$\chi(G) \le \max\bigl(3, \max_{A\ -\ \textit{блок}\ G} \chi(G(A)) + 1\bigr).$$

Из доказательства теоремы будет понятно, что при вычислении максимума в пунктах 2 и 3 к хроматическому числу одного из блоков можно не прибавлять 1, причем этот блок можно выбрать произвольно.

Списочные раскраски (list colorings) появились относительно недавно и являются сейчас весьма популярным объектом для исследований. Каждой вершине графа $v \in V(G)$ ставится в соответствие список $L(v)$ из k цветов, после чего рассматривается правильная раскраска вершин, в которой каждая вершина v должна быть покрашена в цвет из списка $L(v)$. Минимальное такое натуральное число k, что для любых списков из k цветов существует правильная раскраска вершин графа G, обозначается через $\mathrm{ch}(G)$ (и носит название choice number или списочное хроматическое число). Очевидно, $\mathrm{ch}(G) \geq \chi(G)$. С помощью дерева разбиения мы докажем оценку на $\mathrm{ch}(G)$.

Теорема 1.5. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $$\mathrm{ch}(G) \leq \max_{A \in \mathrm{Part}(G)} \mathrm{ch}(G(A)) + 2.$$

2) $$\mathrm{ch}(G) \leq \max\Big(3, \max_{A\ -\ \textit{блок}\ G} \mathrm{ch}(G(A)) + 2\Big).$$

Из доказательства теоремы будет понятно, что при вычислении максимума в пунктах 1 и 2 к списочному хроматическому числу одного из блоков можно не прибавлять 2, причем этот блок можно выбрать произвольно.

Кроме того, с помощью дерева разбиения двусвязного графа мы докажем несколько фактов о структуре критических двусвязных графов.

Следствие 1.3. 1) *Двусвязный граф G является критическим тогда и только тогда, когда все его части-блоки и части-треугольники имеют пустую внутренность.*

2) *Пусть $A \in \mathrm{Part}(S)$ — крайняя часть критического двусвязного графа G, смежная в $\mathrm{BT}(G)$ с одиночным множеством S. Тогда A — цикл длины хотя бы 4 и все вершины A, кроме двух вершин множества S, имеют в графе G степень 2.*

В работе [29] было доказано, что в критическом двусвязном графе на не менее чем 6 вершинах есть хотя бы 4 вершины степени 2. Из следствия 1.3 очевидно следует аналогичное утверждение для графов на не менее чем 4 вершинах. С помощью следствия 1.3 и дерева разбиения будут описаны все критические двусвязные графы, имеющие ровно 4 вершины степени 2.

В главе 1 мы характеризуем минимальные двусвязные графы с помощью дерева разбиения.

Теорема 1.6. *Двусвязный граф G является минимальным тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(*a*) *если $\{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$, то вершины a и b несмежны;*

(*b*) *для любого блока A графа G граф $G(A)$ не имеет ни одного ребра.*

С помощью теоремы 1.6 можно выяснить немало фактов о минимальных двусвязных графах.

Следствие 1.5. *Пусть G — минимальный двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если A — блок графа G, то $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$.*

2) *Пусть A — крайняя часть графа G, смежная в $\mathrm{BT}(G)$ с одиночным множеством S. Тогда A — цикл, а все его вершины, кроме двух вершин множества S, имеют степень 2.*

3) *Множество внутренних вершин частей графа G состоит из всех вершин этого графа, имеющих степень 2.*

Дерево разрезов

Перед описанием этого объекта нам необходимо дать определение разреза и частей разбиения графа разрезом.

Определение 13. Пусть G — k-связный граф.

1) Будем называть *разрезом* k-элементное разделяющее множество из вершин и рёбер графа G, содержащее хотя бы одно ребро. Множество всех разрезов графа G обозначим через $\mathfrak{T}(G)$.

2) Для разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ обозначим через $V(T)$ множество всех входящих в T вершин, а через $W(T)$ — множество, состоящее из всех вершин, входящих в разрез T и всех вершин, инцидентных рёбрам разреза T.

Разрез — объект, по свойствам похожий на вершинное разделяющее множество, но имеющий свою специфику. Для любого разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ граф $G - T$ имеет две компоненты связности, пусть это U_1 и U_2. Для каждого ребра $e \in T$ компоненты U_1 и U_2 содержат по одному концу e. Теперь определим части разбиения графа разрезом и границы разреза.

Определение 14. 1) Пусть $T \in \mathfrak{T}(G)$, а U_1 и U_2 — компоненты связности графа $G - T$. Назовем множества $A_i = U_i \cup V(T)$ *частями разбиения* графа G разрезом T. Мы будем использовать обозначение

$$\mathrm{Part}(T) = \{A_1, A_2\}.$$

2) *Границами разреза* T мы будем называть множества вершин

$$A_1 \cap W(T) \quad \text{и} \quad A_2 \cap W(T).$$

Определение 15. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$.

Назовем *частями* разбиения графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ максимальные по включению множества вида

$$A = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} A_S, \quad \text{где} \quad A_S \in \mathrm{Part}(S).$$

Множество всех частей разбиения графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ будем обозначать через $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$. В случае, когда ясно, какой граф разбивается, будем употреблять обозначение $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

3) *Границей* части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ будет множество $\mathrm{Bound}(A)$ всех вершин этой части, являющихся вершинами разрезов из $\mathfrak{S}$. *Внутренностью* части A будет множество $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Bound}(A)$.

Определение 16. Разрезы $S, T \in \mathfrak{T}_k(G)$ называются *независимыми*, если можно ввести такие обозначения

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\},$$

что $A_1 \supset B_2$ и $B_1 \supset A_2$. Иначе мы будем называть разрезы S и T *зависимыми.*

Определение 17. 1) Пусть $\mathfrak{S}$ — множество, состоящее из попарно независимых разрезов графа G. *Дерево разрезов* множества $\mathfrak{S}$ — это двудольный граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$: одну долю образуют разрезы из $\mathfrak{S}$, а вторую — части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем множество $S \in \mathfrak{S}$ и часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны тогда и только тогда, когда A содержит одну из границ разреза S.

2) Если часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ соответствует висячей вершине дерева $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$, то назовем такую часть *крайней*.

Как мы видим, определение дерева разрезов аналогично определению дерева разбиения, которое дано в начале раздела, и определению классического дерева блоков и точек сочленения. Поэтому неудивительно, что дерево разрезов обладает похожими свойствами.

Теорема 1.7. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$ — набор из попарно независимых разрезов, причем в $\mathfrak{S}$ нет двух разрезов, содержащих одно и то же ребро. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ — дерево.*

2) *Любой разрез $S \in \mathfrak{S}$ смежен в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ ровно с двумя частями $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем эти две части содержатся в разных частях $\mathrm{Part}(S)$.*

3) *Разрез $S \in \mathfrak{S}$ отделяет вершину B от вершины C в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$, если и только если S отделяет множество B от множества C в графе G.*

4) *Если крайняя часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежна в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ с разрезом T, то $A \in \mathrm{Part}(T)$.*

5) *Крайние части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ — это в точности минимальные по включению части среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}$.*

Учтем специфику разрезов — каждый из них делит граф ровно на две части — и определим “сокращенный вариант” дерева разрезов.

Определение 18. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество, состоящее из попарно независимых разрезов графа G. Мы построим граф $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ следующим образом: вершины этого графа — это части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем части $A, B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны тогда и только тогда, когда содержат границы одного и того же разреза из $\mathfrak{S}$.

Следствие 1.6. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$ — набор из попарно независимых разрезов, причем в $\mathfrak{S}$ нет двух разрезов, содержащих одно и то же ребро. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ *— дерево.*

2) *Поставим в соответствие каждому ребру AB дерева* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ *разрез из $\mathfrak{S}$, границы которого содержатся в частях A и B. Тогда это отображение — взаимно однозначное соответствие между рёбрами дерева* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ *и разрезами из $\mathfrak{S}$.*

3) $|\mathrm{Part}(\mathfrak{S})| = |\mathfrak{S}| + 1$.

4) *Пусть R — граница одного из разрезов набора $\mathfrak{S}$. Тогда существует ровно одна часть* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$*, содержащая R.*

5) *Если части* $A, B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *смежны в дереве* $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ *с одним разрезом S, то $A \cap B = V(S)$.*

6) *Если части* $A, B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *смежны в дереве* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$*, то*

$$|A \cap B| = k - 1.$$

7) *Для части* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *ее граница* $\mathrm{Bound}(A)$ *— это объединение содержащихся в A границ разрезов, смежных с A в* $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$.

Описание структуры взаимного расположения разрезов важно, например, для изучения минимальных k-связных графов, в которых каждое ребро входит хотя бы в один разрез. Это будет продемонстрировано в главе 2 диссертации.

Минимальные k-связные графы

Во второй главе с помощью разработанной в первой главе техники изучаются минимальные k-связные графы. Напомним, что k-связный граф называется *минимальным*, если он теряет k-связность после удаления любого своего ребра.

Очевидно, все вершины k-связного графа имеют степень не менее k. Через $V_k(G)$ мы обозначим множество всех вершин графа G, имеющих степень k, пусть

$$V_{k+1}(G) = V(G) \setminus V_k(G), \quad v_k(G) = |V_k(G)| \quad \text{и} \quad v_{k+1}(G) = |V_{k+1}(G)|.$$

Дирак [7] в 1967 году и Пламмер [31] в 1968 году исследовали минимальные двусвязные графы. Из результатов этих работ можно вывести, что $v_2(G) \ge \frac{v(G)+4}{3}$ для минимального двусвязного графа G.

В 1979 году В. Мадер [24, 25] доказал очень сильный результат, обобщающий написанное выше:

$$v_k(G) \ge \frac{(k-1)v(G) + 2k}{2k-1} \tag{1}$$

для минимального k-связного графа G. Эта оценка точная: для любого $k \ge 2$ существуют бесконечные серии минимальных k-связных графов, для которых неравенство (1) обращается в равенство. Далее мы рассмотрим такие графы и будем называть их *экстремальными* минимальными k-связными графами.

Определение 19. Пусть $k \ge 2$, а T — дерево с $\Delta(T) \le k+1$. Граф $G_{k,T}$ строится из k копий $T_1, \dots, T_k$ дерева T с непересекающимися множествами вершин. Для каждой вершины $a \in V(T)$ обозначим через a_i соответствующую вершину копии T_i. Если $d_G(a) = j$, то мы добавим $k+1-j$ новых вершин степени k, смежных с $\{a_1, \dots, a_k\}$.

Очевидно, если $v(T) = n$, то $v(G_{k,T}) = (2k-1)n + 2$. Несложно проверить, что $G_{k,T}$ — минимальный k-связный граф и, следовательно, он — экстремальный.

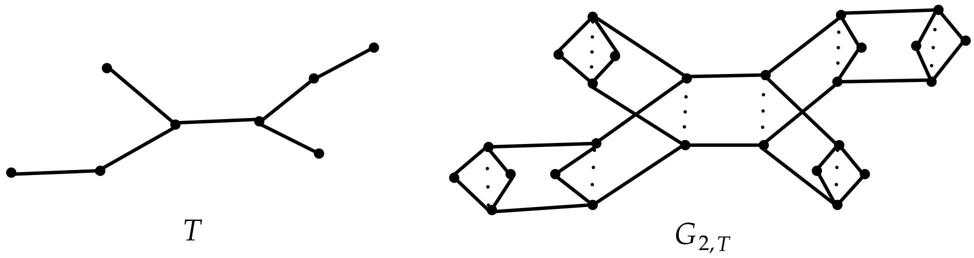


Рис. 1: Дерево T и экстремальный минимальный двусвязный граф $G_{2,T}$.

Одним из основных результатов диссертации является следующая теорема, в которой доказано, что других экстремальных минимальных k-связных графов нет.

Теорема 2.1. *Любой экстремальный минимальный k-связный граф — это граф $G_{k,T}$ для некоторого дерева T с $\Delta(T) \leq k+1$.*

В 1982 Оксли [30] представил алгоритм построения экстремальных минимальных двусвязных и трёхсвязных графов. Было доказано, что любой экстремальный минимальный двусвязный граф может быть получен из полного двудольного графа $K_{2,3}$ несколькими операциями замены вершины степени 2 на граф $K_{2,2}$, присоединенный к двум вершинам из окрестности заменяемой вершины (см. рисунок 2a). Любой экстремальный минимальный трёхсвязный граф может быть получен из полного двудольного графа $K_{3,4}$ несколькими операциями замены вершины степени 3 на граф $K_{3,3}$ (см. рисунок 2b).

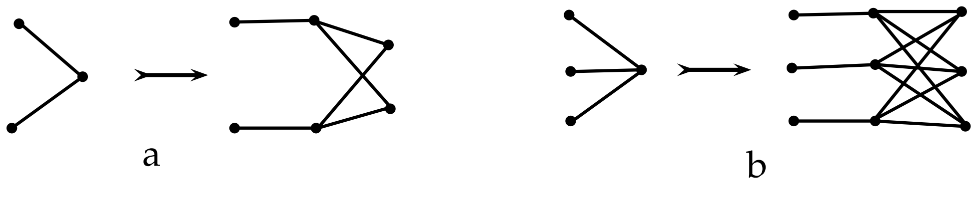


Рис. 2: Операции замены.

Из теоремы 2.1 несложно вывести аналогичный алгоритм построения всех минимальных k-связных графов.

Следствие 2.3. *Пусть G — экстремальный минимальный k-связный граф. Тогда G может быть получен из $K_{k,k+1}$ серией операций замены вершины степени k на полный двудольный граф $K_{k,k}$ (в ходе операции добавляется паросочетание, соединяющее k вершин одной доли $K_{k,k}$ с вершинами, входящими в окрестность заменяемой вершины степени k).*

Минимальные двусвязные графы с малым числом вершин степени 2

Мы более подробно изучим минимальные двусвязные графы при помощи конструкции *дерева разбиения* двусвязного графа. Напомним, что минимальный двусвзяный граф G удовлетворяет неравенству

$$v_2(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}.$$

Определение 20. Через $\mathcal{GM}(n)$ обозначим множество всех минимальных двусвязных графов на n вершинах, в которых ровно $\lceil \frac{n+4}{3} \rceil$ вершин степени 2.

Понятно, что равенство $v_2(G) = \frac{v(G)+4}{3}$ может достигаться только при $v(G) = 3m+2$. Из теоремы 2.1 следует, что множество $\mathcal{GM}(3m+2)$ состоит из графов вида $G_{2,T}$, где T — дерево с $v(T) = m$ и $\Delta(T) \leq 3$.

Оксли в статье [30] исследовал структуру минимальных двусвязных графов из $\mathcal{GM}(n)$. Для n сравнимых с 0 и 1 по модулю 3 в [30] доказано, что графы из $\mathcal{GM}(n)$ можно получить несколькими операциями замены вершины степени 2 на граф $K_{2,2}$ из одного из начальных графов, перечисленных в работе. Начальные графы — это K_3, три графа несколько более сложной структуры и две бесконечные серии графов.

Мы дадим описание минимальных двусвязных графов из $\mathcal{GM}(n)$ с помощью графов вида $G_{2,T}$ и стягивания рёбер.

Теорема 2.2. *Пусть $m \geq 2$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *$\mathcal{GM}(3m+1)$ состоит из графов вида $G_{2,T}\cdot xy$, где T — дерево с $v(T)=m$ и $\Delta(T)=3$, $x,y\in V_3(G_{2,T})$ и $xy\in E(G_{2,T})$.*

2) *Для любого графа $G\in\mathcal{GM}(3m+1)$ представление в виде $G_{2,T}\cdot xy$ из пункта 1 единственно с точностью до изоморфизма.*

Для описания графов из $\mathcal{GM}(3m)$ нам потребуеся определить еще одну серию графов.

Определение 21. Пусть T — дерево с $\Delta(T)=3$ и $a\in V(T)$ — вершина степени $d_T(a)=3$. Пусть $\mathrm{N}_T(a)=\{x,y,z\}$. Рассмотрим граф $G_{2,T}$: пусть R_a, $R_x=\{x_1,x_2\}$, $R_y=\{y_1,y_2\}$, $R_z=\{z_1,z_2\}$ — его одиночные множества, соответствующие вершинам a, x, y, z. Положим

$$G_{T,a}=(G_{2,T}-R_a)+x_1y_2+y_1z_2+z_1x_2$$

(см. рисунок 3).

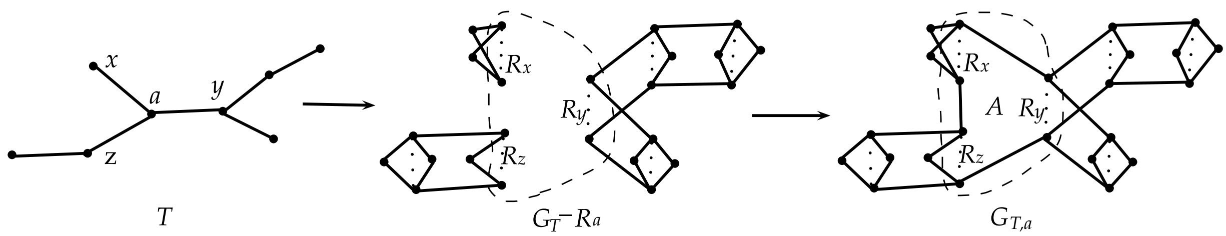


Рис. 3: Построение графа $G_{T,a}$.

Нетрудно доказать, что если T — дерево с $v(T)=m$ и $\Delta(T)=3$, то $G_{T,a}$ — минимальный двусвязный граф с

$$v(G_{T,a})=v(G_{2,T})-2=3m \quad \text{и} \quad v_2(G_{T,a})=v_2(G_{2,T})=m+2.$$

Поэтому $G_{T,a}\in\mathcal{GM}(3m)$.

Теорема 2.3. *Пусть $m\ge 2$. Тогда $\mathcal{GM}(3m)$ состоит из графов трёх перечисленных ниже видов.*

1° *Графы $G_{2,T}\cdot xy\cdot zt$, где T — дерево с $v(T)=m$ и $\Delta(T)\le 3$, $xy,zt\in E(G_{2,T})$ — два различных ребра, концы которых имеют в графе $G_{2,T}$ степень 3 (у выбранных рёбер могут быть совпадающие концы).*

2° *Графы, полученные из графов вида* $G_{2,T} - xy$ *где* T *— дерево с* $v(T) = m - 1$ *и* $\Delta(T) \le 3$, *а* $xy \in E(G_{2,T})$, *добавлением новой вершины степени* 2, *смежной с* x *и* y.

3° *Графы вида* $G_{T,a}$, *где* T *— дерево с* $v(T) = m$ *и* $\Delta(T) = 3$, *а* $a \in V(T)$ *— вершина степени* 3.

Основным инструментом в доказательствах последних двух теорем будет дерево разбиения двусвязного графа, определенное в первой главе.

Структура минимальных k-связных графов при $k \le 5$

В минимальных k-связных графах каждое ребро входит хотя бы в один разрез. Поэтому описание структуры взаимного расположения разрезов важно для изучения таких графов. Как видно еще из классических работ Мадера [22]-[24], наиболее важно изучить в минимальном k-связном графе структуру множества рёбер E_{k+1} (оба конца которых имеют степень хотя бы $k+1$). В диссертацию включен следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть* $k \le 5$, *а* G *— минимальный* k*-связный граф. Тогда для каждого ребра* $e \in E_{k+1}$ *можно выбрать содержащий* e *разрез* $S_e \in \mathfrak{R}$ *так, что все выбранные разрезы попарно независимы.*

Далее к описанному множеству попарно независимых разрезов — назовем его $\mathfrak{S}$ — можно применить конструкцию дерева разрезов и определить деревья $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{C})$ и $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{C})$. Эти деревья показывают взаимное расположение разрезов множества $\mathfrak{C}$ и частей из $\mathrm{Part}(\mathfrak{C})$. Существует взаимно однозначное соответствие между рёбрами дерева $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{C})$ и рёбрами из E_{k+1}. Поэтому, деревья $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{C})$ и $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{C})$ показывают также структуру взаимного расположения рёбер из множества E_{k+1}. Кроме того, для изучения структуры минимального k-связного графа теперь можно использовать многочисленные свойства, доказанные в теореме 1.7 и следствии 1.6.

Гипердерево и теорема разбиения

Для *гиперграфа* H мы будем применять такие же обозначения, как и для графа: множества *вершин* и *гиперребер* будем обозначать через $V(H)$ и $E(H)$, соответственно. Главное отличие гиперграфа от обычного графа в том, что *гиперребро* — это произвольное подмножество $V(H)$, состоящее хотя бы из двух вершин. Поэтому удобно оперировать с гиперрёбрами как с множествами вершин графа.

Для вершины $v \in V(H)$ обозначим через $d_H(v)$ ее степень в гиперграфе H, то есть, количество содержащих v гиперребер.

Для множества вершин $X \subset V(H)$ определим гиперграф $H - X$ следующим образом: $V(H - X) = V(H) \setminus X$, а $E(H - X)$ состоит из всех множеств вида $R \setminus X$ (где $R \in E(H)$), содержащих хотя бы две вершины.

Определение 22. 1) Будем называть последовательность различных вершин $a_1a_2 \dots a_k$ *путём*, если существуют гиперребра e_1, e_2, $\dots$, e_{k-1} такие, что $a_i, a_{i+1} \in e_i$.

2) Если, кроме того, существует гиперребро $e_k \ni a_k, a_1$, то мы назовем последовательность различных вершин $a_1a_2 \dots a_k$ *циклом*

Определение 23. 1) Гиперграф называется *связным*, если любые две его вершины *связаны*, то есть, соединены путём.

2) *Компоненты связности* гиперграфа определяются так же, как и компоненты связности графа — это максимальные по включению множества попарно связанных вершин.

Глава 3 начинается с определения гипердерева и изучения его свойств.

Определение 24. Будем называть гиперграф H *гипердеревом*, если он связен, ни одно его гиперребро не является подмножеством другого и для любого цикла в этом гиперграфе существует гиперребро, содержащее все его вершины.

Гипердерево имеет множество свойств, аналогичных свойствам обычного дерева, эти свойства описаны в теореме 3.1. Далее в третьей главе строится абстрактная структура, обобщающая свойства точек сочленения связного графа.

Определение 25. Рассмотрим конечное множество вершин V. Пусть каждой вершине $w \in V$ соответствует разбиение V_w множества $V \setminus \{w\}$ на несколько *классов* (возможно, такой класс всего один).

Будем говорить, что вершина w *разделяет* вершины v_1 и v_2, если v_1 и v_2 лежат в разных классах V_w.

Назовем вершины $v_1, v_2 \in V$ *соседними*, если их не разделяет никакая отличная от них вершина множества V.

Построим *гиперграф разбиения* $\mathrm{Struct}(V)$ на вершинах множества V, гиперребра которого — это максимальные по включению множества попарно соседних вершин.

Приведем пример множества вершин и гиперграфа разбиения, показывающий, какое отношение имеет эта конструкция к теории связности. Пусть F — связный граф, $\mathfrak{R}_1(F)$ — множество всех его точек сочленения, а для каждой точки сочленения $a \in \mathfrak{R}_1(F)$ классы разбиения $(\mathfrak{R}_1(F))_a$ состоят из точек сочленения, лежащих в одной компоненте связности графа $F - a$.

Нетрудно понять, что гиперребра $\mathrm{Struct}(\mathfrak{R}_1(F))$ — это множества всех точек сочленения, лежащих в каком-либо некрайнем блоке. Можно проверить, что гиперграф $\mathrm{Struct}(\mathfrak{R}_1(F))$ является гипердеревом. Именно классическая структура взаимного расположения точек сочленения связного графа подсказывает нам результат теоремы 3.2.

Теорема 3.2. *Пусть для любых $a, b, c \in V$* если a разделяет b и c, то b не разделяет a и c. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Гиперграф* $\mathrm{Struct}(V)$ *является гипердеревом.*

2) *Пусть для некоторой вершины* $a \in V$ *гиперграф* $\mathrm{Struct}(V) - a$ *распадается на компоненты связности* $W_1, \dots, W_\ell$. *Тогда* $V_a = \{W_1, \dots, W_\ell\}$.

Отметим, что с помощью теоремы 3.2 можно доказать приведенные в главе 1 диссертации результаты о структурных деревьях (теоремы 1.1 и 1.7): достаточно проверить для множества рассматриваемых объектов (попарно независимых разделяющих множеств или разрезов) условие из теоремы 3.2, после чего можно перейти от гипердерева к дереву с помощью конструкции, описанной в теореме 3.1. Мы дали в этих теоремах более элементарные доказательства. Однако, иногда обойтись без теоремы 3.2 гораздо сложнее — например, в случае компонент зависимости, о которых идет речь в следующем разделе.

Кроме того, отметим, что в работе [54] диссертант и А. В. Пастор именно с помощью теоремы о разбиении описали структуру взаимного расположения трёхвершинных разделяющих множеств в трёхсвязном графе. Эта структура много сложнее и разнообразнее структуры взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе, описанной в диссертации.

Компоненты зависимости

Определение 26. Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) *Граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$ набора $\mathfrak{S}$ — это граф, вершины которого соответствуют множествам набора, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества зависимы.

2) Будем называть *компонентой зависимости* набора $\mathfrak{S}$ любой набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, состоящий из всех множеств, соответствующих вершинам одной из компонент связности графа зависимости $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$.

3) Обозначим через $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ множество всех компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$.

В четвертой главе изучается взаимное расположение компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$.

Доказывается, что для любых двух различных компонент зависимости $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}' \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ существует единственная часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, которая содержит все множества компоненты $\mathfrak{T}'$, а любая отличная от A часть $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ не содержит ни одного множества из $\mathfrak{T}'$.

Каждой компоненте зависимости $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ поставим в соответствие разбиение остальных компонент зависимости на классы: каждый класс будут образовывать компоненты зависимости, содержащиеся в одной из частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$.

Определение 27. Гиперграф $\mathrm{Struct}(\mathrm{Comp}(\mathfrak{S}))$ описанного выше разбиения мы будем называть *гиперграфом компонент зависимости* набора $\mathfrak{S}$ и для простоты обозначать через $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Теорема 4.1. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Гиперграф компонент зависимости* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ *является гипердеревом.*

2) *Пусть $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, а $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ — компоненты связности гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S}) - \mathfrak{T}$. *Тогда компоненты зависимости из множества $\mathcal{C}_i$ содержатся в одной части $B_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, причем $B_i \neq B_j$ при $i \neq j$.*

3) *Пусть $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, а часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ содержит хотя бы одно множество из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$. Тогда существует единственное гиперребро гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, *вершинами которого являются $\mathfrak{T}$ и несколько (быть может, одна) компонент зависимости, лежащих в части A.*

Мы имеем дело с более общей ситуацией, чем в главе 1: там рассматривался набор из попарно независимых множеств, а значит, его компонентами зависимости были сами множества. Поэтому в рассматриваемой задаче возникает больше технических трудностей при изучении частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$

с помощью гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Определение 28. Пусть $R = \{\mathfrak{S}_1, \dots \mathfrak{S}_n\}$ — гиперребро $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$. Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ пусть $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$ — часть, содержащая множества всех остальных компонент зависимости из R. Тогда множество вершин

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

назовем *частью, соответствующей гиперребру* R (даже в случае, когда $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$).

Именно из-за того, что не каждому гиперребру $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ соответствует часть $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, не получается ввести на компонентах зависимости и частях $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ структуру дерева, как в случае с набором из попарно независимых множеств. Будет доказано, что часть A, соответствующая гиперребру R гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ не принадлежит $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ только в одном случае: $A \in \mathfrak{S}$ и гиперребро R состоит ровно из двух компонент зависимости, одна из которых — это $\{A\}$, а другая компонента зависимости имеет часть разбиения с границей A.

Следующая теорема описывает части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ с помощью гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Теорема 4.2. *Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть $\mathfrak{S}' \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ и часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ таковы, что A не содержит множеств из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$. Тогда $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.*

2) *Пусть $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда либо часть H соответствует некоторому гиперребру R гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, либо существует такая компонента зависимости $\mathfrak{S}' \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, что $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$.*

Удаление нескольких вершин с сохранением k-связности

Отметим еще одно важное свойство классических блоков связного графа. Пусть W — множество вершин, не являющихся точками сочленения и принадлежащих различным блокам. Тогда несложно доказать, что граф $G - W$ связен.

В пятой главе диссертации будет доказано аналогичное утверждение для двусвязного графа и сделана попытка обобщить эти свойства для графов большей связности.

Теорема 5.1. *Пусть G — двусвязный граф, а W — множество, состоящее из внутренних вершин непустых частей-блоков графа G и содержащее не более чем по одной вершине из каждого блока. Тогда граф $G - W$ двусвязен.*

Перейдем к одновременному удалению нескольких вершин из k-связного графа. В диссертацию включена теорема, доказанная в совместной работе диссертанта и А. В. Пастора [53]. Сформулируем необходимые определения и саму теорему.

Определение 29. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, а H — компонента связности графа $G - S$. Мы будем называть H *фрагментом.*

Определение 30. Пусть G — k-связный граф, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$. Пусть $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. Назовем множество $S \in \mathfrak{R}_k(G)$ *существенным* для части A, если не существует множества $T \in \mathfrak{R}_k(G)$, отделяющего S от $\mathrm{Int}(A)$.

Обозначим через $\mathrm{Bound}_2(A)$ множество всех граничных вершин части A, входящих в два и более существенных для части A множества. Назовем часть A *хорошей*, если $|\mathrm{Int}(A)| > |\mathrm{Bound}_2(A)|$.

Теорема 5.2. *Пусть G — k-связный граф, причем степень любой вершины, входящий в одно из множеств $\mathfrak{R}_k(G)$, не менее $2k - 1$, а любой фрагмент имеет хотя бы $\frac{k+1}{2}$ вершин. Тогда существует множе-*

ство W, содержащее по одной внутренней вершине каждой хорошей части $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$, *такое, что для любого $W' \subset W$ граф $G - W'$ является k-связным.*

Отметим, что в работе [58], опубликованной после [53], А. С. Чухнов доказал два похожих утверждения об удалении нескольких вершин из k-связного графа без потери k-связности, но также лишь для графов с дополнительным условием: степени всех вершин (в том числе, не входящих в k-вершинные разделяющие множества) должны быть не менее чем $\frac{3k-1}{2}$.

Остовные деревья с большим количеством листьев

В шестой главе диссертации изучается вопрос о построении в связном графе остовных деревьев с большим количеством листьев. Отметим, что к классическим методам построения добавляются новые методы, основанные на применении блоков и точек сочленения связного графа. Именно эти методы позволяют получить новые нижние оценки на количество листьев в остовном дереве, учитывающие висячие вершины и даже вершины степени 2 исходного связного графа.

Определение 31. Для связного графа G обозначим через $u(G)$ максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа G.

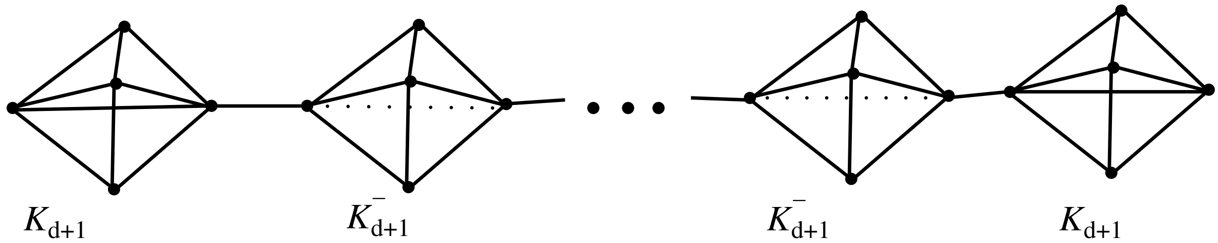
Замечание. Если F — дерево, то нетрудно понять, что $u(F)$ — количество его листьев.

Пусть G — связный граф. С 1981 года, когда Дж. Сторер [34] предположил, что $u(G) > \frac{v(G)}{4}$, если все вершины графа G имеют степень 3, было опубликовано немало работ о нижних оценках $u(G)$.

В 1981 году Н. Линиал высказал гипотезу:

$$u(G) \geq \frac{d-2}{d+1}v(G) + c \quad \text{при} \quad \delta(G) \geq d \geq 3,$$

где константа $c > 0$ зависит только от d. Эта гипотеза появилась не на пустом месте: для любого $d \geq 3$ несложно придумать бесконечную серию примеров связных графов с минимальной степенью d, для которых $\frac{u(G)}{v(G)}$ стремится к $\frac{d-2}{d+1}$.



На рисунке изображен такой пример: крайние блоки в цепочке — это полные графы на $d+1$ вершине, остальные блоки — это полные графы на $d+1$ вершине, из которых удалено ребро, соединяющее вершины, из которых выходят рёбра в соседние блоки цепочки. Нетрудно понять, что если G_n — такая цепочка из n блоков, то

$$v(G_n) = n(d+1) \quad \text{и} \quad u(G_n) = n(d-2)+4.$$

В 1991 году Д. Клейтман и Д. Вест [19] доказали, что $u(G) \ge \frac{1}{4} \cdot v(G) + 2$ при $\delta(G) \ge 3$ и

$$u(G) \ge \frac{2}{5} \cdot v(G) + \frac{8}{5} \quad \text{при} \quad \delta(G) \ge 4. \tag{2}$$

В 1992 году Дж. Григгс и М. Ву [9] еще раз доказали оценку (2) и доказали, что $u(G) \ge \frac{1}{2} \cdot v(G) + 2$ при $\delta(G) \ge 5$. В обеих работах применялся метод *мёртвых вершин*, который будет применен и в некоторых доказательствах этой диссертации. Детальное описание метода можно найти в шестой главе диссертации.

С развитием этого метода для $d \ge 6$ есть значительные проблемы, дальнейших результатов на настоящий момент нет. Из работ [1, 4, 6] следует, что для достаточно больших d гипотеза Линиала неверна. Однако, для малых значений $d > 5$ вопрос остается открытым.

В работе [19] сказано о еще одной, более сильной гипотезе Линиала:

$$u(G) \ge \sum_{x \in V(G)} \frac{d_G(x)-2}{d_G(x)+1}$$

для связного графа G с $\delta(G) \geq 2$. Понятно, что раз для больших степеней неверна более слабая гипотеза, то неверна и эта. Однако, она стимулирует попытки получить оценку на $u(G)$, в которую каждая вершина вносит вклад, зависящий от ее степени.

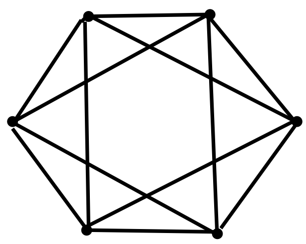
Н. В. Гравин в работе [41] доказал, что для произвольного связного графа G, в котором s вершин степени 3 и t вершин степени хотя бы 4, $u(G) \geq \frac{2}{5}t + \frac{2}{15}s$. В этой работе допускается наличие в графе вершин степени 1 и 2. Точность константы $\frac{2}{5}$ не вызывает сомнений (см. серию примеров, описанную выше), а вот константу $\frac{2}{15}$ можно заменить на большую.

В работе [47] диссертант доказал следующую теорему.

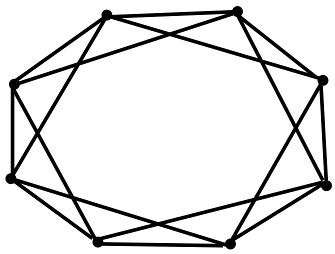
Теорема 6.1. *Пусть G — связный граф с более чем одной вершиной, s — количество его вершин степени 3, а t — количество его вершин степени не менее 4. Тогда*

$$u(G) = \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + \alpha, \quad \text{где} \quad \alpha \geq \frac{8}{5}.$$

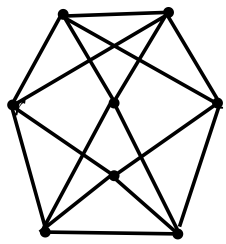
Более того, $\alpha \geq 2$, кроме трёх графов-исключений: C_6^2, C_8^2 (квадраты циклов на 6 и 8 вершинах) и регулярного графа G_8 степени 4 на 8 вершинах, изображенного на рисунке.



C_6^2



C_8^2



G_8

Эта теорема входит в шестую главу диссертации. Приведена бесконечная серия примеров графов, для которых достигается равенство.

Клейтман и Вест [19] предположили, что в неравенстве (2) аддитивную константу $\frac{8}{5}$ можно заменить на 2 для всех графов, кроме двух исключений: это C_6^2 и C_8^2 (квадраты циклов на 6 и 8 вершинах). Однако, было доказано лишь, что граф-исключение должен быть регулярным графом степени 4, каждое ребро которого входит в треугольник. Из результатов диссертации следует, что на самом деле для задачи, исследованной Клейтманом и Вестом, равно как и для более общей задачи, исследованной в теореме 6.1, исключений три (см. рисунок). Доказательство теоремы использует классический метод мертвых вершин.

Отметим, что в теореме 6.1 допускается наличие в графе вершин степени 1 и 2. Однако, эти вершины не учитываются в оценке на $u(G)$.

В совместной работе [39] диссертант и А. В. Банкевич доказали ряд оценок на $u(G)$, в которых учитываются вершины степени 1. В частности, там было доказано, что для связного графа G с более чем одной вершиной, имеющего s вершин степени, отличной от 2, выполняется неравенство $u(G) \geq \frac{1}{4}s + \frac{3}{2}$. Точность оценки подтверждена бесконечной серией примеров. Метод мертвых вершин не может учитывать в оценке на $u(G)$ висячие вершины, поэтому в работе [39] для доказательства оценки была придумана новая редукционная техника. Эта теорема не включена в диссертацию. Позже, в работе [46] диссертант доказал более сильное утверждение.

Теорема 6.2. *Пусть G — связный граф с более чем одной вершиной, s — количество его вершин степеней 1 и 3, а t — количество его вершин степени не менее 4. Тогда*

$$u(G) \geq \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}s + \frac{3}{2}.$$

Эта теорема входит в шестую главу диссертации. Отметим, что существуют бесконечные серии примеров графов, для которых оценка достигается. Мы приведём бесконечную серию примеров, в которой графы содержат только вершины степеней 1, 3 и 4. Доказательство использует целый ряд методов построения остовного дерева с большим количеством висячих вершин: используется редукционная техника, основанная на применении блоков и точек сочленения (как разработанная в [39], так и новая), а в оставшихся после редукции случаях используется модификация классического метода мертвых вершин (главное отличие в том, что базовая конструкция, с которой начинается построение — не дерево, как в классическом варианте метода, а лес, включающий в себя все висячие вершины графа).

Интересно, что могут увеличить количество висячих вершин в остовном дереве и вершины степени 2: нетрудно придумать примеры графов, в которых при замене вершины степени 2 на ребро, соединяющее две смежные с ней вершины, уменьшается максимальное количество листьев в остовном дереве.

Определение 32. Обозначим через $\ell(G)$ количество вершин в максимальной цепочке последовательно соединённых вершин степени 2 в графе G.

Отметим, что наличие в графе G длинных цепочек из последовательно соединённых вершин степени 2 может сделать величину $u(G)$ сколь угодно близкой к 0: не более чем две вершины из каждой такой цепочки могут быть висячими в остовном дереве графа. Поэтому возникает естественное ограничение на граф: нужно ограничить сверху $\ell(G)$. В работе [45] диссертант доказал следующую теорему.

Теорема 6.3. *Пусть G — связный граф, $v(G) \geq 2$, $\ell(G) \leq k$, $k \geq 1$. Тогда*

$$u(G) \geq \frac{1}{2k+4}v(G) + \frac{3}{2}.$$

В конце главы 6 построены бесконечные серии примеров, подтверждающие точность оценки из теоремы 6.3.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения.

В первой главе строится дерево разбиения k-связного графа набором, состоящим из попарно независимых k-вершинных разделяющих множеств. В качестве частного случая этого дерева рассматривается дерево разбиения двусвязного графа, с помощью которого изучается ряд свойств двусвязных графов: доказываются оценки на хроматическое число графа, изучается структура критических и минимальных двусвязных графов. Кроме того, строится дерево разрезов и доказываются его свойства.

Во второй главе изучаются минимальные k-связные графы. Исследуется структура минимальных k-связных графов с минимальным числом вершин степени k, затем изучается структура минимальных двусвязных графов с малым (но не обязательно минимальным возможным) числом вершин степени k. Все такие графы подробно описаны с помощью деревьев. Отдельно исследуется структура минимальных k-связных графов при $k \leq 5$.

В третьей главе доказывается теорема о разбиении — абстрактное утверждение о структуре, обобщающей классическое дерево блоков и точек сочленения связного графа.

В четвертой главе с помощью теоремы о разбиении изучается структура взаимного расположения компонент зависимости произвольного набора k-вершинных разделяющих множеств k-связного графа и частей, на которые множества этого набора разбивают граф.

В пятой главе доказываются теоремы об одновременном удалении нескольких вершин из k-связного графа без потери k-связности. Более детально рассматривается случай двусвязного графа.

В шестой главе доказываются нижние оценки на $u(G)$ — максимальное количество листьев в остовном дереве связного графа. Доказательство каждой оценки будет сопровождено алгоритмом построения остовного дерева соответствующим количеством листьев. Будут построены бесконечные серии графов, подтверждающие точность доказываемых оценок.

Нумерация определений, теорем, лемм, замечаний, рисунков и формул в диссертации ведётся отдельно для каждой главы.

Глава 1

Деревья разбиения

В первой главе строятся *деревья разбиения* — структуры, аналогичные дереву блоков и точек сочленения связного графа, но для более сложных объектов в графах большей связности: наборов, состоящих из попарно независимых k-вершинных разделяющих множеств или разрезов k-связного графа. Отдельно рассматривается дерево разбиения двусвязного графа, с помощью которого изучается ряд свойств двусвязных графов: доказываются оценки на хроматическое число графа, изучается структура критических и минимальных двусвязных графов.

1.1 Дерево разбиения для набора попарно независимых множеств

Напомним, что $\mathfrak{R}(G)$ — это набор из всех разделяющих множеств графа G, которые могут содержать как вершины, так и рёбра графа. В этом разделе граф G будет k-связным. Через $\mathfrak{R}_k(G)$ обозначается набор, состоящий из всех k-вершинных разделяющих множеств k-связного графа. Подробнее все необходимые определения даны во введении.

Определение 1.1. Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, причем все множества набора $\mathfrak{S}$ попарно независимы. Построим *дерево разбие-*

ния $T(G,\mathfrak{S})$ следующим образом. Вершины одной доли $T(G,\mathfrak{S})$ — это множества из $\mathfrak{S}$, а вершины другой доли — части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Обозначать вершины $T(G,\mathfrak{S})$ мы будем так же, как соответствующие множества вершин графа G. Вершины $S \in \mathfrak{S}$ и $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны в $T(G,\mathfrak{S})$, если и только если $S \subset A$.

Далее мы докажем, что определенный таким образом граф действительно является деревом. Построение $T(G,\mathfrak{S})$ аналогично построению дерева блоков и точек сочленения. Аналогичными будут и его свойства. Начнем со вспомогательного определения и технической леммы.

Определение 1.2. Построим граф $G^{\mathfrak{S}}$ на множестве вершин $V(G)$ следующим образом: возьмем граф G и для каждого множества $S \in \mathfrak{S}$ добавим все отсутствующие в $E(G)$ рёбра, соединяющие пары несмежных в G вершин множества S.

Отметим несколько свойств графа $G^{\mathfrak{S}}$.

Лемма 1.1. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ — набор, состоящий из попарно независимых множеств. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G^{\mathfrak{S}})$. *Более того,* $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S}) = \mathrm{Part}(G^{\mathfrak{S}};\mathfrak{S})$.

2) *Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, $B \in \mathrm{Part}(G;\mathfrak{T})$, а множество $R \in \mathfrak{R}(G^{\mathfrak{S}}(B))$ не содержит рёбра, соединяющие пары вершин, входящих в какое-либо множество набора $\mathfrak{S}$. Тогда $R \in \mathfrak{R}(G)$. В частности, граф $G^{\mathfrak{S}}(B)$ является k-связным.*

Доказательство. 1) Рассмотрим любое множество $S \in \mathfrak{S}$. Так как множества набора $\mathfrak{S}$ попарно независимы, никакое ребро из $E(G^{\mathfrak{S}}) \setminus E(G)$ не может соединять внутренние вершины двух разных частей $\mathrm{Part}(G;S)$. Таким образом, вершины разделены одним из множеств набора $\mathfrak{S}$ в графе G если и только если они разделены этим множеством в $G^{\mathfrak{S}}$, откуда очевидно следуют утверждения пункта 1.

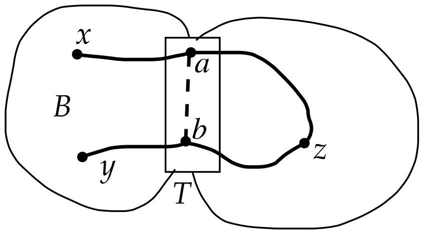


Рис. 1.1: Построение пути в графе $G^{\mathfrak{S}}(B)$.

2) Предположим, что $R \notin \mathfrak{R}(G)$. Пусть $x, y \in B$, а множество R отделяет x от y в графе $G^{\mathfrak{S}}(B)$. Однако, R не отделяет x от y в графе G, а следовательно, и в $G^{\mathfrak{S}}$. Рассмотрим кратчайший xy-путь P в графе $G^{\mathfrak{S}} - R$. Предположим, что он содержит вершину $z \notin B$ (см. рисунок 1.1). Тогда существует множество $T \in \mathfrak{T}$, отделяющее z от B. При движении от z в обе стороны по пути P мы попадем в различные вершины a и b множества T, которые в $G^{\mathfrak{S}}$ смежны. По условию, $ab \notin R$. Но тогда существует более короткий путь: можно заменить участок пути, содержащий z, на ребро ab. Противоречие с выбором пути P показывает, что $V(P) \subset B$, а значит, P — путь в $G^{\mathfrak{S}}(B) - R$. Но такого пути нет по условию. Следовательно, $R \in \mathfrak{R}(G)$.

В завершении доказательства остается отметить, что $\mathfrak{R}_{k-1}(G) = \varnothing$ (граф G — k-связный), а значит и $\mathfrak{R}_{k-1}(G^{\mathfrak{S}}(B)) = \varnothing$, то есть, граф $G^{\mathfrak{S}}(B)$ также является k-связным. $\square$

Теорема 1.1. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ — набор, состоящий из попарно независимых множеств. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *$T(G, \mathfrak{S})$ — это дерево.*

2) *Для каждого множества $S \in \mathfrak{S}$ выполняется равенство*

$$d_{T(G,\mathfrak{S})}(S) = |\mathrm{Part}(S)|.$$

Более того, для каждой части $A \in \mathrm{Part}(S)$ существует единственная такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $B \subset A$ и B смежна с S в $T(G, \mathfrak{S})$. Все *висячие вершины дерева* $T(G, \mathfrak{S})$ *соответствуют частям* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

3) *Множество* S *разделяет в графе* G *части* $B, B' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *тогда и только тогда, когда* S *разделяет* B *и* B' *в* $T(G, \mathfrak{S})$.

Доказательство. Будем доказывать все утверждения теоремы индукцией по количеству множеств в наборе $\mathfrak{S}$, причем не фиксируя k-связный граф G. *База* для пустого набора очевидна.

Докажем *индукционный переход.* Рассмотрим граф $G^* = G^{\mathfrak{S}}$. Из леммы 1.1 следует, что разбиения графов G и G^* набором $\mathfrak{S}$ одинаковы, будем обозначать это разбиение через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Более того, тогда

$$T(G, \mathfrak{S}) = T(G^*, \mathfrak{S}).$$

Поэтому достаточно доказать утверждения теоремы для графа G^*. Пусть

$$S \in \mathfrak{S}, \quad \mathrm{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_n\}, \quad G_i = G^*(A_i).$$

По лемме 1.1, все графы $G_1, \dots, G_n$ являются k-связными. Пусть набор $\mathfrak{S}_i$ состоит из всех множеств набора $\mathfrak{S}$, лежащих в A_i и отличных от S. Тогда каждое множество из $\mathfrak{S} \setminus \{S\}$ лежит ровно в одном из наборов $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$.

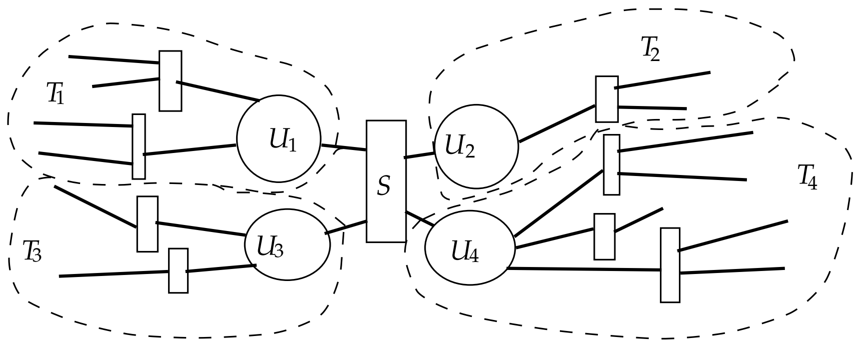


Рис. 1.2: Дерево $T(G, \mathfrak{S})$.

Пусть $U_i \in \mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i)$ — часть, содержащая S. По лемме 1.1, для любой части $U \in \mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i)$ граф $G^*(U)$ является k-связным, а значит, его не разделяет ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}$, не лежащих в U. Множество S лежит в части U_i, но также не разделяет ее, так как

$$U_i \subset A_i \in \mathrm{Part}(G; S).$$

Это означает, что $\mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i) \subset \mathrm{Part}(G^*; \mathfrak{S})$, причем именно часть U_i содержит S. Следовательно,

$$\mathrm{Part}(G^*; \mathfrak{S}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i),$$

причем объединение — дизъюнктное, а части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, содержащие множество S — это $U_1, \dots, U_n$. Таким образом, утверждение 2 теоремы доказано для множества S, для остальных множеств из $\mathfrak{S}$ доказательство аналогично.

Каждая часть $\mathrm{Part}(G_i; \mathfrak{S}_i)$, кроме U_i, смежна в $T_i = T(G_i, \mathfrak{S}_i)$ с теми же вершинами, что в $T(G, \mathfrak{S})$. Для части U_i в $T(G, \mathfrak{S})$ добавляется ребро к множеству S. Поэтому $T(G, \mathfrak{S}) - S$ распадается ровно на n связных подграфов: это графы T_i, где $i \in \{1, \dots, n\}$ (см. рисунок 1.2). По индукционному предположению, все эти графы — деревья, а значит, выполнены утверждения пунктов 1 и 3 теоремы. □

Как мы видим, свойства дерева разбиения аналогичны хорошо известным нам свойствам классического дерева блоков и точек сочленения.

1.2 Дерево разбиения двусвязного графа

В этом разделе граф G будет двусвязным. Объектом рассмотрения будут множества из $\mathfrak{R}_2(G)$. Напомним определения.

Определение 1.3. Назовем множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ *одиночным*, если оно независимо со всеми другими множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор, состоящий из всех одиночных множеств графа G.

Понятно, что одиночные множества попарно независимы, что позволяет нам дать следующее определение.

Определение 1.4. 1) *Дерево разбиения* $\mathrm{BT}(G)$ двусвязного графа G — это дерево $T(G, \mathfrak{O}(G))$.

2) Будем использовать обозначение $\mathrm{Part}(G)$ вместо $\mathrm{Part}(\mathfrak{O}(G))$ и называть части этого разбиения просто *частями графа* G. Часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ назовем *крайней*, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения $\mathrm{BT}(G)$.

Замечание 1.1. 1) Из теоремы 1.1 следует, что $\mathrm{BT}(G)$ — дерево, все висячие вершины которого соответствуют крайним частям $\mathrm{Part}(G)$.

2) Если $A \in \mathrm{Part}(G)$ — крайняя часть, то $\mathrm{Bound}(A)$ — одиночное множество графа G.

Далее мы характеризуем части графа G и изучим расположение неодиночных двухвершинных разделяющих множеств в этом графе.

Определение 1.5. 1) Для двусвязного графа G обозначим через G' граф, полученный из G добавлением всех отсутствующих в $E(G)$ ребер вида ab, где $\{a, b\} \in \mathfrak{O}(G)$.

2) Назовём часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ *циклом*, если граф $G'(A)$ — простой цикл и *блоком*, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A — цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A.

Начнем с нескольких лемм.

Лемма 1.2. *Пусть S — одиночное множество двусвязного графа G, а $x \in S$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если одиночное множество S имеет степень $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = d$, то $d_G(x) \geq d$. Если $d_G(x) = d$, то вершины множества S несмежны.*

2) $d_G(x) \geq 3$.

Доказательство. 1) По теореме 1.1 мы имеем $|\mathrm{Part}(S)| = d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = d$, а во внутренности каждой из d частей $\mathrm{Part}(S)$ есть вершина, смежная с x (иначе граф недвусвязен). Поэтому $d_G(x) \geq d$, а в случае равенства все смежные с x вершины лежат во внутренностях частей $\mathrm{Part}(S)$.

2) Пусть $d_G(x) = 2$. По пункту 1 тогда $|\mathrm{Part}(S)| = 2$ и вершины множества S несмежны. Значит, $\mathrm{N}_G(x) \in \mathfrak{R}_2(G)$ — множество, зависимое с S, противоречие. $\square$

Теперь наша задача — понять смысл частей графа G. Опишем важное свойство частей графа и одиночных множеств, аналогичное свойству блоков и точек сочленения. Это свойство позволит нам "разрезать" двусвязный граф по одиночному множеству.

Лемма 1.3. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) *Множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ разделяет вершины $a, b \in V(G)$ в графе G тогда и только тогда, когда S разделяет их в G'. В частности,*

$$\mathfrak{R}_2(G) = \mathfrak{R}_2(G').$$

2) *Пусть $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ — неодиночное множество, $S \subset A \in \mathrm{Part}(G)$. Тогда $S \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$, причем это множество — неодиночное и в $G'(A)$.*

Доказательство. 1) При построении G' мы соединяем дополнительными рёбрами только пары вершин, составляющих одиночное множество, а такие вершины не разделены ни одним из множеств набора $\mathfrak{R}_2(G)$. Отсюда легко следуют доказываемые утверждения.

2) Пусть $S' \in \mathfrak{R}_2(G)$ — зависимое с S множество. По пункту 1, мы имеем $S, S' \in \mathfrak{R}_2(G')$, причем эти множества зависимы и в графе G'. Так как граф $G'(A)$ двусвязен, нельзя разделить две вершины множества $S \subset A$ в графе G', удалив менее двух вершин из части A. Следовательно, $S' \subset A$. Тогда S и S' разделяют друг друга и в графе $G'(A)$. Следовательно, $S, S' \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$, причем эти множества зависимы. $\square$

Следующая лемма характеризует неодиночные множества. Похожую характеристику использовал в своей книге [36] Татт.

Лемма 1.4. *Пусть $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$ — неодиночное множество. Тогда $|\mathrm{Part}(S)| = 2$, причём для каждой части $A \in \mathrm{Part}(S)$ граф $G(A)$ недвусвязен и имеет точку сочленения, отделяющую a от b.*

Доказательство. Так как S — неодиночное, существует зависимое с ним множество $S' \in \mathfrak{R}_2(G)$. Множество S', как мы знаем, разделяет S. Значит, не существует ab-пути по вершинам части A в графе G, который не пересекается с S'. Однако, если S' не пересекает $\mathrm{Int}(A)$, то такой путь, очевидно, существует. Противоречие.

Таким образом, S' пересекает внутренность каждой части $\mathrm{Part}(S)$, откуда следует, что частей ровно две. Более того, если $\{x\} = S' \cap \mathrm{Int}(A)$, то x отделяет друг от друга вершины a и b в $G(A)$. □

Лемма 1.5. *Пусть G — двусвязный граф без одиночных множеств. Тогда либо G трёхсвязен, либо G — это простой цикл.*

Замечание 1.2. Напомним, что трёхсвязный граф содержит хотя бы 4 вершины. В частности, треугольник не является трёхсвязным графом и две альтернативы из леммы 1.5 — взаимно исключающие.

Доказательство леммы 1.5. Предположим, что наш граф G нетрёхсвязен. *Для каждого множества $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$ и каждой части $A \in \mathrm{Part}(S)$ мы докажем, что $G(A)$ — это простой ab-путь.*

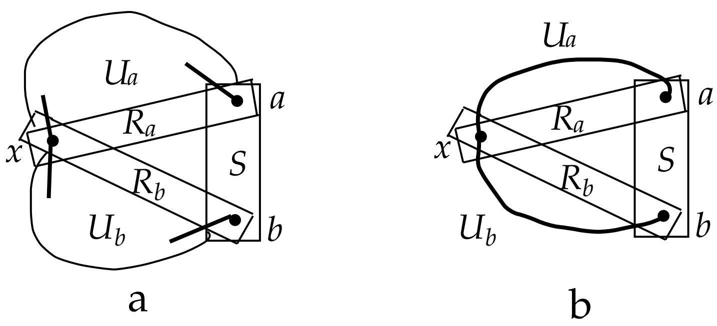


Рис. 1.3: Двусвязный граф без одиночных множеств.

Доказательство будет индукцией по $|A|$, база для случая, когда часть A имеет ровно одну внутреннюю вершину, очевидна. Докажем переход. Пусть мы хотим доказать утверждение для части $A \in \mathrm{Part}(S)$, а для меньших частей утверждение уже доказано. Пусть $H = G(A)$. Так как множество S — неодиночное, по лемме 1.4 граф H имеет точку сочленения x, отделяющую a от b. Пусть U_a и U_b — компоненты связности графа $H - x$, содержащие a и b соответственно (см. рисунок 1.3a). Из двусвязности графа G следует, что других компонент связности в графе $H - x$ нет (такая компонента выделилась бы и в $G - x$).

Пусть $U'_a = U_a \setminus \{a\} \neq \varnothing$. Тогда $R_a = \{a, x\}$ отделяет U'_a от остальных вершин в графе G. Следовательно, по индукционному предположению, граф $G(U'_a \cup R_a) = G(U_a \cup \{x\})$ — простой ax-путь. Если $U_a = \{a\}$, то $\mathrm{N}_H(a) = \{x\}$ и $G(U_a \cup \{x\})$ — также простой ax-путь. Аналогично, граф $G(U_b \cup \{x\})$ — простой bx-путь. Следовательно, граф $G(A)$ — это простой ab-путь (см. рисунок 1.3b).

По лемме 1.4 мы знаем, что $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$. Как мы доказали, оба графа $G(A_1)$ и $G(A_2)$ — простые пути между вершинами множества S, откуда, очевидно, следует, что G — простой цикл. $\square$

Теорема 1.2. *Пусть G — двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Каждая часть графа G — блок или цикл.*

2) *Множество $R = \{a, b\}$ — неодиночное множество из $\mathfrak{R}_2(G)$, если и только если a и b — несоседние в циклическом порядке вершины некоторой части-цикла.*

Доказательство. 1) По лемме 1.1 мы знаем, что граф $G'(A)$ двусвязен. Предположим, $S \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$. По лемме 1.1 мы имеем $S \in \mathfrak{R}_2(G)$. Множество S не может быть одиночным в G, так как разделяет часть $A \in \mathrm{Part}(G)$. По лемме 1.3 тогда S — неодиночное разделяющее множество в $G'(A)$. Следовательно, в $G'(A)$ нет одиночных множеств, а значит, по лемме 1.5 этот граф либо трёхсвязен, либо является циклом. В первом случае часть A является блоком, а во втором — циклом.

2) $\Leftarrow$. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, причем вершины указаны в циклическом порядке, $R = \{a_1, a_m\}$, где $2 < m < k$. Тогда $R \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$ и делит граф $G'(A)$ ровно на две части:

$$U_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \quad \text{и} \quad U_2 = \{a_m, a_{m+1}, \ldots, a_1\}.$$

По лемме 1.1 мы имеем $R \in \mathfrak{R}_2(G)$. Очевидно, $R \notin \mathfrak{O}(G)$.

$\Rightarrow$. Множество R независимо со всеми одиночными множествами графа G, а потому лежит в одной из частей $A \in \mathrm{Part}(G)$. По лемме 1.3 тогда $R \in \mathfrak{R}_2(G'(A))$. Из пункта 1 теоремы ясно, что тогда A — цикл длины хотя бы 4. Теперь понятно, что R состоит из двух несоседних вершин этого цикла. □

В завершении отметим еще одно очевидное свойство.

Следствие 1.1. *Если часть* $A \in \mathrm{Part}(G)$ *— цикл, то все вершины из* $\mathrm{Int}(A)$ *имеют степень* 2 *в графе* G.

Доказательство. Если $x \in \mathrm{Int}(A)$, то рёбра графа G выходят из x только к вершинам части A, а таких рёбер, очевидно, ровно два. □

На этом закончим изучение собственно дерева разбиения двусвязного графа и перейдём к его применению.

1.3 Применение дерева разбиения двусвязного графа

1.3.1 Части разбиения и планарность

Понятно, что связный граф планарен тогда и только тогда, когда планарен любой его блок. В этом разделе мы обсудим аналогичный критерий планарности для двусвязных графов — в терминах частей разбиения этого графа.

Определение 1.6. 1) Граф H' называется *подразбиением* графа H, если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути. При этом, все внутренние вершины добавляемых путей различны, имеют степень 2 и не содержатся в графе H.

2) Через $G \supset H$ будем обозначать, что граф G содержит в качестве подграфа подразбиение графа H.

Лемма 1.6. *Пусть G — двусвязный граф, $A \in \mathrm{Part}(G)$. Тогда $G \supset G'(A)$.*

Доказательство. Рассмотрим ребро $ab \in E(G'(A)) \setminus E(G)$. Тогда $a, b \in A$ и $\{a, b\} \in \mathfrak{O}(G)$. Пусть $U_{a,b} \in \mathrm{Part}(\{a, b\})$ — часть, не содержащая A. Тогда существует ab-путь $S_{a,b}$ по вершинам части $U_{a,b}$ в графе G. Заменим ребро ab на путь $S_{a,b}$.

В результате нескольких таких замен мы получим подграф H графа G. Пусть ab и xy — два разных замененных ребра (возможно, они имеют общий конец). Тогда части $U_{a,b}$ и $U_{x,y}$ разеделены частью A в $\mathrm{BT}(G)$, поэтому не имеют общей внутренней вершины. Следовательно, никакие два добавленных пути не имеют общей внутренней вершины, а значит, граф H является подразбиением $G'(A)$. $\square$

Следующая теорема почти повторяет теорему, доказанную Маклейном в 1937 году [20].

Теорема 1.3. *Двусвязный граф G планарен тогда и только тогда, когда для любого блока $B \in \mathrm{Part}(G)$ граф $G'(B)$ планарен.*

Единственное отличие нашей версии от теоремы Маклейна состоит в том, что у Маклейна вместо подграфов вида $G'(B)$ фигурируют так называемые *атомы*, которые на самом деле являются подразбиениями подграфов $G'(B)$. Доказательство теоремы 1.3 несложно следует из теоремы Куратовского о характеризации непланарных графов.

1.3.2 Части разбиения и хроматическое число

Теорема 1.4. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $\chi(G) \le \chi(G') = \max\limits_{A \in \mathrm{Part}(G)} \chi(G'(A)).$

2) $\chi(G) \le \max\limits_{A \in \mathrm{Part}(G)} \chi(G(A)) + 1.$

3) $\chi(G) \le \max\big(3, \max\limits_{A\text{ — блок }G} \chi(G(A)) + 1\big).$

Доказательство. Разобьем дерево $\mathrm{BT}(G)$ на уровни, пусть уровень 0 состоит из любой части $B \in \mathrm{Part}(G)$, в каждый следующий уровень $\ell + 1$ войдут вершины, не вошедшие в уровни $0, \dots, \ell$ и смежные хотя бы с одной вершиной уровня ℓ. По построению дерева $\mathrm{BT}(G)$ понятно, что четные уровни состоят из частей разбиения, а нечетные — из одиночных множеств. Мы будем красить вершины частей графа G в порядке, заданном разбиением на уровни.

1) Достаточно построить правильную раскраску графа G' в

$$k = \max_{A \in \mathrm{Part}(G)} \chi(G'(A))$$

цветов. Граф $G'(B)$ мы, очевидно, можем покрасить в k цветов. Пусть вершины частей из уровней менее $2\ell > 0$ уже покрашены. Рассмотрим часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ уровня 2ℓ, тогда она смежна в $\mathrm{BT}(G)$ ровно с одним одиночным множеством S уровня $2\ell - 1$ и в части A покрашены только две вершины множества S, причем в разные цвета, так как они смежны в G'. Понятно, что существует правильная раскраска графа $G'(A)$ в k цветов. Поскольку вершины множества S в этой раскраске разноцветны, можно считать, что их цвета именно такие, как в раскраске вершин частей предыдущих уровней.

2) Достаточно построить правильную раскраску графа G в

$$m + 1 = \max_{A \in \mathrm{Part}(G)} \chi(G(A)) + 1$$

цветов. Граф $G(B)$ мы можем покрасить даже в m цветов. Пусть вершины частей из уровней менее $2\ell > 0$ уже покрашены. Рассмотрим часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ уровня 2ℓ, тогда она смежна в $\mathrm{BT}(G)$ ровно с одним одиночным множеством S уровня $2\ell - 1$ и в части A покрашены только две вершины множества $S = \{a, b\}$. Пусть вершины a и b покрашены в цвета i и j, возможно, совпадающие.

Если $i = j$, то покрасим вершины $G(A)$ правильным образом в m цветов, не используя цвет i, а потом перекрасим вершины a и b в цвет i. Если $i \neq j$, то покрасим вершины $G(A)$ правильным образом в m цветов так, чтобы a была покрашена в цвет i, не используя при этом цвет j, а потом перекрасим вершину b в цвет j. В любом случае понятно, что получится правильная раскраска вершин части A, согласованная с раскраской вершин частей предыдущих уровней.

3) Единственное отличие от пункта 2 состоит в том, что если рассматриваемая часть A — цикл, у которого как-то покрашены две вершины, то остальные вершины части A несложно докрасить, не нарушая правильность раскраски и использовав при этом три цвета. $\square$

Замечание 1.3. В доказательстве утверждения 2 теоремы 1.4 мы можем произвольно выбрать часть B, с которой начинается покраска, а для этой части не нужно использовать дополнительный цвет. Поэтому при вычислении максимума можно не прибавлять 1 к хроматическому числу графа $G(A)$ для одной из частей $A \in \mathrm{Part}(G)$ (именно эту часть нужно будет выбрать в качестве B).

Аналогично, в утверждении 3 можно не прибавлять 1 к хроматическому числу одного из блоков.

Следствие 1.2. *Если все части двусвязного графа G — циклы, то*

$$\chi(G) \leq 3.$$

Перейдем к оценкам на списочное хроматическое число двусвязного графа.

Теорема 1.5. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathrm{ch}(G) \le \max\limits_{A \in \mathrm{Part}(G)} \mathrm{ch}(G(A)) + 2.$

2) $\mathrm{ch}(G) \le \max\bigl(3, \max\limits_{A\text{ — блок } G} \mathrm{ch}(G(A)) + 2\bigr).$

Доказательство. 1) Аналогично теореме 1.4, мы разобьем вершины дерева разбиения на уровни, начиная с некоторой части B, и будем красить части по уровням. Пусть вершины частей из уровней менее $2\ell > 0$ уже покрашены. Рассмотрим часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ уровня 2ℓ, тогда она смежна в $\mathrm{BT}(G)$ ровно с одним одиночным множеством S уровня $2\ell - 1$ и в части A покрашены только две вершины множества $S = \{x, y\}$.

В списке каждой вершины графа $G(A)$ хотя бы $\mathrm{ch}(G(A)) + 2$ цвета. Удалим из списков цвета вершин x и y, оставшихся цветов хватит для правильной раскраски оставшихся вершин части A.

2) Отличие от пункта 1 состоит в раскраске частей-циклов. Пусть A — цикл. Тогда ранее покрашено две вершины части A. Теперь покрасим остальные вершины: это возможно, так как в момент покраски очередной вершины покрашено не более двух ее соседей, а в списке есть три цвета. $\square$

Замечание 1.4. В доказательстве теоремы 1.5 мы можем произвольно выбрать часть B, с которой начинается покраска, а для этой части не нужно использовать дополнительные два цвета. Поэтому при вычислении максимума можно не прибавлять 2 к $\mathrm{ch}(G(A))$ для одной из частей $A \in \mathrm{Part}(G)$ (именно эту часть нужно будет выбрать в качестве B).

1.3.3 Критические двусвязные графы

Дерево $\mathrm{BT}(G)$ помогает понять, как устроены критические двусвязные графы.

Следствие 1.3. 1) *Двусвязный граф G является критическим тогда и только тогда, когда все его части-блоки и части-треугольники имеют пустую внутренность.*

2) *Пусть $A \in \mathrm{Part}(S)$ — крайняя часть критического двусвязного графа G, смежная в $\mathrm{BT}(G)$ с одиночным множеством S. Тогда A — цикл длины хотя бы 4 и все вершины A, кроме двух вершин множества S, имеют в графе G степень 2.*

Доказательство. 1) Из теоремы 1.2 очевидно, что вершины, не входящие в множества из $\mathfrak{R}_2(G)$ (то есть вершины, удаление которых не нарушает двусвязность графа G) — это как раз внутренние вершины блоков и треугольников графа G.

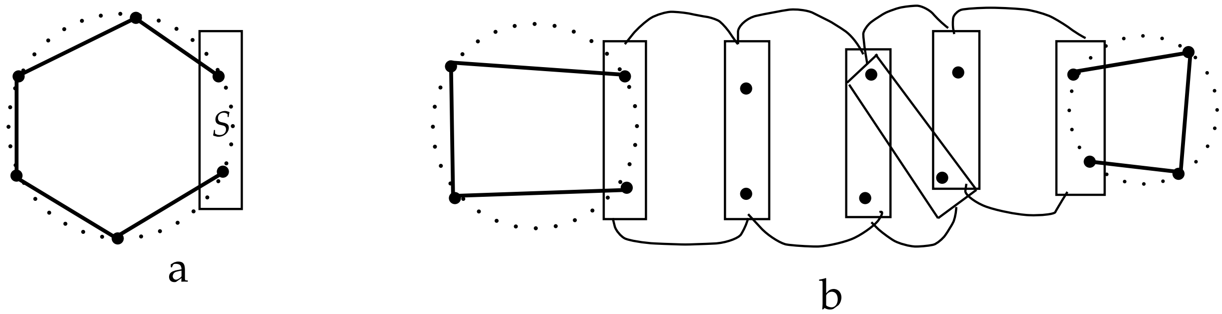


Рис. 1.4: Критические двусвязные графы.

2) Пусть A — крайняя часть графа G. По пункту 1, тогда A — цикл длины хотя бы 4, а S состоит из двух соседних вершин этого цикла. Остальные (хотя бы две) вершины A — внутренние и по следствию 1.1 имеют степень 2 в графе G (см. рисунок 1.4a). □

Следствие 1.4. *Критический двусвязный граф на не менее чем 4 вершинах имеет хотя бы 4 вершины степени 4.*

Доказательство. Если граф G имеет хотя бы одно одиночное множество, то у графа G не менее двух крайних частей, утверждение очевидно следует из пункта 2 следствия 1.3. Пусть одиночных множеств у графа G

нет. Критический двусвязный граф, очевидно, не является трёхсвязным и содержит хотя бы 4 вершины. Значит, по лемме 1.5 граф G — цикл длины не менее 4, в этом случае утверждение очевидно. □

Более того, теперь понятно, как устроены критические двусвязные графы, у которых ровно 4 вершины степени 2. Во-первых, это цикл из четырех вершин. Теперь рассмотрим такой граф G не менее чем с пятью вершинами. Тогда дерево $\mathrm{BT}(G)$ должно иметь ровно две висячие вершины и они соответствуют циклам длины 4. Следовательно, все некрайние блоки и все одиночные множества имеют степень 2 в $\mathrm{BT}(G)$. Значит, каждое одиночное множество делит граф ровно на две части (для неодиночных множеств это всегда так).

Крайние части нашего графа содержат ровно 4 внутренних вершины степени 2, следовательно, в некрайних частях вершин степени 2 нет. Рассмотрим некрайнюю часть $A \in \mathrm{Part}(G)$. Так как $d_{\mathrm{BT}(G)}(A) = 2$, граница A состоит ровно из двух одиночных множеств, то есть, имеет 3 или 4 вершины. Докажем, что $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$. Если A — блок, то это доказано в теореме 1.3. Если A — цикл, то его внутренняя вершина имеет степень 2 в графе G, как уже доказывалось выше, то есть, количество вершин степени два будет более 4.

Таким образом, некрайняя часть $\mathrm{Part}(G)$ может быть треугольником, четырёхугольником или блоком из четырёх вершин, причем ее вершины покрываются двумя одиночными множествами, смежными с этой частью в дереве $\mathrm{BT}(G)$. Пример критического двусвязного графа G с 4 вершинами степени 2 приведен на рисунке 1.4б.

1.3.4 Минимальные двусвязные графы

Теорема 1.6. *Двусвязный граф G является минимальным тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

(a) если $\{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$, то вершины a и b несмежны;

(b) для любого блока A графа G граф $G(A)$ не имеет ни одного ребра.

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть G — минимальный двусвязный граф. Предположим, что

$$S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G), \quad ab \in E(G), \quad \mathrm{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_n\}.$$

Так как G двусвязен, обе вершины a и b смежны с $\mathrm{Int}(A_j)$. Граф $G(\mathrm{Int}(A_j))$ связен, поэтому существует ab-путь, внутренние вершины которого лежат в $\mathrm{Int}(A_j)$ и их множество непусто. Таким образом, в графе $G - ab$ существует $n \geq 2$ непересекающихся по внутренним вершинам ab-путей, откуда следует двусвязность графа $G - ab$. Противоречие с минимальностью G показывает, что условие (a) выполнено.

Пусть A — блок графа G; $x, y \in A$, $xy \in E(G)$. Граф $G'(A)$ трёхсвязен, следовательно, по теореме Менгера существует три xy-пути в графе G', не имеющие общих внутренних вершин. По лемме 1.6, граф G содержит подразбиение $G'(A)$, поэтому также содержит три xy-пути без общих внутренних вершин. Следовательно, граф $G - xy$ содержит два таких пути, а значит, он двусвязен. Противоречие с минимальностью G. Таким образом, условие (b) выполнено.

$\Leftarrow$. Пусть G — не минимальный граф, а ребро $xy \in E(G)$ таково, что граф $G - xy$ двусвязен. Понятно, что существует такая часть $A \in \mathrm{Part}(G)$, что $x, y \in A$. Из условия (b) следует, что A — цикл. Пусть $z \in A \setminus \{x, y\}$. Тогда множество $T = \{z, xy\}$ делит цикл $G'(A)$ на две компоненты связности $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$.

Так как $\{x, y\}$, очевидно, не является одиночным множеством графа G, по пункту 2 леммы 1.1 граф $G - T$ несвязен, а значит, граф $G - xy$ недвусвязен. Полученное противоречие показывает, что граф G минимален. $\square$

Следствие 1.5. *Пусть G — минимальный двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если A — блок графа G, то* $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$.

2) *Пусть A — крайняя часть графа G, смежная в* $\mathrm{BT}(G)$ *с одиночным множеством S. Тогда A — цикл, а все его вершины, кроме двух вершин множества S, имеют степень* 2.

3) *Множество внутренних вершин частей графа G состоит из всех вершин этого графа, имеющих степень* 2.

Доказательство. 1) Пусть $x \in \mathrm{Int}(A)$, рассмотрим ребро $xy \in E(G)$. Понятно, что $y \in A$, таким образом, граф $G(A)$ имеет ребро, что противоречит теореме 1.6.

2) Так как A — крайняя часть, то $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. Значит, A — цикл и утверждение очевидно.

3) Прямое следствие леммы 1.2 и пункта 1. □

1.4 Дерево разрезов

Мы начнем с определения разреза k-связного графа и частей разбиения k-связного графа множеством его разрезов. В этом разделе граф G будет k-связным.

1.4.1 Разрезы

Определение 1.7. Пусть G — k-связный граф.

1) Будем называть *разрезом* k-элементное разделяющее множество из вершин и рёбер графа G, содержащее хотя бы одно ребро. Множество всех разрезов графа G обозначим через $\mathfrak{T}(G)$.

2) Для разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ обозначим через $V(T)$ множество всех входящих в T вершин, а через $W(T)$ — множество, состоящее из всех вершин, входящих в разрез T и всех вершин, инцидентных рёбрам разреза T.

Замечание 1.5. 1) Никакая вершина разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ (то есть, из множества $V(T)$) не может быть инцидентна никакому ребру из T.

2) Для любого разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ граф $G - T$ имеет две компоненты связности, пусть это U_1 и U_2. Для каждого ребра $e \in T$ компоненты U_1 и U_2 содержат по одному концу e.

Теперь определим части разбиения графа разрезом и границы разреза.

Определение 1.8. 1) Пусть $T \in \mathfrak{T}(G)$, а U_1 и U_2 — компоненты связности графа $G - T$. Назовем множества $A_i = U_i \cup V(T)$ *частями разбиения* графа G разрезом T. Мы будем использовать обозначение

$$\mathrm{Part}(T) = \{A_1, A_2\}.$$

2) *Границами разреза* T мы будем называть множества вершин

$$\mathrm{R}(A_1) = A_1 \cap W(T) \quad \text{и} \quad \mathrm{R}(A_2) = A_2 \cap W(T).$$

Замечание 1.6. Пусть $T \in \mathfrak{T}(G)$, $\mathrm{Part}(T) = \{A_1, A_2\}$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) $A_1 \cup A_2 = V(G)$, $A_1 \cap A_2 = V(T)$.

2) Границы разреза T содержат по k элементов. Каждая из границ разреза T содержит $V(T)$ и по одному концу всех входящих в T рёбер.

3) Если множество $A' = A_1 \setminus W(T)$ непусто, то $\mathrm{R}(A_1)$ отделяет A' от $V(G) \setminus A_1$, а каждая вершина $x \in A_1 \cap W(T)$ смежна хотя бы с одной вершиной из A'. Таким образом, в этом случае граница разреза является k-вершинным разделяющим множеством в k-связном графе G (то есть, принадлежит $\mathfrak{R}_k(G)$).

1.4.2 Части разбиения

Определим разбиение графа множеством из нескольких разрезов.

Определение 1.9. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$.

Назовем *квазичастями* разбиения графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ множества вида

$$A = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} A_S, \quad \text{где} \quad A_S \in \mathrm{Part}(S). \tag{1.1}$$

Частями разбиения графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ мы назовем все максимальные по включению квазичасти. Множество всех частей разбиения графа G множеством разрезов $\mathfrak{S}$ будем обозначать через $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$, а множество всех квазичастей — через $\mathrm{QPart}(G;\mathfrak{S})$. В случае, когда ясно, какой граф разбивается, будем писать просто $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$.

Определение 1.10. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$, $A \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$.

1) *Границей* квазичасти A будет множество $\mathrm{Bound}(A)$ всех вершин этой квазичасти, являющихся вершинами разрезов из $\mathfrak{S}$.

3) *Внутренность* квазичасти A — это множество

$$\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Bound}(A).$$

4) Определим *граничный разрез* $\mathrm{Cut}(A)$ квазичасти A: он состоит из множества вершин $\mathrm{Bound}(A)$ и всех рёбер, входящих в разрезы множества $\mathfrak{S}$ и инцидентных вершинам из $\mathrm{Int}(A)$.

Замечание 1.7. 1) Если две различные квазичасти $A_1, A_2 \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$ имеют непустое пересечение, то $A_1 \cap A_2 \subset V(S)$ для некоторого разреза $S \in \mathfrak{S}$.

2) Граничный разрез части не обязательно является разрезом. Для этого необходимо, чтобы $\mathrm{Cut}(A)$ содержал ровно k элементов и среди них было хотя бы одно ребро.

Лемма 1.7. *Для множества разрезов $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$ выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть квазичасть $B \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$ не является частью $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда $B \subset V(S)$ для некоторого разреза $S \in \mathfrak{S}$.*

2) *Пусть $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$, причем $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = \varnothing$. Тогда части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ — это максимальные по включению множества вершин, представимые в виде*

$$A = A_1 \cap A_2, \quad \text{где} \quad A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i). \tag{1.2}$$

Доказательство. 1) Пусть $B \subsetneq B' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем

$$B = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} B_S, \quad B' = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} B'_S, \quad \text{где} \quad B_S, B'_S \in \mathrm{Part}(S).$$

Существует такое $S \in \mathfrak{S}$, что $B_S \neq B'_S$. Тогда $B \subset B_S \cap B'_S = V(S)$.

2) Пусть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, тогда для $i \in \{1, 2\}$ существуют такие части $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$, что $A \subset A_i$. Пусть $A' = A_1 \cap A_2$. Тогда $A' \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$ и $A \subset A'$, откуда по определению части следует, что $A = A'$. Таким образом, все части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ представимы в виде (1.2).

Пусть $A = A_1 \cap A_2$ — максимальное по включению множество вида (1.2) и $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Очевидно, $A \in \mathrm{QPart}(\mathfrak{S})$. Значит, существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $A \subsetneq B$. Как мы знаем, часть B представима в виде (1.2), что противоречит максимальности A. $\square$

Лемма 1.8. *Пусть* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, *причем* $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. *Обозначим через* $\overline{A}$ *объединение всех отличных от* A *частей* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathrm{Cut}(A)$ *отделяет* A *от* $\overline{A}$.

2) *Если* $|\mathrm{Cut}(A)| = k$ *и* $\mathrm{Cut}(A)$ *содержит хотя бы одно ребро, то* $\mathrm{Cut}(A)$ — *разрез с* $\mathrm{Part}(\mathrm{Cut}(A)) = \{A, \overline{A}\}$.

Доказательство. 1) Отметим, что

$$A \cap \overline{A} = \mathrm{Bound}(A), \quad A \cup \overline{A} = V(G). \tag{1.3}$$

Любое ребро $e \in E(G)$, выходящее из $\mathrm{Int}(A)$ в $\overline{A} \setminus \mathrm{Bound}(A)$, соединяет две вершины, разделенные хотя бы одним из разрезов множества $\mathfrak{S}$, а значит, принадлежит одному из этих разрезов. Но тогда $e \in \mathrm{Cut}(A)$.

2) Из условия и пункта 1 следует, что $\mathrm{Cut}(A)$ — разрез. Следовательно, $|\mathrm{Part}(\mathrm{Cut}(A))| = 2$. В силу (1.3) понятно, что $\mathrm{Part}(\mathrm{Cut}(A)) = \{A, \overline{A}\}$. $\square$

1.4.3 Независимые разрезы

Определение 1.11. Разрезы $S, T \in \mathfrak{T}_k(G)$ называются *независимыми*, если можно ввести такие обозначения

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\},$$

что $A_1 \supset B_2$ и $B_1 \supset A_2$. Иначе мы будем называть разрезы S и T *зависимыми*.

Лемма 1.9. *Пусть разрезы $S, R, T \in \mathfrak{T}(G)$ таковы, что S и R независимы, а также T и R независимы. Пусть*

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\}, \quad \mathrm{Part}(R) = \{D_1, D_2\},$$

причем $D_1 \supset A_1$ и $D_2 \supset B_2$. Тогда разрезы S и T независимы.

Доказательство. Из независимости разрезов S и R следует, что $A_2 \supset D_2 \supset B_2$. Из независимости разрезов T и R следует, что $B_1 \supset D_1 \supset A_1$. Таким образом, S и T независимы. □

Лемма 1.10. *Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{T}(G)$ независимы,* $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\}$ *причем $A_1 \supset B_2$ и $B_1 \supset A_2$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $A_1 \supset \mathrm{R}(B_2), \quad A_2 \not\supset \mathrm{R}(B_2)$.

2) *Если S и T не имеют общих рёбер, то $A_1 \supset W(T)$ и $A_2 \not\supset \mathrm{R}(B_1)$.*

Доказательство. 1) Очевидно, $A_1 \supset B_2 \supset \mathrm{R}(B_2)$. Предположим, что $A_2 \supset \mathrm{R}(B_2)$. Тогда

$$k - 1 = |V(S)| = |A_1 \cap A_2| \geq |\mathrm{R}(B_2)| = k,$$

что невозможно.

2) Пусть $b_1b_2 \in T$, $b_i \in \mathrm{Int}(B_i)$. Мы знаем, что $b_2 \in A_1$. Если $b_2 \in S$, то $b_2 \in A_2 \subset B_1$, что неверно. Значит, $b_2 \notin S$. Поскольку $b_1b_2 \notin S$, то

вершины b_1 и b_2 не разделены разрезом S, то есть, $b_1 \in A_1$. Следовательно, $A_1 \supset W(T)$.

Предположим, что $A_2 \supset \mathrm{R}(B_1)$. Тогда

$$k - 1 = |V(S)| = |A_1 \cap A_2| \geq |\mathrm{R}(B_1)| = k,$$

что невозможно. □

1.4.4 Дерево разрезов и его свойства

Определение 1.12. 1) Пусть $\mathfrak{S}$ — множество, состоящее из попарно независимых разрезов графа G. *Дерево разрезов* множества $\mathfrak{S}$ — это двудольный граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$: одну долю образуют разрезы из $\mathfrak{S}$, а вторую — части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем множество $S \in \mathfrak{S}$ и часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны тогда и только тогда, когда A содержит одну из границ разреза S.

2) Если часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ соответствует висячей вершине дерева $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$, то назовем такую часть *крайней.*

Теорема 1.7. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$ — набор из попарно независимых разрезов, причем в $\mathfrak{S}$ нет двух разрезов, содержащих одно и то же ребро. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ — дерево.*

2) *Любой разрез $S \in \mathfrak{S}$ смежен в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ ровно с двумя частями $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем эти две части содержатся в разных частях $\mathrm{Part}(S)$.*

3) *Разрез $S \in \mathfrak{S}$ отделяет вершину B от вершины C в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ если и только если S отделяет множество B от множества C в графе G.*

4) *Если крайняя часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежна в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ с разрезом T, то $A \in \mathrm{Part}(T)$.*

5) *Крайние части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ — это в точности минимальные по включению части среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Индукция по количеству разрезов. *База*: при $|\mathfrak{S}| = 1$ все пять утверждений очевидны.

Индукционный переход. Пусть для любого меньшего чем $\mathfrak{S}$ множества разрезов утверждение уже доказано. Выберем разрез $T \in \mathfrak{S}$ так, что одна из частей $B \in \mathrm{Part}(T)$ — минимальная по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} \setminus \{T\}$. Тогда граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S}')$ — дерево. Пусть $\mathrm{Part}(T) = \{B, B'\}$.

Рассмотрим разрез $S \in \mathfrak{S}'$. Так как S и T независимы и в силу минимальности части $B \in \mathrm{Part}(T)$, существует такая часть $A_S \in \mathrm{Part}(S)$, что $B \subset A_S$. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{A_S, A'_S\}$. Тогда $B' \supset A'_S$. По лемме 1.10 мы имеем $A'_S \not\supset \mathrm{R}(B)$.

Введем описанные выше обозначения для всех разрезов $S \in \mathfrak{S}'$ и рассмотрим квазичасть

$$A = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}'} A_S \quad \in \quad \mathrm{QPart}(\mathfrak{S}').$$

Любая отличная от A часть $A' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ лежит в A'_S для некоторого разреза $S \in \mathfrak{S}'$ и потому $A' \not\supset \mathrm{R}(B)$. Отсюда следует, что $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$.

Вспомним, что по лемме 1.7 части $D \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ — это максимальные по включению множества вида

$$D = H \cap F, \quad \text{где} \quad H \in \mathrm{Part}(T) \quad \text{и} \quad F = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}'} F_S \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}'). \qquad (1.4)$$

Разберем несколько случаев.

а. Пусть $F \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$, $F \neq A$.
Тогда для некоторого $S \in \mathfrak{S}'$ мы имеем $F_S \neq A_S$ и поэтому $F_S = A'_S$. Следовательно, $B' \supset A'_S \supset F$. Поэтому $B \cap F \subsetneq F = B' \cap F$. Следовательно, все максимальные по включению множества вида (1.4), где $F \neq A$ — это части $F \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ и только они. Таким образом, все отличные от A части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ — это части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

Отметим, что по лемме 1.10 часть $F_S = A'_S$ не содержит ни одно из множеств $\mathrm{R}(B)$ и $\mathrm{R}(B')$, следовательно, F не смежна в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ с разрезом T. Таким образом, $\mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})}(F) = \mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')}(F)$.

b. $D = H \cap A$.

Если $H = B$, то $D = A \cap B = B$. Легко понять, что B — максимальное по включению множество вида (1.4), а значит, $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. По лемме 1.10, часть B не содержит никаких границ разрезов множества $\mathfrak{S}'$, следовательно, B — висячая вершина дерева $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$, смежная только с разрезом T.

Остается последний случай $D = A \cap B'$. Как мы знаем по лемме 1.10, часть B' содержит все границы разрезов из $\mathfrak{S}'$, которые лежат в A. Кроме того, для всех $S \in \mathfrak{S}'$ по лемме 1.10 мы имеем $A_S \supset \mathrm{R}(B')$, а значит, $A \supset \mathrm{R}(B')$. Следовательно, $D = A \cap B'$ содержит $\mathrm{R}(B')$ и все границы разрезов из $\mathfrak{S}'$, лежащие в A, а других границ разрезов из $\mathfrak{S}$ не содержит. Это означает, что $\mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})}(D) = \mathrm{N}_{\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')}(A) \cup \{T\}$.

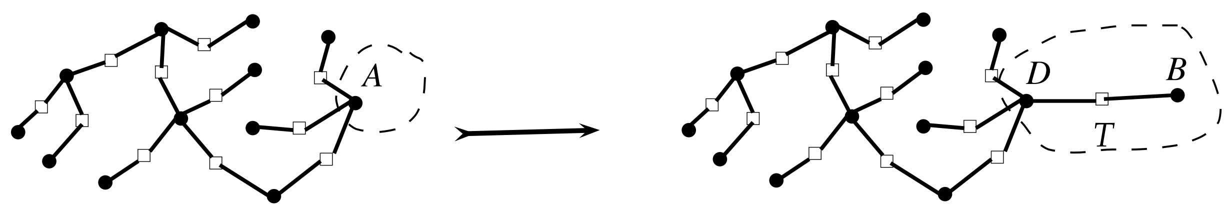


Рис. 1.5: Индукционный шаг построения дерева $T(G, \mathfrak{S})$.

Таким образом, граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ получается из $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S}')$ переименованием вершины A в D, присоединением к D разреза T, а к T — части B (см. рисунок 1.5).

1) и 2) Из сказанного выше ясно, что $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ — дерево. Отметим, что разрез T смежен в этом дереве с двумя частями, содержащими его границы — это B и $D \subset B'$, и других таких частей нет. Теперь понятно, что для дерева $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ выполнено утверждение 2.

3) Мы доказали, что часть $B' \in \mathrm{Part}(T)$ содержит все отличные от B части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, а также для каждого разреза $S \in \mathfrak{S}$ часть B' содержит часть $A'_S \in \mathrm{Part}(S)$. Это означает, что разрез T отделяет крайнюю часть B

от всех остальных частей и разрезов как в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$, так и в графе G. Более того, T не отделяет друг от друга в графе G никакие отличные от B части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и разрезы из $\mathfrak{S}'$, так как все эти части и разрезы лежат в части $B' \in \mathrm{Part}(T)$.

Рассмотрим любой разрез $S \in \mathfrak{S}'$, напомним, что $\mathrm{Part}(S) = \{A_S, A'_S\}$, причем $A_S \supset B$. В графе G разрез S отделяет части и разрезы, содержащиеся в A_S от частей и разрезов, содержащихся в A'_S. Нам нужно доказать, что то же самое верно и для дерева $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$. Из индукционного предположения для дерева $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')$ следует, что это утверждение верно для разрезов из $\mathfrak{S}'$ и частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, являющихся частями $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ — а по доказанному выше это все части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, кроме B и $D = A \cap B'$. Разрез S не отделяет в дереве $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')$ часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ от остальных частей и разрезов, лежащих в A_S. Отметим, что $A_S \supset A = D \cup B$. По пункту 2 леммы 1.10 мы имеем $A_S \supset T$. Из построения $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S})$ и сказанного выше следует доказываемое утверждение.

4) Для крайней части B утверждение выполнено. Любая другая крайняя часть $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ соответствует висячей вершине дерева $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{S}')$, а значит, для нее существует такой разрез $T' \in \mathfrak{S}'$, что $H \in \mathrm{Part}(T')$.

5) Предположим, что $|\mathfrak{S}| > 1$, иначе утверждение очевидно. Вспомним, что $\mathrm{Part}(T) = \{B, B'\}$, причем крайняя часть B была выбрана как минимальная по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}$, а часть B' при $|\mathfrak{S}| > 1$ таковой не является.

По индукционному предположению крайние части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ — это в точности минимальные по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}'$. Рассмотрим такую часть H. Если $H \neq A$, то $H \subset B' \in \mathrm{Part}(T)$, поэтому, часть H является минимальной по включению среди всех частей разбиения графа G одним разрезом из множества $\mathfrak{S}$. Остается лишь отметить, что часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ не является минимальной по включению (напомним, что $A \supset B$) среди частей разбиения графа G одним разрезом множества $\mathfrak{S}$ и не является крайней частью $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. $\square$

Определение 1.13. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество, состоящее из попарно независимых разрезов графа G. Мы построим граф $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ следующим образом: вершины этого графа — это части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, причем две части $A, B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ смежны тогда и только тогда, когда содержат границы одного и того же разреза из $\mathfrak{S}$.

Следствие 1.6. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(G)$ — набор из попарно независимых разрезов, причем в $\mathfrak{S}$ нет двух разрезов, содержащих одно и то же ребро. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ *— дерево.*

2) *Поставим в соответствие каждому ребру AB дерева* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ *разрез из $\mathfrak{S}$, границы которого содержатся в частях A и B. Тогда это отображение — взаимно однозначное соответствие между рёбрами дерева* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$ *и разрезами из $\mathfrak{S}$.*

3) $|\mathrm{Part}(\mathfrak{S})| = |\mathfrak{S}| + 1$.

4) *Пусть R — граница одного из разрезов набора $\mathfrak{S}$. Тогда существует ровно одна часть* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$*, содержащая R.*

5) *Если части $A, B \in$* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *смежны в дереве* $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ *с одним разрезом S, то $A \cap B = V(S)$.*

6) *Если части $A, B \in$* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *смежны в дереве* $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$*, то*

$$|A \cap B| = k - 1.$$

Доказательство. 1) и 2) По теореме 1.7 граф $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ — дерево, причем все его вершины, соответствующие разрезам, имеют в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ степень 2. Из пункта 2 теоремы 1.7 понятно, что заменив в этом дереве каждый разрез $S \in \mathfrak{S}$ на ребро, соединяющие две смежные с ним в $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, мы получим дерево $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{S})$, причем для этого дерева выполняется утверждение 2.

3) Непосредственное следствие утверждения 2.

4) Непосредственное следствие утверждения 2 теоремы 1.7.

5) По теореме 1.7 части A и B содержат разные границы разреза S, поэтому $A \cap B \supset V(S)$. Разрез S отделяет часть A от части B, поэтому $V(S) \supset A \cap B$.

6) По определению и пункту 2 теоремы 1.7, части A и B смежны в дереве $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{S})$ с одним разрезом S. Таким образом, пункт 6 следует из пункта 5. $\square$

Глава 2

Минимальные k-связные графы

В этом разделе мы будем вести разговор о минимальном k-связном графе G и использовать для него следующие обозначения. Очевидно, все вершины k-связного графа имеют степень не менее k. Через V_k мы обозначим множество всех вершин графа G, имеющих степень k, пусть

$$V_{k+1} = V(G) \setminus V_k, \quad v_k = |V_k|, \quad v_{k+1} = |V_{k+1}|,$$
$$G_{k+1} = G(V_{k+1}), \quad E_{k+1} = E(G_{k+1}).$$

Пусть e_k — количество рёбер графа G, оба конца которых лежат в V_k. В тех случаях, когда из контекста неясно, о каком графе идет речь, мы будем применять обозначения $V_k(G)$, $V_{k+1}(G)$ и так далее.

Поскольку граф G минимален, то для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ существует разрез, содержащий e и $k-1$ вершину. Пусть $\mathfrak{R}$ — множество всех таких разрезов.

2.1 Минимальные k-связные графы с минимальным количеством вершин степени k

В 1979 году В. Мадер [24, 25] доказал, что

$$v_k(G) \geq \frac{(k-1)v(G)+2k}{2k-1} \tag{2.1}$$

для минимального k-связного графа G. Эта оценка точная: для любого $k \ge 2$ существуют бесконечные серии минимальных k-связных графов, для которых неравенство (2.1) обращается в равенство. Мы будем называть такие графы *экстремальными* минимальными k-связными графами.

Определение 2.1. Пусть T — дерево с $\Delta(T) \le k+1$. Граф $G_{k,T}$ строится из k копий $T_1, \dots, T_k$ дерева T с непересекающимися множествами вершин. Для каждой вершины $a \in V(T)$ обозначим через a_i соответствующую вершину копии T_i. Если $d_G(a) = j$, то мы добавим $k+1-j$ новых вершин степени k, смежных с $\{a_1, \dots, a_k\}$.

Очевидно, если $v(T) = n$, то $v(G_{k,T}) = (2k-1)n + 2$. Несложно проверить, что $G_{k,T}$ — минимальный k-связный граф, для которого неравенство (2.1) обращается в равенство. Следовательно, граф $G_{k,T}$ — экстремальный.

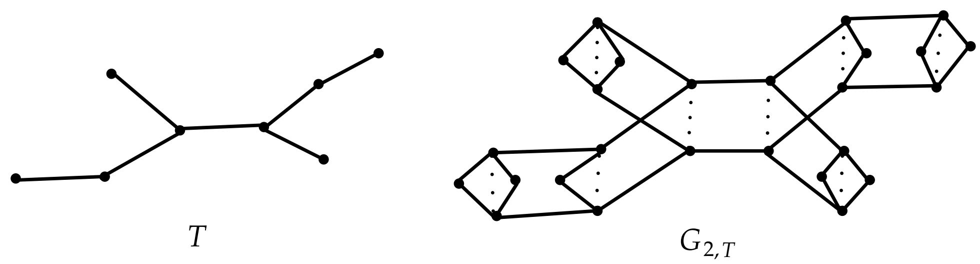


Рис. 2.1: Дерево T и экстремальный минимальный двусвязный граф $G_{2,T}$.

В этом разделе мы докажем, что других экстремальных минимальных k-связных графов нет.

Теорема 2.1. *Любой экстремальный минимальный k-связный граф — это граф $G_{k,T}$ для некоторого дерева T с $\Delta(T) \le k+1$.*

Основным инструментом изучения минимального k-связного графа являются разрезы. Мы продолжим изучение их свойств, начатое в разделе 1.4 и изучим свойства разрезов из $\mathfrak{R}$.

2.1.1 Пара зависимых разрезов

Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{R}$ зависимы, причем входящие в них рёбра различны. Введем обозначения

$$\begin{gathered}\mathrm{Part}(S) = \{F_1, F_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}, \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j, \quad P = T \cap S \\ T_i = \mathrm{Int}(F_i) \cap T, \quad S_j = \mathrm{Int}(H_j) \cap S \quad \text{и} \quad \mathrm{Int}(G_{i,j}) = G_{i,j} \setminus (P \cup T_i \cup S_j).\end{gathered} \tag{2.2}$$

Пусть $R_{i,j} = \mathrm{Cut}(G_{i,j})$, а $\overline{G}_{i,j}$ — объединение трёх отличных от $G_{i,j}$ частей.

В дальнейшем для описания свойств пар зависимых разрезов мы будем употреблять именно такие обозначения.

Замечание 2.1. Множество P в нашем случае содержит только вершины.

Лемма 2.1. $|R_{i,j}| + |R_{3-i,3-j}| \le |S| + |T| = 2k$.

Доказательство. Вспомним, что множество $R_{i,j}$ состоит из $P \cup T_i \cup S_j$ и рёбер разрезов T и S, инцидентных вершинам из $\mathrm{Int}(G_{i,j})$. Вершины из P в обеих частях считаются дважды, а остальные вершины и рёбра из S и T в левой части считаются не более чем один раз, а в правой части — ровно один раз. □

2.1.2 Леммы Мадера

Следующие лемма и следствие практически полностью повторяют результаты из работы Мадера [22]. Мы приведем доказательство для полноты изложения.

Лемма 2.2. *Пусть $ab, ac \in E_{k+1}$, $T_{ab} \ni ab$ и $T_{ac} \ni ac$ — разрезы из $\mathfrak{R}$, причем $a \in F_a \in \mathrm{Part}(T_{ab})$ и $c \in H_c \in \mathrm{Part}(T_{ac})$. Тогда*

$$|\mathrm{Int}(F_a)| > |\mathrm{Int}(H_c)|.$$

Доказательство. Так как

$$|F_a| - |\mathrm{Int}(F_a)| = k - 1 = |H_c| - |\mathrm{Int}(H_c)|,$$

достаточно доказать, что $|F_a| > |H_c|$.

Отметим, что $c \in F_a$. Если разрезы T_{ab} и T_{ac} независимы, то легко понять, что $F_a \supset H_c$ и $a \in F_a \setminus H_c$, а значит, $|F_a| > |H_c|$.

Если эти разрезы зависимы, то положим $S = T_{ab}$, $T = T_{ac}$ и применим введенные выше обозначения для пары зависимых множеств (2.2). Пусть $F_1 = F_a$, $H_2 = H_c$. Тогда нетрудно понять, что

$$a \in \mathrm{Int}(G_{1,1}), \quad b \in \mathrm{Int}(G_{2,1}), \quad c \in \mathrm{Int}(G_{1,2}).$$

Нам нужно доказать, что $|H_2| < |F_1|$. Определенные выше множества изображены на рисунке 2.2.

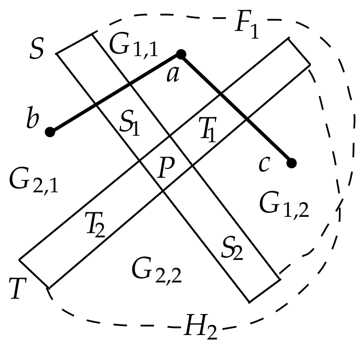


Рис. 2.2: Множества S, T и части разбиения.

Вершина $a \in \mathrm{Int}(G_{1,1})$ смежна с b, c и вершинами из $G_{1,1}$. Значит, если $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \{a\}$, то из $d_G(a) \geq k+1$ следует, что $R_{1,1}$ содержит хотя бы $k-1$ вершину. Если же $A = \mathrm{Int}(G_{1,1}) \setminus \{a\} \neq \varnothing$, то множество вершин $V(R_{1,1}) \cup \{a\}$ отделяет A от остальных вершин графа и, следовательно, содержит хотя бы k вершин. В любом случае мы имеем $|V(R_{1,1})| \geq k-1$ и $|R_{1,1}| \geq k+1$.

Из леммы 2.1 нам известно, что $|R_{1,1}| + |R_{2,2}| \leq 2k$. Следовательно, $|R_{2,2}| \leq k-1$, а значит, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) = \varnothing$. Отметим, что

$$F_1 \setminus H_2 = \mathrm{Int}(G_{1,1}) \cup S_1 \quad \text{и} \quad H_2 \setminus F_1 = \mathrm{Int}(G_{2,2}) \cup T_2 = T_2.$$

Поскольку

$$|S_1| + |P| + |S_2| = |V(S)| = k-1 \geq |R_{2,2}| \geq |T_2| + |P| + |S_2|,$$

то $|S_1| \geq |T_2|$. Учитывая, что $|\mathrm{Int}(G_{1,1})| \geq 1$, мы получаем $|F_1| > |H_2|$. $\square$

Следствие 2.1. *Граф G_{k+1} — лес.*

Доказательство. Если граф G_{k+1} — не лес, то есть цикл с ребрами из E_{k+1}, существование которого, очевидно, противоречит лемме 2.2. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть c — количество компонент связности графа G_{k+1}. Тогда*

$$v_k(G) \geq \frac{(k-1)v(G) + 2(c + e_k)}{2k-1}.$$

Доказательство. Из каждой вершины множества V_{k+1} выходит не менее чем $k+1$ ребро, сумма степеней вершин леса G_{k+1} равна $2v_{k+1} - 2c$, следовательно, не менее чем $(k-1)v_{k+1} + 2c$ ребер выходит из V_{k+1} в V_k. Из вершин множества V_k выходит ровно $kv_k - 2e_k$ рёбер к вершинам множества V_{k+1}. Поэтому

$$(k-1)v_{k+1} + 2c \leq kv_k - 2e_k,$$

откуда немедленно следует утверждение леммы. $\square$

Непосредственно из определения экстремального графа и леммы 2.3 можно сделать следующий вывод.

Следствие 2.2. *Пусть G — минимальный k-связный граф, такой, что $e_k + c > k$. Тогда граф G — не экстремальный.*

Замечание 2.2. Неравенство Мадера (2.1) следует из $e_k + c \geq k$. Мы докажем это утверждение и исследуем случаи, когда достигается равенство. Отметим, что из доказательства леммы 2.3 ясно, что при $e_k + c = k$ равенство в (2.1) может достигаться только в случае, когда $\Delta(G) \leq k+1$.

2.1.3 Нормальные разрезы

Определение 2.2. Назовем разрез $S \in \mathfrak{R}$ *кривым*, если существует часть $A \in \mathrm{Part}(S)$ с $|\mathrm{Int}(A)| < \frac{k}{2}$ и *нормальным*, если такой части не существует.

Лемма 2.4. *Пусть оба зависимых разреза $S, T \in \mathfrak{R}$ — нормальные, $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ — различные рёбра из E_{k+1}. Тогда для каждого из рёбер a_1a_2 и b_1b_2 существуют такие $i, j \in \{1,2\}$, что $R_{i,j}$ — разрез, содержащий это ребро.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$. Тогда из леммы 2.1 следует, что

$$|R_{1,1}| = k = |R_{2,2}| \quad \text{и} \quad R_{1,1} \cup R_{2,2} = S \cup T.$$

Следовательно, $R_{1,1} \cup R_{2,2} \supset \{a_1a_2, b_1b_2\}$, откуда следует утверждение леммы. Случай $\mathrm{Int}(G_{1,2}) \neq \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,1}) \neq \varnothing$ разбирается аналогично.

Пусть условия рассмотренных выше случаев не выполнены. Тогда не умаляя общности можно считать, что $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \mathrm{Int}(G_{1,2}) = \varnothing$, то есть, $\mathrm{Int}(F_1) = T_1$ (см. рисунок 2.3a). Из нормальности разреза S следует, что $|T_1| \geq \frac{k}{2}$.

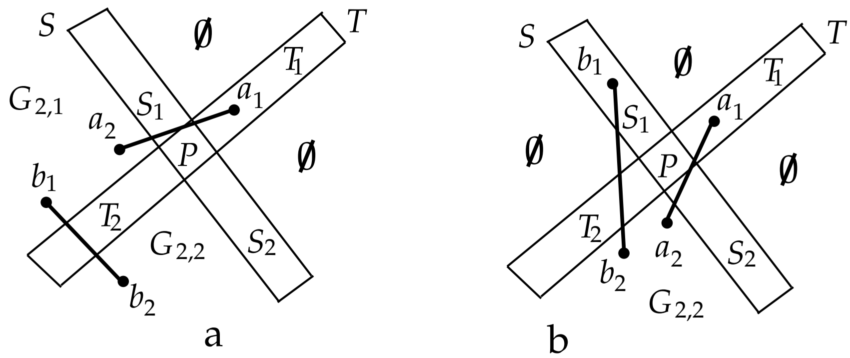


Рис. 2.3: Разбиение графа парой нормальных зависимых разрезов.

Так как $T = T_1 \cup T_2 \cup P \cup \{b_1b_2\}$, отсюда можно сделать вывод

$$|T_2 \cup P| \leq \frac{k}{2} - 1 \quad \text{и} \quad |R_{2,1}| + |R_{2,2}| \leq |S| + 2|T_2 \cup P \cup \{b_1b_2\}| \leq 2k. \quad (2.3)$$

Если $\mathrm{Int}(G_{2,1}) = \varnothing$ (см. рисунок 2.3b), то из нормальности разреза T мы имеем $\mathrm{Int}(H_1) = |S_1| \geq \frac{k}{2}$, а следовательно, $|S_2 \cup P| \leq \frac{k}{2} - 1$, откуда очевидно следует

$$|R_{2,2}| \leq |S_2| + |T_2| + |P| + |\{a_1a_2, b_1b_2\}| \leq k.$$

Если и $\mathrm{Int}(G_{2,2}) = \varnothing$, то $\mathrm{Int}(F_2) = S_2$, что противоречит нормальности разреза T. Значит, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$, но это возможно только при $|R_{2,2}| = k$, что, в частности, означает, что $R_{2,2} \supset \{a_1a_2, b_1b_2\}$. Тогда разрез $R_{2,2}$ нам подходит.

Остается случай, когда $\mathrm{Int}(G_{2,1}) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$. По неравенству (2.3) это означает, что $|R_{2,1}| = |R_{2,2}| = k$. Тогда оба разреза $R_{2,1}$ и $R_{2,2}$ содержат ребро b_1b_2 и $R_{2,1} \cup R_{2,2} \supset S \ni a_1a_2$. Следовательно, один из разрезов $R_{2,1}$ и $R_{2,2}$ содержит оба ребра b_1b_2 и a_1a_2, откуда следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{R}$ зависимы, причем $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ — различные рёбра из E_{k+1}, $R_{i,j} \ni b_1b_2$ и $|R_{i,j}| = k$. Тогда существует разрез $R \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющий следующим свойствам:*

1° $\mathrm{Part}(R) = \{G_{i,j}, U\}$, причём либо $U = \overline{G}_{i,j}$, либо $U = \overline{G}_{i,j} \cup \{a\}$, где a — конец ребра a_1a_2, лежащий в $G_{i,j}$;

2° R независим и с S, и с T.

Доказательство. Пусть $i = j = 1$. По построению $R_{1,1}$, один из концов ребра b_1b_2 лежит в $\mathrm{Int}(G_{1,1})$, пусть это b_1. Значит, $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \varnothing$ и по лемме 1.8 мы знаем, что $R_{1,1}$ — разрез, $\mathrm{Part}(R_{1,1}) = \{G_{1,1}, \overline{G}_{1,1}\}$. Если $a_1a_2 \notin R_{1,1}$, то $R_{1,1} \in \mathfrak{R}$ и разрез $R = R_{1,1}$ нам подходит.

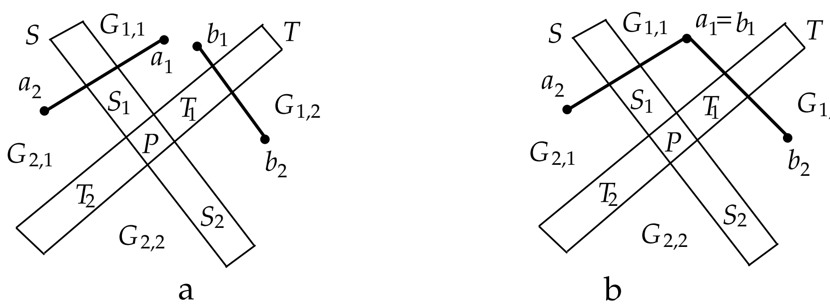


Рис. 2.4: Разбиение графа парой зависимых разрезов.

Пусть $a_1a_2 \in R_{1,1}$. По построению множества $R_{1,1}$ ребро a_1a_2 имеет конец в $\mathrm{Int}(G_{1,1})$, пусть это a_1. Рассмотрим множество R, полученное из $R_{1,1}$

заменой a_1a_2 на a_1. Если $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \{a_1\}$, то R — разрез,

$$\mathrm{Part}(R) = \{G_{1,1}, \overline{G}_{1,1} \cup \{a_1\}\}$$

(см. рисунок 2.4a), откуда очевидно следует, что этот разрез независим с S и T, а стало быть, он нам подходит.

Пусть $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \{a_1\}$. Тогда, в частности, $a_1 = b_1$ (см. рисунок 2.4b). Кроме a_2 и b_2 эта вершина может быть смежна только с вершинами из $R_{1,1}$. Тогда из $d_G(a_1) \geq k+1$ следует, что $|V(R_{1,1})| \geq k-1$. Но это означает, что $|R_{1,1}| \geq k+1$, противоречие. □

Лемма 2.6. *Пусть G — минимальный k-связный граф, а множество $E \subset E_{k+1}$ таково, что все разрезы из $\mathfrak{R}$, содержащие ребра из E — нормальные. Тогда существует множество*

$$\mathfrak{S} = \{S_e\}_{e\in E} \subset \mathfrak{R}, \quad \text{где} \quad e \in S_e,$$

состоящее из попарно независимых разрезов.

Доказательство. Пронумеруем $f_1, \ldots, f_m$ ребра множества E. Пусть

$$\mathfrak{S}' = \{S_1, \ldots, S_{\ell-1}\} \subset \mathfrak{R}$$

— множество попарно независимых разрезов, причем $f_i \in S_i$.

Пусть $f_\ell \in T \in \mathfrak{R}$. Докажем, что можно изменить разрез T так, чтобы он стал независимым со всеми разрезами из $\mathfrak{S}'$. Доказательство будет индукцией по $|\mathfrak{S}'|$. База для случая $|\mathfrak{S}'| = 0$ очевидна.

Докажем индукционный переход. Пусть разрез T независим с разрезами S_1, …, S_{i-1}, но зависим с S_i. Введем обозначения

$$\mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}, \quad \mathrm{Part}(S_i) = \{F_1, F_2\}, \quad G_{x,y} = F_x \cap H_y.$$

Так как разрезы S_i и T нормальны, по леммам 2.4 и 2.5 существует такой разрез $R \ni f_\ell$, что одна из частей $\mathrm{Part}(R)$ — это $G_{\alpha,\beta}$, а другая часть U — либо $\overline{G}_{\alpha,\beta}$, либо $\overline{G}_{\alpha,\beta} \cup \{a\}$, где a — конец ребра $f_\ell = ab$, лежащий в $G_{\alpha,\beta}$.

Мы хотим доказать, что R независим с произвольным разрезом $S_j \in \mathfrak{S}'$. Пусть $\mathrm{Part}(S_j) = \{D_1, D_2\}$. Так как разрезы S_i и S_j независимы, разрезы T и S_j независимы, а разрезы T и S_i зависимы, по лемме 1.9 можно считать, что

$$F_1 \supset D_2, \quad F_2 \subset D_1, \quad H_1 \supset D_2, \quad H_2 \subset D_1. \tag{2.4}$$

Разберем несколько случаев.

1. $\alpha = 2$.

Тогда $G_{2,\beta} \subset F_2 \subset D_1$ и $U \supset F_1 \supset D_2$ (см. рисунок 2.5a), то есть, разрезы R и S_j независимы.

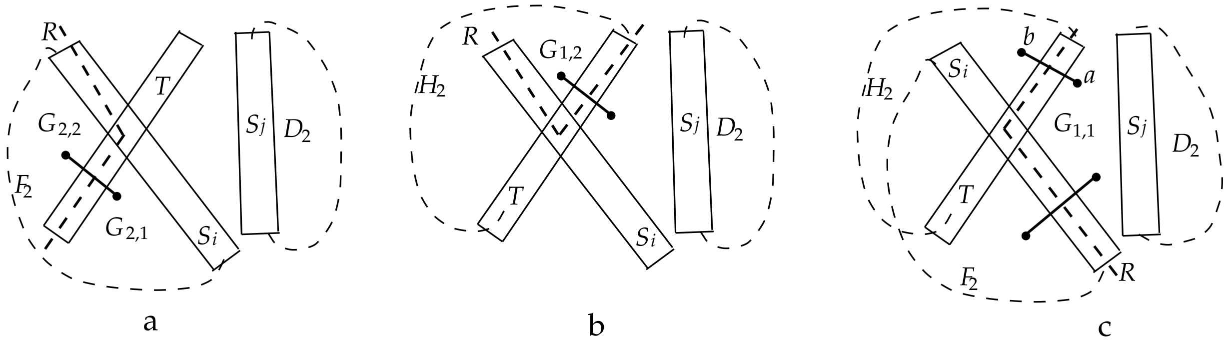


Рис. 2.5: Разрезы S_i, S_j и T.

2. $\alpha = 1$. Разберем два подслучая.

2.1. $\beta = 2$.

Тогда $G_{\alpha,\beta} = G_{1,2} \subset H_2 \subset D_1$ и $U \supset H_1 \supset D_2$ (см. рисунок 2.5b), что означает независимость разрезов S_j и R.

2.2. $\beta = 1$.

В силу (2.4) мы имеем $D_1 \supset H_2 \cup F_2 = \overline{G}_{1,1}$ (см. рисунок 2.5c). Так как разрезы T и S_j независимы и не имеют общих рёбер, по лемме 1.10 мы имеем $D_1 \supset W(T) \ni a$. Значит,

$$D_1 \supset \overline{G}_{1,1} \cup \{a\} \supset U.$$

Из $D_2 \subset F_1$ и $D_2 \subset H_1$ следует, что

$$D_2 \subset H_1 \setminus \mathrm{Int}(F_2) = G_{1,1}.$$

Таким образом, мы проверили независимость разрезов S_j и R. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть G — минимальный k-связный граф, а $P = a_1 \dots a_n$ — простой путь, все вершины которого принадлежат множеству V_{k+1}. Предположим, что существуют такие попарно независимые разрезы $S_1, \dots, S_{n-1} \in \mathfrak{R}$, что*

$$a_i a_{i+1} \in S_i, \quad \mathrm{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\}, \qquad \text{причем} \quad a_i \in \mathrm{Int}(A_i) \quad \text{и} \quad a_{i+1} \in \mathrm{Int}(B_{i+1}).$$

Тогда $B_2 \cup \{y_1\} \supset \mathrm{N}_G(a_n)$.

Доказательство. При $n = 2$ это утверждение очевидно. Предположим, что $n \geq 3$. Докажем, что $B_i \supset B_{i+1}$ при $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Так как разрезы S_{i-1} и S_i независимы, $a_i \in \mathrm{Int}(B_i)$ и $a_i a_{i+1} \notin S_{i-1}$, мы имеем $a_{i+1} \in B_i$. Значит, ни одна из частей $\mathrm{Part}(S_i)$ не может содержать $B_i \ni a_i, a_{i+1}$. В силу независимости разрезов S_{i-1} и S_i, тогда B_i содержит одну из частей $\mathrm{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\}$.

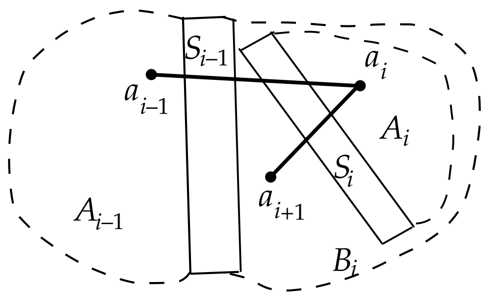


Рис. 2.6: Разрезы S_{i-1} и S_i. Случай, когда $B_i \supset A_i$.

Предположим, что $B_i \supset A_i$ (см. рисунок 2.6). Тогда из $a_{i-1} \notin B_i$ следует $a_{i-1} \notin A_i$. Однако, вершина a_{i-1} смежна с вершиной $a_i \in \mathrm{Int}(A_i)$, что невозможно. Следовательно, $B_i \supset B_{i+1}$.

Из доказанного следует, что $B_2 \supset B_n$. Так как $a_n \in \mathrm{Int}(B_n)$, мы имеем $\mathrm{N}_G(a_n) \subset B_n \subset B_2$. $\square$

Лемма 2.8. *Пусть G — минимальный k-связный граф, $E \subset E_{k+1}$, а множество*

$$\mathfrak{S} = \{S_e\}_{e \in E} \subset \mathfrak{R}, \quad \text{где} \quad e \in S_e,$$

состоит из попарно независимых разрезов. Пусть R — граница разреза $S_e \in \mathfrak{S}$. Тогда любой простой путь с концами из R содержит ребро не из множества E.

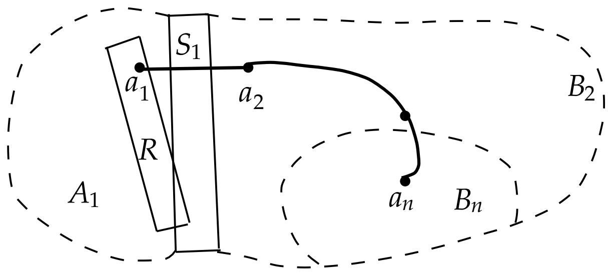


Рис. 2.7: Путь по ребрам из E.

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим кратчайший путь $a_1a_2\ldots a_n$ по рёбрам из E, концы которого a_1 и a_n лежат в R. Если путь P содержит всего одно ребро a_1a_2, то $a_1a_2 \neq e$, так как граница R разреза $S_e \ni e$ содержит ровно одну вершину ребра e. Если же $n \geq 3$ и $e = a_1a_2$, то перенумеруем вершины пути P в обратном порядке. Таким образом, в любом случае мы добьемся того, что $e \neq a_1a_2$. Пусть

$$S_i = S_{a_ia_{i+1}}, \quad \mathrm{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\}, \text{ где } a_i \in \mathrm{Int}(A_i) \text{ и } a_{i+1} \in \mathrm{Int}(B_{i+1}).$$

Так как разрезы S_e и S_1 независимы и не имеют общего ребра, по лемме 1.10 одна из частей $U \in \mathrm{Part}(S_1)$ содержит $W(S_e)$. Значит, $U \supset R \ni a_1$, откуда следует, что $U = A_1$. По лемме 2.7 мы имеем $\mathrm{N}_G(a_n) \subset B_2 \cup \{y_1\}$ (см. рисунок 2.7).

По замечанию 1.6 мы знаем, что R является k-вершинным разделяющим множеством графа G. Из $R \subset A_1$ следует, что R не разделяет $B_2 \cup W(S_1)$. Значит, одна из компонент свяности M графа $G - R$ лежит в $\mathrm{Int}(A_1) \setminus \{y_1\}$. Из k-связности графа G следует, что вершина $a_n \in R$ должна иметь смежную вершину в $M \subset \mathrm{Int}(A_1)$, что противоречит доказанному выше. $\square$

2.1.4 Кривые разрезы

Напомним, что c — это количество компонент связности графа G_{k+1}, а e_k — количество рёбер, оба конца которых имеют степень k.

Лемма 2.9. *Пусть G — минимальный k-связный граф, причем в множестве $\mathfrak{R}$ есть кривые разрезы. Тогда $e_k + c \geq k+1$.*

Доказательство. Везде в доказательстве через S_e мы обозначаем разрез из $\mathfrak{R}$, содержащий ребро $e \in E_{k+1}$. (Для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ такой разрез существует, причем, возможно, не один.)

1. *Пусть $e = a_1a_2 \in E_{k+1}$, а разрез S_e — кривой, причем*

$$a_1 \in A_1 \in \mathrm{Part}(S_e) \quad \text{и} \quad |\mathrm{Int}(A_1)| < \frac{k}{2}.$$

Пусть $U \ni a_1, a_2$ — компонента связности графа G_{k+1}, а $T = G_{k+1}(U)$. Тогда T — дерево по следствию 2.1. Предположим, что $d_T(a_1) > 1$. Тогда в дереве T существует путь от a_1 до висячей вершины a, не проходящий по ребру a_1a_2. Пусть $a'a$ — последнее ребро этого пути, $S_{aa'} \in \mathfrak{R}$, причем $a \in A \in \mathrm{Part}(S_{aa'})$. Тогда по лемме 2.2 мы имеем $\mathrm{Int}(A) < \mathrm{Int}(A_1) < \frac{k}{2}$. В частности, разрез $S_{aa'}$ — также кривой.

2. *Пусть a_1 — висячая вершина дерева T,*

$$|\mathrm{Int}(A_1)| = p < \frac{k}{2}, \quad S = V(S_{a_1a_2}).$$

Отметим, что $|S| = k-1$. Пусть

$$M = \mathrm{Int}(A_1) \cap V_k, \quad m = |M|$$

(см. рисунок 2.8a). Очевидно, вершина a_1 не может быть смежна с вершинами из $V_{k+1} \cap A_1$, следовательно, вершина a_1 смежна не более чем с m

вершинами из $\mathrm{Int}(A_1)$. Из $d_G(a_1) = k+1$ следует, что тогда a_1 несмежна не более чем с $m-1$ вершинами из S. Все смежные с a_1 вершины из S имеют степень k. Таким образом,

$$|\mathrm{Int}(A_1) \cap V_{k+1}| = p - m, \quad |S \cap V_{k+1}| \le m-1 \quad \text{и} \quad |A_1 \cap V_{k+1}| \le p-1.$$

Разберем два случая.

2.1. $m \ge 2$.

Вершина множества M может быть смежна только с вершинами из A_1. Поэтому, каждая вершина множества M смежна не более чем с $p-1$ вершинами из V_{k+1}, а значит, хотя бы с $k-p+1$ вершинами из V_k. Просуммировав рёбра, исходящие из всех вершин M к вершинам из V_k, мы получим хотя бы $m(k-p+1)$. Однако, рёбра между вершинами множества M (которых не более чем $\frac{m(m-1)}{2}$) в этой сумме посчитаны дважды, поэтому можно написать, что

$$e_k \ge m(k-p+1) - \frac{m(m-1)}{2} \ge k+3+(m-2)(k-p+1) - \frac{m(m-1)}{2} \ge k+2, \tag{2.5}$$

что и требовалось доказать. (При $m=2$ неравенство (2.5) очевидно, а при $m \ge 3$ мы воспользовались тем, что $k-p+1 \ge p \ge m$ и $m-2 \ge \frac{m-1}{2}$, а следовательно, правая часть неравенства (2.5) не менее чем $k+3$.)

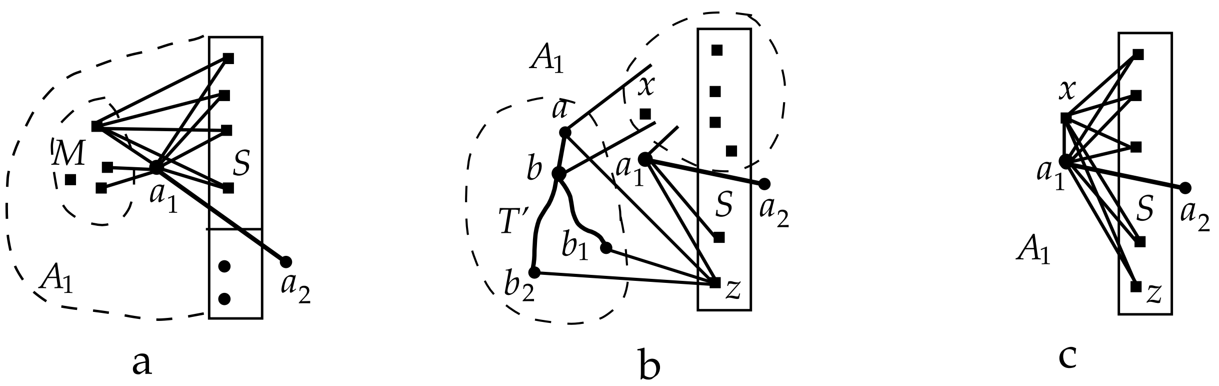


Рис. 2.8: Кривой разрез $S_{a_1a_2}$ и часть A_1. На этом и следующих рисунках кружочки обозначают вершины из V_{k+1}, а квадратики — вершины из V_k.

2.2. $m = 1$.

Пусть $M = \{x\}$. Понятно, что в этом случае a_1 смежна ровно с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A_1)$ (с вершиной x), а значит, a_1 смежна со всеми вершинами из S. Следовательно, $S \subset V_k$.

Предположим, что $Y = (\mathrm{Int}(A_1) \setminus \{a_1\}) \cap V_{k+1} \neq \varnothing$. По доказанному выше, тогда Y — одна или несколько компонент связности графа G_{k+1}. Пусть $T' = G_{k+1}(Y)$. По следствию 2.2, граф T' — лес.

Пусть $a \in Y$, $d_{T'}(a) \leq 1$. Тогда из $d_G(a) \geq k+1$ следует, что $d_{T'}(a) = 1$, причем a должна быть смежна с x и со всеми $k-1$ вершинами из S. Таким образом, лес T' не содержит изолированных вершин.

Пусть a — висячая вершина T', смежная в T' с вершиной b степени $d_{T'}(b) = \ell$ (см. рисунок 2.8b). Тогда в T' существуют $\ell - 1$ непересекающиеся по внутренним вершинам пути $P_1, \ldots, P_{\ell-1}$ от b до отличных от a висячих вершин $b_1, \ldots, b_{\ell-1}$ леса T'.

Рассмотрим разрез $S_{ab} \in \mathfrak{R}$. Отметим, что вершина b смежна хотя бы с $k - \ell + 1$ вершинами множества $S \cup \{x\}$, и все эти вершины должны быть в S_{ab}. Разрез S_{ab} содержит $k - 1$ вершину, а значит, не содержит некоторую вершину $z \in S \cup \{x\}$.

Как доказано выше, вершина a и каждая из висячих вершин $b_1, \ldots, b_{\ell-1}$ смежна с z, а значит, разделяющий a и b разрез S_{ab} должен содержать по вершине каждого из путей $P_1, \ldots, P_{\ell-1}$. Но тогда S_{ab} содержит хотя бы k вершин, что не так. Противоречие.

Значит, $\mathrm{Int}(A_1) = \{a_1, x\}$ (см. рисунок 2.8c). В этом случае мы имеем $e_k \geq k - 1$ (столько рёбер ведет от x до вершин из S). Если утверждение леммы не выполнено, то других рёбер в E_k нет, а граф G_{k+1} имеет одну компоненту связности, то есть, G_{k+1} — дерево.

Остается проанализировать последний случай. В этом случае все рёбра из E_k соединяют вершину $x \in \mathrm{Int}(A_1)$ с вершинами множества S. Отметим, что в $\mathrm{N}_G(x)$ нет отличных от a_1 вершин из V_{k+1}.

3. *Докажем, что все рёбра графа G_{k+1}, входящие в кривые разрезы — это рёбра некоторого простого пути $Q = a_1a_2\dots a_n$, причем $n \le \frac{k-1}{2}$, а все внутренние вершины этого пути имеют степень 2 в графе G_{k+1}.* Пусть $c_1c_2 \in E(G_{k+1})$, $S_{c_1c_2} \in \mathfrak{R}$ — кривой разрез,

$$c_1 \in C_1 \in \mathrm{Part}(S_{c_1c_2}) \quad \text{и} \quad |\mathrm{Int}(C_1)| < \frac{k}{2}.$$

Рассмотрим любой путь в графе G_{k+1} от c_1 до некоторой висячей вершины a'_1, не проходящий через c_2 (см. рисунок 2.9a). Пусть $a'_2a'_1$ — последнее ребро этого пути,

$$S_{a'_1a'_2} \in \mathfrak{R}, \quad a'_1 \in \mathrm{Int}(A'_1) \in \mathrm{Part}(S_{a'_1a'_2}).$$

Тогда по лемме 2.2 мы имеем $|\mathrm{Int}(A'_1)| < |\mathrm{Int}(C_1)| < \frac{k}{2}$.

Пусть $a'_1 \neq a_1$. Проведем рассуждения, аналогичные сделанному в пунктах 1 и 2, для части A'_1. Мы найдем не менее чем $k-1$ ребер из E_k в части A'_1. Мы рассматриваем случай, когда $e_k = k-1$. Поэтому, в части A'_1 ровно $k-1$ ребро из E_k, но тогда все эти рёбра инцидентны смежной с a'_1 вершине x'. Очевидно, $x' \neq x$. Тогда E_k содержит хотя бы k рёбер: это $k-1$ ребер, инцидентных вершине x и хотя бы одно отличное от них ребро, инцидентное x'. В этом случае утверждение леммы доказано.

Сказанное выше означает, что все рёбра графа G_{k+1}, входящие в кривые разрезы — это рёбра некоторого простого пути $Q = a_1a_2\dots a_n$, причем все внутренние вершины этого пути имеют степень 2 в графе G_{k+1}. Пусть

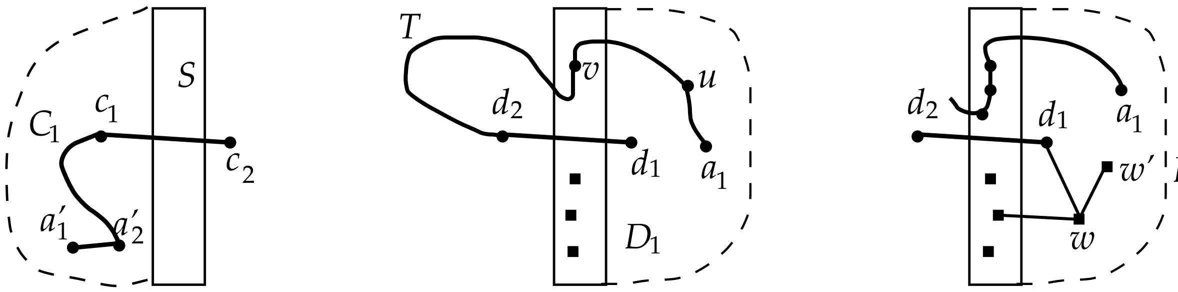
$$a_ia_{i+1} \in S_i \in \mathfrak{R}, \quad a_i \in A_i \in \mathrm{Part}(S_i).$$

По лемме 2.2, тогда

$$2 = \mathrm{Int}(A_1) < \mathrm{Int}(A_2) < \dots < \mathrm{Int}(A_{n-1}) \le \frac{k-1}{2}.$$

Следовательно, $n \le \frac{k-1}{2}$.

4. *Пусть E — множество всех рёбер графа G_{k+1}, кроме рёбер пути Q.* Рассмотрим два случая.



a b c

Рис. 2.9: Путь $a_1 \dots a_n$ и кривые разрезы.

4.1 $E \neq \varnothing$**.**

По лемме 2.6 можно выбрать попарно независимые разрезы $S_e \in \mathfrak{R}$ для всех рёбер $e \in E$. Пусть $d_1d_2 \in E(G_{k+1})$, причем d_1 — отличная от a_1 висячая вершина дерева G_{k+1}, а $d_1 \in D_1 \in \mathrm{Part}(S_{d_1d_2})$.

Предположим, что $v \in S_{d_1d_2} \cap V_{k+1}$ (см. рисунок 2.9b). По лемме 2.8, путь от v до d_2 по дереву G_{k+1} должен содержать хотя бы одно ребро пути Q. Это означает, что $v \in \{a_1, \dots, a_n\}$ и хотя бы одна из вершин $a_1, \dots, a_n$ лежит в $\mathrm{Int}(D_2)$.

Пусть $u \in \mathrm{Int}(D_1) \cap V_{k+1}$. В этом случае путь от u до d_2 по дереву G_{k+1} должен проходить через вершину разреза $S_{d_1d_2}$, а тогда, как показано выше, этот путь содержит ребро пути Q. Следовательно, $u \in \{a_1, \dots, a_n\}$ и хотя бы одна из вершин $a_1, \dots, a_n$ лежит в $\mathrm{Int}(D_2)$.

Таким образом, все вершины из $D_1 \cap V_{k+1}$, кроме d_1, принадлежат множеству $\{a_1, \dots, a_n\}$, но хотя бы одна из вершин пути Q не лежит в D_1. Следовательно,

$$|V_{k+1} \cap D_1| \leq n \leq \frac{k-1}{2}. \tag{2.6}$$

4.2. $E = \varnothing$.

В этом случае $G_{k+1} = Q$, а a_n — висячая вершина графа G_{k+1}. Пусть $d_1 = a_n$, а $D_1 \in \mathrm{Part}(S_{n-1})$ — часть, содержащая a_n. Так как $a_{n-1} \notin D_1$, и в этом случае выполняется неравенство (2.6).

Продолжим рассуждения для обоих случаев. Вершина $d_1 \in \mathrm{Int}(D_1)$ — висячая в дереве G_{k+1}, и потому смежна с k вершинами из $V_k \cap D_1$, среди которых есть вершина $w \in \mathrm{Int}(D_1)$ (см. рисунок 2.9c). Поскольку $d_1 \neq a_1$, то $x \neq w$. Вершина w смежна с k вершинами из D_1. Из неравенства (2.6) следует, что в $\mathrm{N}_G(w)$ есть хотя бы

$$k - |V_{k+1} \cap D_1| \geq k - n \geq \frac{k+1}{2} > 1$$

вершин степени k, среди которых можно найти вершину $w' \neq x$ (см. рисунок 2.9c). Тогда ребро ww' дает нам $e_k \geq k$ и завершает доказательство леммы. □

2.1.5 Доказательство теоремы 2.1

Мы считаем, что $k > 1$, иначе доказательство теоремы очевидно. Рассмотрим несколько случаев.

1. $E_{k+1} = \varnothing$.

Тогда $v_{k+1} = c \leq k$. Если $v_{k+1} = k$, то $e_k = 0$ и наш граф представляет собой k попарно несмежных вершин степени $k+1$, с каждой из которых смежны $k+1$ попарно несмежных вершин степени k. Это граф $K_{k,k+1}$, который равен $G_{k,T}$ для одновершинного дерева T.

Пусть $v_{k+1} < k$. Тогда любая вершина $x \in V_k$ смежна хотя бы с $k - v_{k+1}$ вершинами степени k, откуда легко понять, что

$$e_k \geq \frac{v_k(k - v_{k+1})}{2} > k - v_{k+1},$$

а это противоречит следствию 2.2. (Мы воспользовались тем, что $v_k \geq k+1 > 2$.)

2. *Далее мы считаем, что* $E_{k+1} \neq \varnothing$. Из леммы 2.9 и следствия 2.2 понятно, что достаточно рассмотреть случай, когда рёбра из E_{k+1} не входят в кривые разрезы. Тогда по лемме 2.6 для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ мы построим разрез $S_e \ni e$ так, чтобы эти разрезы были попарно независимы. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество построенных разрезов.

Введем необходимые обозначения. Пусть

$$\mathcal{A} = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \mathrm{Part}(S),$$

а $A_1, \ldots, A_n$ — все минимальные по включению части из $\mathcal{A}$. Очевидно, $n \geq 2$. Пусть $S_i \in \mathfrak{S}$ — отделяющий часть A_i разрез из $\mathfrak{S}$,

$$R_i = A_i \cap W(S_i), \quad p_i = |R_i \cap V_k|, \quad B_i = A_i \setminus R_i.$$

Пусть $a_i \in \mathrm{Int}(A_i)$ — конец ребра из E_{k+1}, входящего в разрез S_i (см. рисунок 2.10a). Тогда $\{a_i\} = \mathrm{Int}(A_i) \cap R_i$.

Изучим свойства частей A_i.

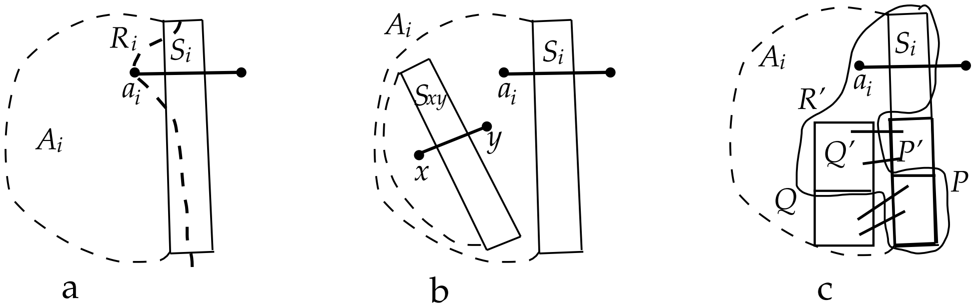


Рис. 2.10: Часть A_i.

Лемма 2.10. *Выполняются следующие утверждения.*

1) *$B_i \neq \varnothing$, множество R_i отделяет B_i от остальных вершин графа. Каждая вершина из R_i смежна хотя бы с одной вершиной из B_i.*

2) *Если $x \in B_i \cap V_{k+1}$, то $\{x\}$ — компонента связности графа G_{k+1}.*

3) *Пусть c_i — это количество лежащих в B_i одновершинных компонент связности графа G_{k+1}, а $e_{k,i}$ — это количество инцидентных вершинам из B_i рёбер из E_k. Тогда $c_i + e_{k,i} \geq p_i$.*

Доказательство. 1) Так как разрез S_i нормален, $|\mathrm{Int}(A_i)| > 1$, а значит, $B_i = \mathrm{Int}(A_i) \setminus \{a_i\} \neq \varnothing$. Тогда R_i отделяет B_i от остальных вершин графа G. Из $|R_i| = k$ и k-связности графа G следует, что каждая вершина множества R_i смежна хотя бы с одной вершиной из B_i.

2) Предположим, что $y \in V_{k+1}$ и $xy \in E(G)$. Тогда $y \in A_i$, $xy \in E_{k+1}$. Рассмотрим разрез $S_{xy} \in \mathfrak{S}$ (см. рисунок 2.10b). Из независимости разрезов S_i и S_{xy} и минимальности части A_i следует, что одна из частей $\mathrm{Part}(S_{xy})$ должна содержать A_i, что, очевидно, невозможно: вершины $x, y \in A_i$ лежат в разных частях $\mathrm{Part}(S_{xy})$. Противоречие завершает доказательство.

3) Пусть P — множество всех входящих в R_i вершин степени k, а Q — множество всех смежных с P вершин из B_i. Пусть $V_{k+1} \cap Q = Q'$, а P' — множество всех вершин из P, смежных в $\mathrm{Int}(A_i)$ только с вершинами из Q'. Напомним, что $|P| = p_i$.

Тогда $c_i \geq |Q'|$ по пункту 2. Каждая вершина из $P \setminus P'$ смежна с вершиной степени k из множества Q, откуда $e_{k,i} \geq |P| - |P'|$. Если $|P'| \leq |Q'|$, то мы получаем, что $e_{k,i} + c_i \geq p_i$, что нам и нужно.

Остается случай, когда $|P'| > |Q'|$. Предположим, что $B_i \neq Q'$. Тогда множество $R' = (R \setminus P') \cup Q'$ состоит менее чем из k вершин и отделяет непустое множество $B_i \setminus Q'$ от остальных вершин графа G (см. рисунок 2.10c). В k-связном графе такое невозможно. Следовательно,

$$Q' = B_i \neq \varnothing.$$

Как мы знаем из пункта 2, каждая вершина из Q' может быть смежна только с вершинами из $A_i \cap V_k$, а это в нашем случае только вершины множества P. Но $|P| < k$, противоречие. □

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть

$$p_1 = \min(p_1, \dots p_n).$$

Тогда по лемме 2.8 вершины из $V_{k+1} \cap (\cup_{i=1}^n R_i)$ входят хотя бы в $k - p_1$ различных компонент связности графа G_{k+1}. Если $p_1 > 0$, то в силу леммы 2.10 мы имеем

$$c + e_k \geq (k - p_1) + \sum_{j=1}^{n} p_j \geq k - p_1 + 2p_1 \geq k + 1,$$

что противоречит следствию 2.2.

Остается последний, самый интересный случай $p_1 = 0$. В этом случае по лемме 2.8 все k вершин из R_1 принадлежат разным компонентам связности графа G_{k+1}, откуда следует, что $c = k$. Пусть $U_1, \dots, U_k$ — компоненты связности графа G_{k+1}, тогда $T_i = G(U_i)$ — деревья. По следствию 2.2 мы имеем $e_k = 0$, то есть, никакие две вершины степени k в графе G не смежны.

Мы будем предполагать, что для любого меньшего чем G экстремального минимального k-связного графа утверждение теоремы доказано.

По лемме 2.8 каждое из деревьев $T_1, \dots, T_k$ содержит ровно по одной вершине множества R_1. Пусть $R_1 = \{b_1, \dots, b_k\}$, причем $b_i \in V(T_i)$. Одна из этих вершин совпадает с a_1 — концом входящего в разрез S_1 ребра. Будем считать, что $b_1 = a_1$. Предположим, что b_i смежна с вершиной $x \in B_1 \cap V_{k+1}$. Тогда рассмотрим разрез $S_{xb_i} \in \mathfrak{S}$. Этот разрез по построению независим с S_1. Пусть $A \in \mathrm{Part}(S_{xb_i})$ — часть, содержащая x, но не содержащая b_i (см. рисунок 2.11a). Тогда $A \subsetneq A_1$ — противоречие с максимальностью части A_1.

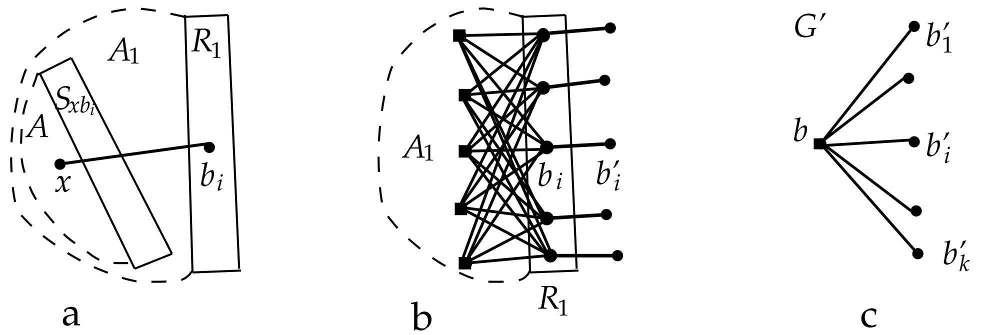


Рис. 2.11: Часть A_1 и граф G'.

Пусть $b_1b'_1 \in S_1$ и $N_1 = \mathrm{N}_G(b_1) \setminus \{b'_1\}$. Так как $b_1 \in \mathrm{Int}(A_1)$, мы имеем $N_1 \subset A_1$. Из доказанного выше ясно, что $N_1 \subset V_k$. Вместе с $R_1 \subset V_{k+1}$ это означает, что $N_1 \subset B_1$.

Так как $e_k = 0$, каждая вершина $x \in N_1$ должна быть смежна с k

вершинами из V_{k+1}, и все эти вершины лежат в части A_1. Из $c = k$ и доказанного выше следует, что $V_{k+1} \cap A_1 = R_1$, а значит,

$$\mathrm{N}_G(x) = R_1 = \{b_1, \dots, b_k\}.$$

Теперь понятно, что $B_1 = N_1$ и это множество состоит из k вершин степени k, каждая из которых смежна с вершинами b_1, …, b_k (см. рисунок 2.11b).

По замечанию 2.2, все вершины $b_1, \dots, b_k$ имеют в графе G степень $k+1$, а значит, для всех $i \in \{1, \dots, k\}$ вершина b_i — висячая в дереве T_i. Пусть $b_i b_i' \in E(T_i)$ — единственное инцидентное b_i ребро дерева T_i. Тогда все вершины b_1',…, b_k' различны.

Построим новый граф G', добавив к графу $G - R_1 - B_1$ новую вершину b степени k с $\mathrm{N}_{G'}(b) = \{b_1', \dots, b_k'\}$ (см. рисунок 2.11c). Пусть $T_i' = T_i - b_i$. Отметим, что

$$v_k(G') = v_k(G) - k + 1, \quad v(G') = v(G) - 2k + 1. \tag{2.7}$$

Лемма 2.11. *Пусть $x \in V_k(G)$. Тогда $\mathrm{N}_G(x)$ содержит по одной вершине каждого из деревьев T_1, …, T_k.*

Доказательство. Пусть x смежна с вершинами y_1 и y_m одного дерева T_ℓ, а $y_1 y_2 \dots y_m$ — путь в T_ℓ между ними. Пусть

$$S_{y_1 y_2} \in \mathfrak{S}, \quad \mathrm{Part}(S_{y_1 y_2}) = \{Y_1, Y_2\}, \quad Y_1 \ni y_1 \quad \text{и} \quad Y_2 \ni y_2.$$

По лемме 2.7 мы знаем, что $\mathrm{N}_G(y_m) \subset Y_2 \cup \{y_1\}$, откуда следует $x \in Y_2$. Поскольку $y_1 \in \mathrm{Int}(Y_1)$, мы имеем $x \in S_{y_1 y_2}$ (см. рисунок 2.12).

Разрез $S_{y_1 y_2}$ разделяет какие-то две минимальные части A_i и A_j, а их границы, как доказано выше, содержат по вершине каждого из деревьев T_1, …, T_k. Значит, и $S_{y_1 y_2}$ должен содержать по вершине каждого из этих деревьев, кроме T_ℓ, то есть, не может содержать вершину x, противоречие.

□

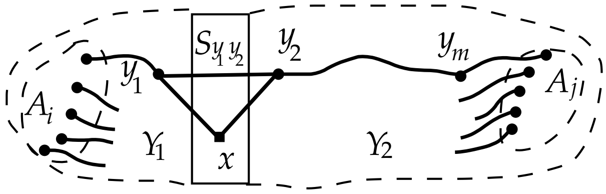


Рис. 2.12: Вершина x смежна с двумя вершинами одного дерева.

Лемма 2.12. *G' — минимальный k связный граф.*

Доказательство. 1. *Докажем, что граф G' — k-связный.*
Предположим, что G' имеет разделяющее множество Q из менее чем k вершин. Тогда Q не содержит ни одной вершины какого-то из деревьев $T'_1, \dots, T'_k$. Пусть $Q \cap V(T'_1) = \varnothing$, а U — компонента связности графа $G' - Q$, содержащая все вершины дерева T'_1.

Пусть $x \in V_k(G') \setminus Q$, $x \neq b$. Тогда по лемме 2.11 вершина x соединена ребром с деревом T'_1, следовательно, $x \in U$. Если $b \notin Q$, то вершина b также принадлежит U (так как смежна с T'_1).

Пусть $x \in V_{k+1}(G') \setminus Q$, $x \notin U$. Можно считать, что $x \in V(T'_2)$. Пусть $d_{T'_2}(x) = m$. Тогда в дереве T'_2 существуют m непересекающихся путей от x до различных висячих вершин $y_1, \dots, y_m$. Каждая вершина y_i смежна в графе G' с вершиной $z_i \in V_k(G')$. Кроме того, вершина x смежна в G' с вершинами $z_{m+1}, \dots, z_{k+1} \in V_k(G')$ (см. рисунок 2.13a). По лемме 2.11, все вершины $z_1, \dots, z_{k+1}$ различны. Выше доказано, что эти вершины принадлежат компоненте U. Значит, для каждого $i \in \{1, \dots, k+1\}$ множество Q должно содержать отличную от x вершину, лежащую на пути от x до z_i. Но тогда $|Q| \geq k+1$, противоречие.

Таким образом, $U \supset V(G'-Q)$, то есть, граф $G'-Q$ связен. Полученное противоречие завершает доказательство.

2. *Докажем, что граф G' — минимальный.*

Пусть $xy \in E(G')$. Если хотя бы один из концов этого ребра имеет в G' степень k, то граф $G' - xy$ не является k-связным. Остается рассмотреть

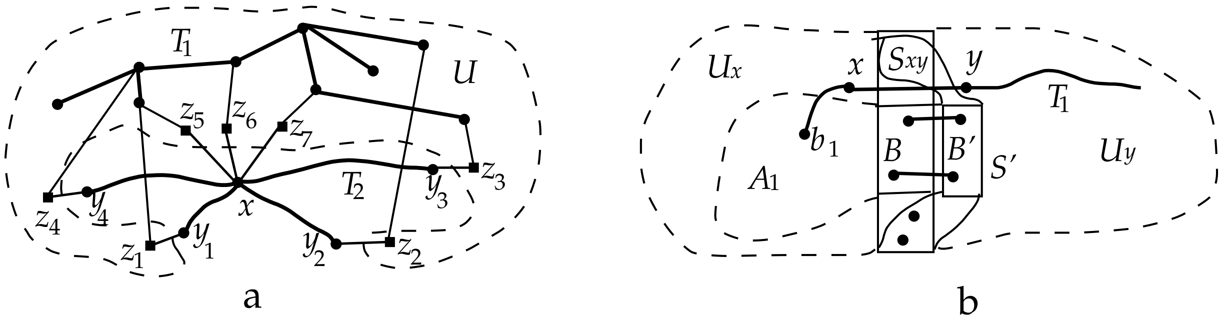


Рис. 2.13: Разрезы S_x и S'.

случай, когда $xy \in E_{k+1}(G')$.

Не умаляя общности положим, что $xy \in E(T'_1)$. Рассмотрим разрез $S_{xy} \in \mathfrak{S}$ графа G, он делит G на две части $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$ (см. рисунок 2.13b). Так как разрезы в $\mathfrak{S}$ независимы, а часть A_1 — минимальная по включению в $\mathcal{A}$, можно считать, что $A_1 \subset U_x$. Если $S_{xy} \cap R_1 = \varnothing$, то S_{xy} — разрез графа G', отделяющий U_y от $(U_x \setminus A_1) \cup \{b\}$.

Пусть

$$B = R_1 \cap S_{xy} \quad \text{и} \quad B' = \{b'_i \,:\, b_i \in B\}.$$

Отметим, что $b_1 \notin B$ по лемме 2.8. Для каждой вершины $b_i \in B$ в части U_y должна быть вершина, смежная с b_i, но такая вершина может быть только одна — это b'_i. Следовательно, $S' = (S_{xy} \setminus B) \cup B'$ — разрез графа G с

$$\mathrm{Part}(G; S') = \{U_x \cup B',\, U_y \setminus B\}.$$

Тогда S' — разрез графа G' с

$$\mathrm{Part}(G'; S') = \{(U_x \cup B' \cup \{b\}) \setminus A_1),\, U_y \setminus B\}.$$

Таким образом, граф G' — минимальный. □

Итак, рассмотрим минимальный k-связный граф G'. Из

$$v_k(G) = \frac{(k-1)v(G) + 2k}{2k-1}$$

и равенств (2.7) следует, что

$$v_k(G') = \frac{(k-1)v(G') + 2k}{2k-1}.$$

По индукционному предположению $G' = G_{k,T'}$ для некоторого дерева T' с $\Delta(T') \le k+1$. Тогда $T_1', \dots, T_k'$ — это копии дерева T'. Так как $b \in V_k(G')$ и $\mathrm{N}_{G'}(b) = \{b_1', \dots, b_k'\}$, по построению графа $G_{k,T'}$ в дереве T' есть вершина b', которая при изоморфизме копий соответствует вершинам b_1', …, b_k'. Напомним, что по замечанию 2.2 мы имеем $\Delta(G) = k+1$. Поэтому,

$$d_{T'}(b') = d_{T_1'}(b_1') = d_{T_1}(b_1) - 1 \le \Delta(G) - 1 = k. \tag{2.8}$$

Пусть дерево T получено из T' присоединением висячей вершины к b'. Из неравенства (2.8) следует, что $\Delta(T) \le k+1$. Вспомнив построение графа G' по графу G нетрудно понять, что $G = G_{k,T}$.

Теорема 2.1 полностью доказана.

2.1.6 Алгоритм построения экстремальных минимальных k-связных графов

В 1982 Оксли [30] представил алгоритм построения экстремальных минимальных двусвязных и трёхсвязных графов. Было доказано, что любой экстремальный минимальный двусвязный граф может быть получен из полного двудольного графа $K_{2,3}$ несколькими операциями замены вершины степени 2 на граф $K_{2,2}$, присоединенный к двум вершинам из окрестности заменяемой вершины. Там же доказано, что любой экстремальный минимальный трёхсвязный граф может быть получен из полного двудольного графа $K_{3,4}$ несколькими операциями замены вершины степени 3 на граф $K_{3,3}$. Из теоремы 2.1 несложно вывести аналогичный алгоритм построения всех экстремальных минимальных k-связных графов при произвольном k.

Следствие 2.3. *Пусть G — экстремальный минимальный k-связный граф. Тогда G может быть получен из $K_{k,k+1}$ серией операций замены вершины степени k на полный двудольный граф $K_{k,k}$ (в ходе операции* *добавляется паросочетание, соединяющее k вершин одной доли $K_{k,k}$ с вершинами, входящими в окрестность заменяемой вершины степени k).*

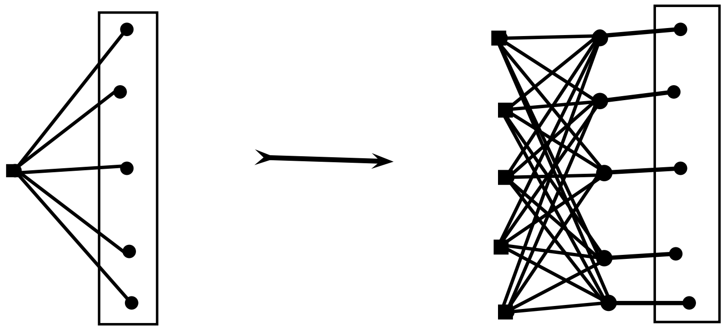


Рис. 2.14: Операция замены вершины степени k на граф $K_{k,k}$.

Доказательство. Отметим, что граф $K_{k,k+1}$ — это граф $G_{k,T}$ для одновершинного дерева T.

Пусть $G_{k,T}$ — экстремальный минимальный k-связный граф, $v(T) > 1$, a — висячая вершина дерева T, а $a_1, \dots, a_k$ — соответствующие a вершины в копиях дерева T, на которых построен граф $G_{k,T}$. Тогда по построению этого графа он содержит полный двудольный граф $K_{k,k}$, одна доля которого — это $\{a_1, \dots, a_k\}$, а другая — это k присоединенных к ним вершин степени k.

Пусть a'_i — единственная вершина дерева T_i, смежная с a_i. Произведем операцию, обратную к описанной в формулировке следствия: заменим найденный подграф $K_{k,k}$ на новую вершину b степени k, смежную с $a'_1, \dots, a'_k$. Легко видеть, что мы получили граф $G_{k,T'}$ где $T' = T - a$, то есть, из дерева T мы удалили висячую вершину. Понятно, что в результате таких операций дерево станет одновершинным, а значит, наш k-связный граф превратится в $K_{k,k+1}$. $\square$

2.2 Минимальные двусвязные графы

Мы более подробно изучим минимальные двусвязные графы при помощи конструкции *дерева разбиения* двусвзяного графа. Напомним, что минимальный двусвзяный граф G удовлетворяет неравенству

$$v_2(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}. \tag{2.9}$$

Определение 2.3. Через $\mathcal{GM}(n)$ обозначим множество всех минимальных двусвязных графов на n вершинах, в которых ровно $\lceil \frac{v(G)+4}{3} \rceil$ вершин степени 2.

Понятно, что равенство $v_2(G) = \frac{v(G)+4}{3}$ может достигаться только при $v(G) = 3m + 2$. Частным случаем теоремы 2.1 для $k = 2$ является следующее утверждение.

Следствие 2.4. *Множество $\mathcal{GM}(3m+2)$ состоит из графов вида $G_{2,T}$, где T — дерево с $v(T) = m$ и $\Delta(T) \leq 3$.*

Оксли в статье [30] исследовал структуру минимальных двусвязных графов из $\mathcal{GM}(n)$. Для n сравнимых с 0 и 1 по модулю 3 в [30] доказано, что графы из $\mathcal{GM}(n)$ можно получить несколькими операциями замены вершины степени 2 на граф $K_{2,2}$ из одного из начальных графов, перечисленных в работе. Начальные графы — это K_3, три графа несколько более сложной структуры и две бесконечные серии графов.

Мы дадим описание минимальных двусвязных графов из $\mathcal{GM}(n)$ с помощью графов вида $G_{2,T}$ и стягивания рёбер.

Теорема 2.2. *Пусть $m \geq 2$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *$\mathcal{GM}(3m+1)$ состоит из графов вида $G_{2,T} \cdot xy$, где T — дерево с $v(T) = m$ и $\Delta(T) = 3$, $x, y \in V_3(G_{2,T})$ и $xy \in E(G_{2,T})$.*

2) *Для любого графа $G \in \mathcal{GM}(3m+1)$ представление в виде $G_{2,T} \cdot xy$ из пункта 1 единственно с точностью до изоморфизма.*

Для описания графов из $\mathcal{GM}(3m)$ нам потребуется определить еще одну серию графов.

Определение 2.4. Пусть T — дерево с $\Delta(T) = 3$ и $a \in V(T)$ — вершина степени $d_T(a) = 3$. Пусть $\mathrm{N}_T(a) = \{x, y, z\}$. Рассмотрим граф $G_{2,T}$: пусть R_a, $R_x = \{x_1, x_2\}$, $R_y = \{y_1, y_2\}$, $R_z = \{z_1, z_2\}$ — его одиночные множества, соответствующие вершинам a, x, y, z. Положим

$$G_{T,a} = (G_{2,T} - R_a) + x_1y_2 + y_1z_2 + z_1x_2$$

(см. рисунок 2.15).

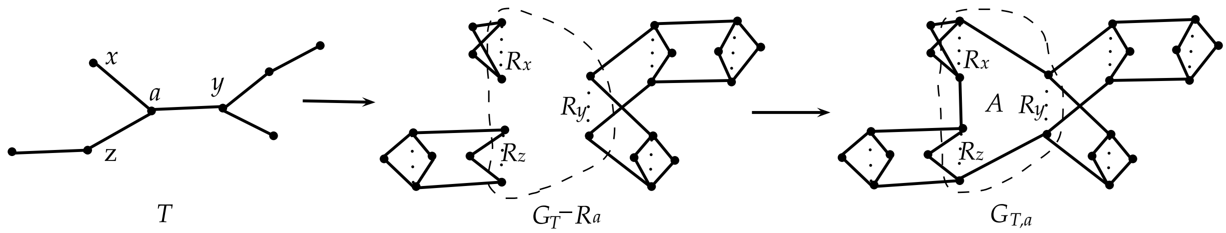


Рис. 2.15: Построение графа $G_{T,a}$.

Замечание 2.3. Пусть T — дерево с $v(T) = m$, $\Delta(T) = 3$.

1) Нетрудно понять, что граф $G_{T,a}$ двусвязен.

2) Вершине a соответствует часть-шестиугольник, остальные некрайние части графа $G_{T,a}$ — четырёхугольники, а все крайние части — треугольники. Одиночные множества графа $G_{T,a}$ соответствуют отличным от a вершинам дерева T, две вершины каждого одиночного множества несмежны. Значит, по теореме 1.6 граф $G_{T,a}$ минимален.

3) Отметим, что

$$v(G_{T,a}) = v(G_{2,T}) - 2 = 3m, \quad v_2(G_{T,a}) = v_2(G_{2,T}) = m + 2.$$

Поэтому, $G_{T,a} \in \mathcal{GM}(3m)$.

4) При построении графа $G_{T,a}$ можно несколькими способами соединить в графе $G_{2,T} - R_a$ вершины из R_x, R_y, R_z так, чтобы получилась

часть-шестиугольник. Однако несложно понять, что все полученные таким образом графы будут изоморфны друг другу.

Теорема 2.3. *Пусть $m \geq 2$. Тогда $\mathcal{GM}(3m)$ состоит из графов трёх перечисленных ниже видов.*

1° *Графы $G_{2,T} \cdot xy \cdot zt$, где T — дерево с $v(T) = m$ и $\Delta(T) \leq 3$, $xy, zt \in E(G_{2,T})$ — два различных ребра, концы которых имеют в графе $G_{2,T}$ степень 3 (у выбранных рёбер могут быть совпадающие концы).*

2° *Графы, полученные из графов вида $G_{2,T} - xy$ где T — дерево с $v(T) = m - 1$ и $\Delta(T) \leq 3$, а $xy \in E(G_{2,T})$, добавлением новой вершины степени 2, смежной с x и y.*

3° *Графы вида $G_{T,a}$, где T — дерево с $v(T) = m$ и $\Delta(T) = 3$, а $a \in V(T)$ — вершина степени 3.*

Далее мы докажем эти две теоремы. Начнем с нескольких технических лемм. Нам понадобится дерево разбиения двусвязного графа, определенное в предыдущей главе и ряд его свойств.

Лемма 2.13. *Пусть G — минимальный двусвязный граф, $S \in \mathfrak{O}(G)$ — одиночное множество, не смежное в $\mathrm{BT}(G)$ с блоками. Тогда*

$$d_{\mathrm{BT}(G)}(S) \geq 3.$$

Доказательство. Пусть это не так и $S = \{x, y\}$ смежно в $\mathrm{BT}(G)$ ровно с двумя частями — циклами B_1 и B_2. Выберем отличные от x, y вершины $z_1 \in B_1$ и $z_2 \in B_2$. *Докажем, что $R = \{z_1, z_2\}$ отделяет x от y в графе $G' - xy$ (а следовательно, и в графе G — подграфе $G' - xy$.)*

Предположим противное и рассмотрим кратчайший xy-путь P в графе $G' - xy - R$. Предположим, что он содержит вершину $v \notin B_1 \cup B_2$. Тогда существует множество $T \in \mathfrak{O}(G)$, отделяющее v от $B_1 \cup B_2$ (см. рисунок 2.16). Напомним, что множество S делит граф на две части, одна из которых содержит z_1, а другая — z_2. Поэтому, $T \neq S$. При движении от v

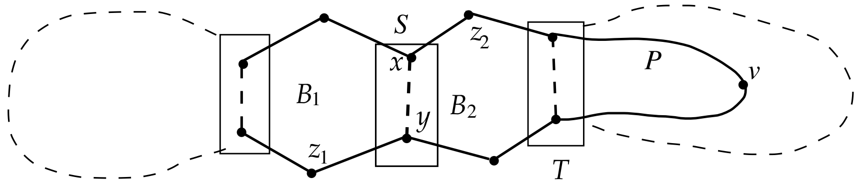


Рис. 2.16: Путь P в графе $G' - xy$.

в обе стороны по пути P мы попадем в вершины множества T, которые в графе $G' - xy - R$ смежны. Но тогда существует более короткий путь: можно заменить участок пути, содержащий v, на ребро между двумя вершинами множества T. Противоречие с выбором пути P показывает, что $V(P) \subset B_1 \cup B_2$, но такого xy-пути в $G' - xy - R$, очевидно, нет.

Значит, R разделяет в G множество $S = \{x, y\}$, то есть, S и R зависимы. Таким образом, множество S — неодиночное. Противоречие. $\square$

Следующая лемма характеризует минимальные двусвязные графы в терминах стягивания рёбер.

Лемма 2.14. *Пусть G — минимальный двусвязный граф, все части которого — циклы, $w \in V(G)$, $d_G(w) \geq 4$. Тогда существует минимальный двусвязный граф H и вершины $w_1, w_2 \in V_3(H)$, такие, что $G = H \cdot w_1w_2$ и при этом $w = w_1 \cdot w_2$.*

Доказательство. 1. По следствию 1.5, вершина w входит в одиночное множество $R = \{w, u\}$ графа G. Вершины w и u по теореме 1.6 несмежны. Следовательно, $N = N_G(w) \not\ni u$, а значит, все (хотя бы четыре) вершины из N — это внутренние вершины частей $\mathrm{Part}(R)$. По лемме 2.13 в $\mathrm{Part}(R)$ хотя бы три части. Из двусвязности графа G следует, что каждая из них содержит хотя бы по одной вершине из N. Значит, можно так разбить части $\mathrm{Part}(R)$ на две группы, чтобы части из каждой группы содержали хотя бы две вершины множества N. Пусть N_1 и N_2 — это множества вершин из N, содержащиеся в частях первой и второй групп соответственно. Тогда $N = N_1 \cup N_2$.

Мы изменим наш граф: заменим вершину w на две смежные вершины w_1 и w_2 (см. рисунок 2.17a). В новом графе H вершина w_1 будет смежна со всеми вершинами из N_1 и с w_2, а вершина w_2 будет смежна со всеми вершинами из N_2 и с w_1. Тогда $d_H(w_1) \geq 3$ и $d_H(w_2) \geq 3$. Очевидно,

$$G = H \cdot w_1w_2 \quad \text{и} \quad w = w_1 \cdot w_2.$$

2. Докажем, что граф H двусвязен.

Предположим, что это не так и рассмотрим классические блоки графа H. Их хотя бы два. Один из них — назовем его B — содержит ребро w_1w_2. При стягивании ребра w_1w_2 отличные от B блоки не меняются, но получается двусвязный граф G. Значит, у графа H всего два блока, причём блок B состоит из двух вершин w_1 и w_2 и ребра между ними. Тогда одна из вершин w_1 и w_2 должна иметь степень 1 в H, что не так. Полученное противоречие показывает, что граф H двусвязен.

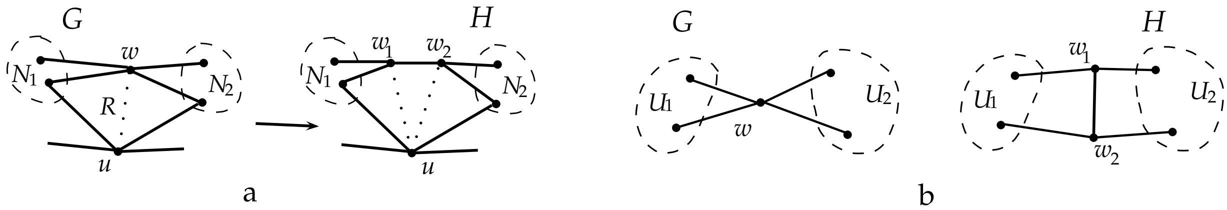


Рис. 2.17: Преобразование вершины w.

3. Докажем, что H — минимальный двусвязный граф.

Сначала докажем, что граф $H - w_1w_2$ недвусвязен: он имеет точку сочленения u. Действительно, в графе $H - \{w_1, w_2, u\} = G - \{u, w\}$ вершины из N_1 не связаны с вершинами из N_2. Добавив в этот граф вершину w_1 (не связанную с N_2) и вершину w_2 (не связанную с N_1) без ребра w_1w_2, мы не сделаем граф связным. В результате получится как раз несвязный граф $H - w_1w_2 - u$.

Пусть $e \neq w_1w_2$. Так как граф G минимален, в графе $G - e$ есть точка сочленения a. Если $a \neq w$, то w смежна только с одной частью разбиения $\mathrm{Part}(G - e; \{a\})$, поэтому a — точка сочленения и в $H - e$.

Пусть $a = w$, а $\mathrm{Part}(G - e; \{w\}) = \{U_1, \dots U_k\}$. Тогда граф $H - e$ будет двусвязным, если и только если обе вершины w_1 и w_2 смежны с каждой из частей $U_1, \dots, U_k$ (см. рисунок 2.17b). Но тогда граф $H - w_1w_2$ двусвязен, так как в этом графе существует $k \geq 2$ путей между w_1 и w_2: по каждой из частей $U_1, \dots, U_k$. Противоречие завершает доказательство. $\square$

Определение 2.5. Пусть G — минимальный двусвязный граф.

1) Обозначим через $V_2'(G)$ множество всех вершин степени 2, входящих в крайние части графа G.

2) Для части $A \in \mathrm{Part}(G)$ положим

$$s(A) = \begin{cases} |A|, & \text{если} \quad A \text{ — блок} \\ d_{\mathrm{BT}(G)}(A), & \text{если} \quad A \text{ — цикл.} \end{cases}$$

Лемма 2.15. *Пусть G — минимальный двусвязный граф, имеющий k некрайних частей $A_1, \dots, A_k$, а $H = G - V_2'(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф H — лес с*

$$c = \left(\sum_{i=1}^{k} s(A_i) \right) - 2k + 2 \tag{2.10}$$

компонентами связности.

2) *Для любого одиночного множества S две его вершины принадлежат разным компонентам связности H.*

Доказательство. Пронумеруем все вершины дерева $T = \mathrm{BT}(G)$ (как соответствующие частям, так и соответствующие одиночным множествам) $a_1, \dots, a_m$, таким образом, чтобы для всех ℓ граф $T(\{a_1, \dots, a_\ell\})$ был деревом, а a_ℓ — его висячей вершиной. Пусть некрайние части $\mathrm{Part}(G)$ в нумерации $A_1, \dots, A_k$ идут в том же порядке, как в нумерации всех вершин дерева T. Положим

$$W_\ell = \bigcup_{i=1}^{\ell} A_i, \quad H_\ell = H(W_\ell).$$

Тогда понятно, что $W_k = V(H)$ и, следовательно, $H_k = H$.

Индукцией по ℓ мы докажем, что H_ℓ — *объединение*

$$c_\ell = \left(\sum_{i=1}^{\ell} s(A_i)\right) - 2\ell + 2$$

деревьев и утверждение 2 *выполнено для одиночных множеств, содержащихся в* W_ℓ.

База $\ell = 1$. Если A_1 — блок, то граф $G(A_1)$ по теореме 1.6 не имеет рёбер, а значит, есть объединение $s(A_1) = |A_1|$ одновершинных деревьев.

Пусть часть A_1 — цикл. Тогда $G'(A_1)$ — это цикл, причем две вершины любого одиночного множества, лежащего в A_1 — соседние в этом цикле и по теореме 1.6 они несмежны в G. Поэтому $H_1 = H(A_1)$ — объединение $d_{\mathrm{BT}(G)}(A_1) = s(A_1)$ деревьев, причем вершины каждого одиночного множества принадлежат разным деревьям.

Переход $\ell \to \ell + 1$.

Мы так пронумеровали некрайние части, что $A_{\ell+1}$ является висячей вершиной в некотором поддереве T' дерева разбиения $\mathrm{BT}(G)$, причем $V(T')$ содержит все части $A_1, \dots, A_\ell$. Тогда $A_{\ell+1}$ смежна в T' ровно с одной вершиной, и эта вершина соответствует одиночному множеству — назовем его S. По теореме 1.1, множество S отделяет $A_{\ell+1}$ от $A_1, \dots, A_\ell$.

Таким образом, ровно две вершины части $A_{\ell+1}$ входят в $W_\ell = V(H_\ell)$ — это две вершины множества S и они принадлежат разным компонентам связности H_ℓ в силу утверждения 2. Разберем два случая.

а. *Часть* $A_{\ell+1}$ — *блок.*

Все вершины блока $A_{\ell+1}$ в графе $H_{\ell+1}$ попарно несмежны. В $V(H_{\ell+1})$ добавятся $|A_{\ell+1}| - 2 = s(A_{\ell+1}) - 2$ вершины части $A_{\ell+1}$, не входящие в S, каждая из них представляет собой новую одновершинную компоненту связности. Отсюда немедленно следует утверждение 1 для графа $H_{\ell+1}$ и утверждение 2 для содержащихся в $W_{\ell+1}$ одиночных множеств.

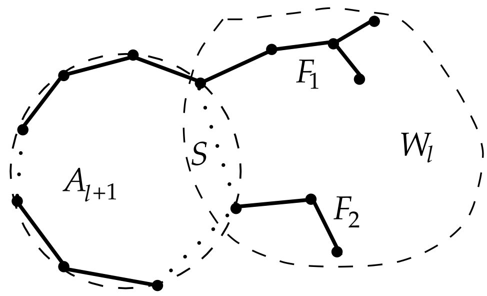


Рис. 2.18: Шаг с частью-циклом $A_{\ell+1}$.

b. *Часть $A_{\ell+1}$ — цикл.*

Граф H_ℓ — лес. Пусть U_1 и U_2 — компоненты связности графа H_ℓ, которые содержат вершины множества S (по утверждению 2 они различны). Остальные компоненты связности графа H_ℓ будут компонентами связности графа $H_{\ell+1}$. Пусть $F_i = H_\ell(U_i)$.

Как показано выше, $H(A_{\ell+1})$ — объединение $s(A_{\ell+1})$ деревьев, причем вершины каждого одиночного множества (в том числе, вершины S) принадлежат разным деревьям (см. рисунок 2.18). Значит, вершины деревьев F_1 и F_2 попадают в разные компоненты связности графа $H_{\ell+1}$. Остальные $s(A_{\ell+1}) - 2$ компоненты связности графа $H(A_{\ell+1})$ — это компоненты связности графа $H_{\ell+1}$. Отсюда следует утверждение 1 для графа $H_{\ell+1}$ и утверждение 2 для содержащихся в $W_{\ell+1}$ одиночных множеств.

□

Следствие 2.5. *Пусть G — минимальный двусвязный граф, а граф $H = G - V_2'(G)$ имеет c компонент связности. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если G имеет хотя бы один блок, то $c \geq 4$.*

2) *Если G имеет часть-цикл A степени $d_{\mathrm{BT}(G)}(A) = d$, то $c \geq d$.*

3) *Если $c = 3$, то все части графа G — циклы, ровно одна из них имеет степень 3 в $\mathrm{BT}(G)$, а остальные — степень 2.*

Доказательство. 1) В блоке A графа G хотя бы четыре вершины, а граф $G(A)$ пуст. Следовательно, блок графа G — его некрайняя часть. По формуле (2.10) тогда $c \geq |A| \geq 4$.

2) Утверждение непосредственно следует из формулы (2.10).

3) Утверждение непосредственно следует из формулы (2.10) и пунктов 1 и 2. □

Определение 2.6. 1) Для любой вершины $x \in V(G)$ назовем ее *уменьшенной степенью* величину $d'_G(x) = d_G(x) - 2$.

2) Через $s(G)$ обозначим сумму уменьшенных степеней вершин графа G.

Замечание 2.4. 1) Очевидно, уменьшенная степень любой вершины из $V_3(G)$ не менее 1.

2) $s(G) = 2e(G) - 2v(G)$.

Далее в этом разделе будем применять для минимального двусвязного графа G следующие обозначения:

- t — количество крайних частей графа G;
- c — количество компонент связности графа $H = G - V'_2(G)$;
- $s = s(G)$.

Лемма 2.16. *Пусть G — минимальный двусвязный граф. Тогда*

$$2t = s + 2c.$$

Доказательство. Посмотрим на рёбра, соединяющие вершины из $V_3(G)$ с внутренними вершинами крайних частей графа G. Пусть их количество равно q. Для каждой крайней части A от ее внутренности $\mathrm{Int}(A)$ выходит ровно два ребра в $V_3(G)$ (к вершинам из $\mathrm{Bound}(A)$). Поэтому $q = 2t$.

Поскольку H — объединение c деревьев, то $e(H) = v(H) - c$. Очевидно, $V_3(G) \subseteq V(H)$. Множество $W = V(H) \setminus V_3(G)$ состоит из вершин множества $V_2(G)$, входящих в некрайние части — то есть, по следствию 1.5, из внутренних вершин некрайних частей. Поэтому каждая вершина множества W имеет степень 2 в графе H, а значит,

$$2|W| + \sum_{x\in V_3(G)} d_H(x) = \sum_{x\in W} d_H(x) + \sum_{x\in V_3(G)} d_H(x) = \sum_{x\in V(H)} d_H(x) = 2v(H) - 2c = 2v_3(G) + 2|W| - 2c,$$

откуда следует, что

$$\sum_{x\in V_3(G)} d_H(x) = 2(v_3(G) - c).$$

Теперь посчитаем q с другой стороны:

$$q = \sum_{x\in V_3(G)} (d_G(x) - d_H(x)) = \sum_{x\in V_3(G)} d_G(x) - 2(v_3(G) - c) = \sum_{x\in V(G)} d_G(x) - 2v(G) + 2c = s + 2c.$$

□

Для минимального двусвязного графа G определим

$$f(G) = 3v_2(G) - (v(G) + 4) = 2v_2(G) - v_3(G) - 4.$$

Замечание 2.5. Пусть $G \in \mathcal{GM}(n)$, $n \geq 5$. Из определения 2.3 следует, что $f(G)$ равняется остатку от деления $n + 4$ на три.

Непосредственно из леммы 2.16 следует, что

$$f(G) = 2(v_2(G) - t) + 2(c - 2) + (s - v_3(G)). \tag{2.11}$$

Лемма 2.17. *Каждое из трех слагаемых в правой части равенства* (2.11) *неотрицательно.*

Доказательство. Каждая крайняя часть графа G содержит хотя бы одну вершину из $V_2(G)$, поэтому $v_2(G) \geq t$. Из леммы 2.15 очевидно, что $c \geq 2$. Так как уменьшенная степень каждой вершины из $V_3(G)$ неотрицательна, $s \geq v_3(G)$. □

Следующая лемма поможет классифицировать графы с малым значением $f(G)$.

Лемма 2.18. *Пусть G — минимальный двусвязный граф. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если $v_2(G) - t = 0$, то все крайние части графа G — треугольники, а все некрайние части имеют пустую внутренность.*

2) *Если $c - 2 = 0$, то все некрайние части графа G — циклы и имеют степень 2 в дереве $\mathrm{BT}(G)$.*

3) *Если $s - v_3(G) = 0$, то все одиночные множества имеют степень 3 в графе $\mathrm{BT}(G)$ и не имеют общих вершин.*

Доказательство. 1) Если $v_2(G) - t = 0$, то некрайние части не содержат вершин степени 2 (а значит, по следствию 1.5 имеют пустую внутренность), а каждая крайняя часть содержит ровно одну вершину степени 2 (то есть, является треугольником).

2) По пункту 1 следствия 2.5 все части $\mathrm{Part}(G)$ — циклы. Теперь из формулы (2.10) следует, что все они имеют степень 2 в $\mathrm{BT}(G)$.

3) По замечанию 2.4, равенство $s = v_3(G)$ означает, что все вершины из $V_3(G)$ имеют степень 3. Если какое-то одиночное множество имеет степень 4 в $\mathrm{BT}(G)$, то по лемме 1.2 его вершины имеют степень хотя бы 4. Значит, все одиночные множества имеют степень 3 в графе $\mathrm{BT}(G)$.

Предположим, что какие-то два одиночных множества S и S' графа G пересекаются по вершине a. По пункту 2 теоремы 1.1 нам известно, что $|\mathrm{Part}(S)| = d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = 3$. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2, A\}$, причем $S' \subset A$. Аналогично можно считать, что $\mathrm{Part}(S') = \{A'_1, A'_2, A'\}$, причем $S \subset A'$. Тогда внутренности $\mathrm{Int}(A_1)$, $\mathrm{Int}(A_2)$, $\mathrm{Int}(A'_1)$, $\mathrm{Int}(A'_2)$ попарно не пересекаются. Так как $a \in S$, то a смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A_1)$ и хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A_2)$. Так как $a \in S'$, то a смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A'_1)$ и хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A'_2)$. Таким образом, $d_G(a) \geq 4$, противоречие. □

Перейдем к доказательствам теорем.

Доказательство теоремы 2.2. 1) Если $G = G_{2,T} \cdot xy$ для дерева T с $v(T) = m$ и $\Delta(T) = 3$, то по теореме 1.6 граф G — минимальный двусвязный, $v(G) = 3m + 1$ и $v_2(G) = m + 2$. Поэтому, $G \in \mathcal{GM}(3m + 1)$.

Пусть $G \in \mathcal{GM}(3m + 1)$. Тогда $v_2(G) = m + 2$. По замечанию 2.5 мы имеем $f(G) = 1$, что ввиду формулы (2.11) означает

$$v_2(G) = t, \quad c = 2, \quad s - v_3(G) = 1.$$

Условия $c = 2$ и $v_2(G) = t$ означают, что все части графа G — циклы. Условие $s - v_3(G) = 1$ означает, что в графе G есть ровно одна вершина степени 4, остальные вершины имеют степень 2 или 3. Тогда по лемме 2.14 существует минимальный двусвязный граф H и вершины $w_1, w_2 \in V_3(H)$, такие, что $G = H \cdot w_1w_2$. Понятно, что

$$v_2(H) = v_2(G) = m + 2, \quad v(H) = v(G) + 1 = 3m + 2.$$

Это означает, что $H \in \mathcal{GM}(3m + 2)$, откуда по следствию 2.4 получаем утверждение 1 теоремы.

2) Как мы доказали, существует представление

$$G = G_{2,T} \cdot w_1w_2, \quad \text{где} \quad w_1, w_2 \in V_3(G_{2,T}).$$

Пусть $w = w_1 \cdot w_2$. Граф $G_{2,T} - V_2'(G_{2,T})$ — это объединение двух деревьев T_1 и T_2, изоморфных T. Понятно, что вершины w_1 и w_2 принадлежат одному и тому же дереву, пусть это T_1. Обозначим через u_1 и u_2 вершины дерева T_2, соответствующие w_1 и w_2 при изоморфизме копий дерева T. Тогда граф $G - V_2'(G)$ — это объединение двух деревьев $T_1' = T_1 \cdot w_1w_2$ и T_2 (см. рисунок 2.19б). Таким образом, дерево T в представлении $G = G_{2,T} \cdot w_1w_2$ изоморфно тому из двух деревьев графа $G - V_2'(G)$, что содержит больше вершин.

Итак, мы уже определили дерево T. У графа G есть ровно одна некрайняя часть-треугольник $A = \{w, u_1, u_2\}$ (см. рисунок 2.19а). Деревья разбиения у графов $G_{2,T}$ и $G = G_{2,T} \cdot w_1w_2$, очевидно, изоморфны. Определим

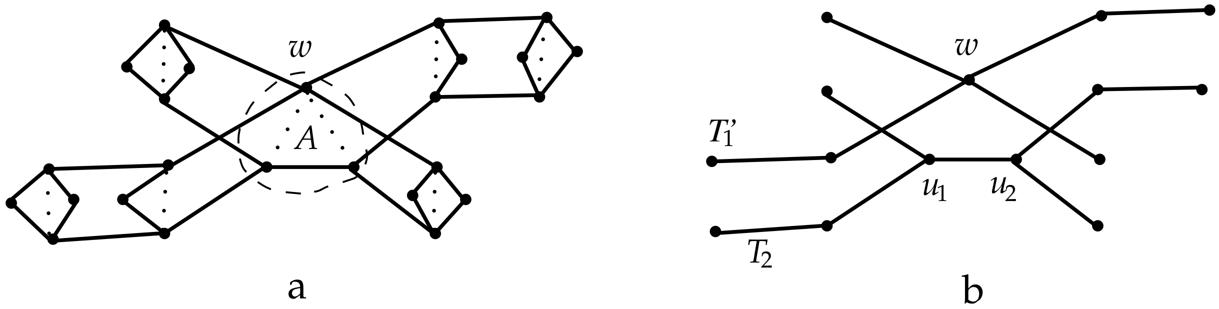


Рис. 2.19: Графы $G \in \mathcal{GM}(3m+1)$ и $G - V_2'(G)$.

в $\mathrm{BT}(G_{2,T})$ часть A', соответствующую A при изоморфизме деревьев разбиения (это можно сделать с точностью до автоморфизма графа $G_{2,T}$). Вершины w_1 и w_2 — это две смежные вершины части A' (можно выбрать любую из двух таких пар). $\square$

Замечание 2.6. Таким образом, если $G \in \mathcal{GM}(3m+1)$, то у него m одиночных множеств и степень каждого из них в $\mathrm{BT}(G)$ равна 3. Все крайние части — треугольники, все некрайние части имеют пустую внутренность. Ровно одна некрайняя часть графа G — треугольник, это как раз часть с границей из двух одиночных множеств, имеющих общую вершину. Остальные некрайние части — четырёхугольники. Пример такого графа изображен на рисунке 2.19a.

Доказательство теоремы 2.3. Несложно убедиться с помощью теоремы 1.6, что все описанные в условии графы принадлежат $\mathcal{GM}(3m)$. Пусть $G \in \mathcal{GM}(3m)$. Тогда $v_2(G) = m+2$. По замечанию 2.5 мы имеем $f(G) = 2$, что ввиду формулы (2.11) возможно в трёх случаях:

1. $c = 2, \quad v_2(G) = t, \quad s = v_3(G) + 2;$

2. $c = 2, \quad v_2(G) = t + 1, \quad s = v_3(G);$

3. $c = 3, \quad v_2(G) = t, \quad s = v_3(G).$

Разберём эти случаи.

1. Условия $c = 2$ и $v_2(G) = t$ означают, что все части графа G — циклы. Условие $s - v_3(G) = 2$ означает, что в графе G есть вершина степени не менее 4. Тогда по лемме 2.14 существует минимальный двусвязный граф H, и такие вершины $w_1, w_2 \in V_3(H)$, что $G = H \cdot w_1w_2$. Понятно, что

$$v_2(H) = v_2(G) = m + 2, \quad v(H) = v(G) + 1 = 3m + 1.$$

Это означает, что $H \in \mathcal{GM}(3m + 1)$. Теперь с помощью теоремы 2.2 понятно, что выполняется условие 1°.

2. В этом случае количество вершин степени 2 больше количества крайних частей на 1, поэтому существует либо крайняя часть-четырёхугольник, либо некрайняя часть с внутренней вершиной. Пусть A — такая часть, а $v \in V_2(G) \cap \mathrm{Int}(A)$. По следствию 2.5, часть A — цикл. Тогда $\mathrm{N}_G(v) = \{x, y\}$ является неодиночным разделяющим множеством графа G. Следовательно, вершины x и y несмежны. Значит, граф $H = G - a + xy$ двусвязен. Более того, у H те же одиночные множества, что у G и почти что те же части: единственное отличие в том, что часть A заменена на цикл меньшей длины. Таким образом, граф H по теореме 1.6 минимален. Поскольку

$$v_2(H) = v_2(G) - 1 = m + 1 \quad \text{и} \quad v(H) = v(G) - 1 = 3m - 1,$$

то $H \in \mathcal{GM}(3m - 1)$. Тогда по следствию 2.4 получается, что $H = G_{2,T}$ для дерева T с $v(T) = m - 1$ и $\Delta(T) = 3$. Значит, выполнено условие 2°.

3. Так как $c = 3$, по следствию 2.5 у графа G все части графа G — циклы и среди них есть часть A степени $d_{\mathrm{BT}(G)}(A) = 3$, а остальные части имеют степень 2 в $\mathrm{BT}(G)$. Из $s = v_3(G)$ по лемме 2.18 следует, что никакие два одиночных множества графа G не пересекаются и каждое из них имеет степень ровно 3 в $\mathrm{BT}(G)$. Из $v_2(G) = t$ следует, что все некрайние части имеют пустую внутренность. Следовательно, часть A — шестиугольник, причем границу части A образуют три непересекающихся одиночных множества — пусть это $R_x = \{x_1, x_2\}$, $R_y = \{y_1, y_2\}$, $R_z = \{z_1, z_2\}$. Нумерация вершин выбрана так, что $x_1y_1, y_2z_2, x_2z_1 \in E(G)$.

Изменим граф G: удалим рёбра x_1y_1, y_2z_2 и x_2z_1, добавим две новые вершины множества $R_a = \{a_1, a_2\}$ и рёбра a_1x_1, a_2x_2, a_1y_1, a_2y_2, a_1z_1, a_2z_2 (см.

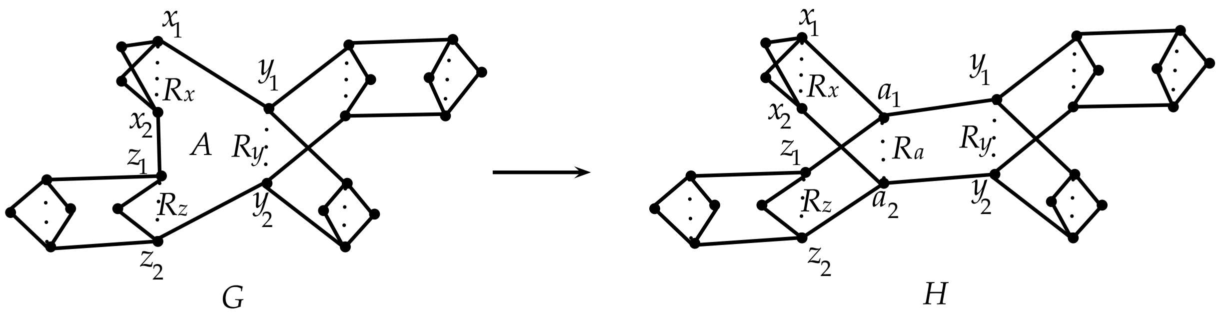


Рис. 2.20: Графы G и H.

рисунок 2.20). Полученный граф H, очевидно, двусвязен. Вместо части A добавилось новое одиночное множество R_a и три части-четырёхугольника. Поэтому, граф H минимален. Кроме того,

$$v_2(H) = v_2(G) = m + 2 \quad \text{и} \quad v(H) = v(G) + 2 = 3k + 2.$$

Поэтому $H \in \mathcal{GM}(3m + 2)$, а следовательно, $H = G_{2,T}$ для дерева T с $v(T) = m$ и $\Delta(T) \le 3$. Каждому одиночному множеству графа H соответствует вершина дерева T. Пусть для множеств R_a, R_x, R_y, R_z это вершины a, x, y, z соответственно. Тогда $\mathrm{N}_T(a) = \{x, y, z\}$. Теперь из построения графа $G_{T,a}$ и из построения графа H по графу G следует, что $G = G_{T,a}$. $\square$

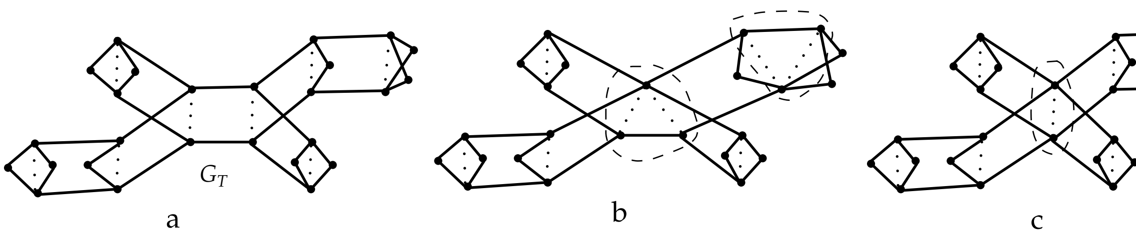


Рис. 2.21: Графы из $\mathcal{GM}(3m)$, полученные из $G_{2,T} \in \mathcal{GM}(3m + 2)$ стягиванием двух рёбер.

Замечание 2.7. Пусть $G \in GM(3m)$ — граф, полученный из графа $G_{2,T} \in \mathcal{GM}(3m + 2)$ стягиванием двух рёбер, каждое из которых соединяет вершины степени 3.

1) Тогда в графе G все крайние части — треугольники, все некрайние части имеют пустую внутренность.

2) Если стянутые рёбра графа $G_{2,T}$ лежали в разных частях, то ровно две некрайних части графа G — треугольники: это части, полученные из частей $G_{2,T}$, содержащих стянутые рёбра. Остальные части — четырёхугольники. Граф G в этом случае имеет ровно m одиночных множеств и степень каждого из них в $\mathrm{BT}(G)$ равна 3. Пример такого графа изображен на рисунке 2.21b. Аналогично пункту 2 теоремы 2.2 можно показать, что для такого графа G граф $G_{2,T} \in \mathcal{GM}(3m+2)$ единственен.

3) Если стянутые рёбра графа $G_{2,T}$ лежали в одной части-четырёхугольнике A, то эта часть исчезнет, а одиночные множества R_x и R_y, составляющие границу A, склеятся в одно множество, которое будет иметь в $\mathrm{BT}(G)$ степень 4. Все некрайние части графа G в таком случае — четырёхугольники. Пример такого графа изображен на рисунке 2.21c. Для такого графа G граф $G_{2,T} \in \mathcal{GM}(3m+2)$ неединственен.

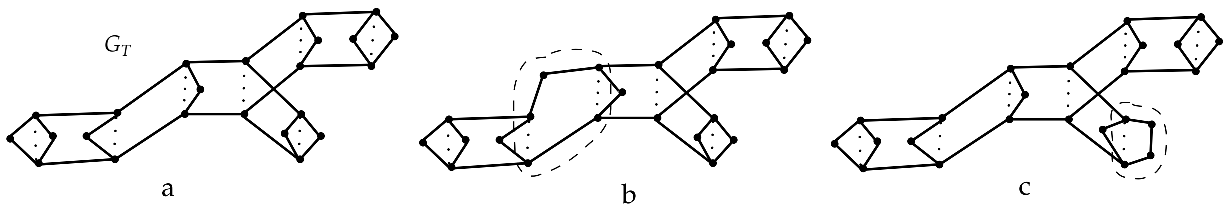


Рис. 2.22: Графы из $\mathcal{GM}(3m)$, полученные из $G_{2,T} \in \mathcal{GM}(3m-1)$ добавлением вершины степени 2.

Замечание 2.8. Пусть $G \in \mathcal{GM}(3m)$ — граф, полученный из графа $G_{2,T} \in \mathcal{GM}(3m-1)$ заменой ребра на путь длины 2, проходящий через новую вершину степени 2.

1) Тогда в графе G ровно $m-1$ одиночное множество, все они имеют степень 3.

2) Если вершина степени 2 добавлена в некрайнюю часть графа $G_{2,T}$, то в графе G получается некрайняя часть-пятиугольник, а добавленная вер-

шина — единственная внутренняя вершина этой части. Остальные некрайние части графа G — четырёхугольники, они имеют пустую внутренность. Все крайние части графа G — треугольники. Пример такого графа изображен на рисунке 2.22b.

3) Если вершина степени 2 добавлена в крайнюю часть графа $G_{2,T}$, то в графе G получается крайняя часть-четырёхугольник с двумя внутренними вершинами. Остальные крайние части графа G — треугольники, а все некрайние части G — четырёхугольники без внутренних вершин. Пример такого графа изображен на рисунке 2.22c.

4) В обоих случаях граф $G_{2,T}$ для графа G единственен.

2.3 Структура минимальных k-связных графов при $k \le 5$

В теореме 2.1 показано, что при произвольном k экстремальные минимальные k-связные графы имеют древовидную структуру. При $k \le 5$ мы можем построить аналогичную структуру для любого минимального k-связного графа. Основным результатом раздела является следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть $k \le 5$, а G — минимальный k-связный граф. Тогда для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ можно выбрать содержащий e разрез $S_e \in \mathfrak{R}$ так, что все выбранные разрезы попарно независимы.*

Покажем, как применяется эта теорема. Пусть G — минимальный k-связный граф, а множество

$$\mathfrak{C} = \{S_e\}_{e \in E_{k+1}} \subset \mathfrak{R}, \quad \text{где} \quad e \in S_e$$

состоит из попарно независимых разрезов.

Для набора из попарно независимых разрезов $\mathfrak{C}$ можно определить деревья $\mathrm{BT}(G, \mathfrak{C})$ и $\mathrm{PT}(G, \mathfrak{C})$. Эти деревья показывают взаимное расположение разрезов множества $\mathfrak{C}$ и частей из $\mathrm{Part}(\mathfrak{C})$. Существует взаимно однозначное соответствие между рёбрами дерева $\mathrm{PT}(G,\mathfrak{C})$ и рёбрами из E_{k+1}. Поэтому, деревья $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{C})$ и $\mathrm{PT}(G,\mathfrak{C})$ показывают также структуру взаимного расположения рёбер из множества E_{k+1}. Кроме того, для изучения структуры минимального k-связного графа теперь можно использовать многочисленные свойства, доказанные в теореме 1.7 и следствии 1.6.

Также мы докажем ряд свойств частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{C})$, использующих минимальность графа G. Частным случаем леммы 2.6 является следующее утверждение.

Следствие 2.6. *Пусть $k \le 5$, а G — минимальный k-связный граф. Пусть R — граница разреза $S_e \in \mathfrak{C}$. Тогда все вершины из $V_{k+1} \cap R$ принадлежат разным компонентам связности графа G_{k+1}.*

Следствие 2.7. *Пусть $k \le 5$, G — минимальный k-связный граф, $\mathfrak{C}$ — определенное выше множество разрезов, а $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Вершины множества $A \cap V_{k+1}$ попарно несмежны.*

2) *Пусть A — крайняя часть, смежная в $\mathrm{BT}(G,\mathfrak{C})$ с разрезом S_{ab}. Тогда $A \in \mathrm{Part}(S_{ab})$. Часть A содержит не менее чем k вершин степени k, хотя бы одна из них принадлежит $\mathrm{Int}(A)$.*

Доказательство. 1) Если вершины $x, y \in A \cap V_{k+1}$ смежны, то разрез $S_{xy} \in \mathfrak{C}$ разделяет две вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C})$, что невозможно.

2) По пункту 4 теоремы 1.7 мы имеем $A \in \mathrm{Part}(S_{ab})$. Пусть $a \in \mathrm{Int}(A)$. Тогда $\mathrm{N}_G(a) \setminus \{b\} \subset A$.

Предположим, что $ax \in E_{k+1}$, $x \ne b$. По следствию 2.6 мы знаем, что $x \notin \mathrm{Bound}(A)$. Следовательно, $x \in \mathrm{Int}(A)$. Теперь рассмотрим разрез S_{ax}, пусть $x \in X \in \mathrm{Part}(S_{ax})$. Тогда $\mathrm{Int}(X) \cap \mathrm{Int}(A) \ni x$, но $\mathrm{Int}(X) \not\ni a$. Из независимости разрезов S_{ax} и S_{ab} следует, что $X \subsetneq A$, что противоречит пункту 3 теоремы 1.7.

Таким образом, вершина a смежна с k вершинами части A и все эти вершины имеют степень k. Так как S_{ab} содержит не более $k-1$ вершины, хотя бы одна из смежных с a вершин степени k лежит в $\mathrm{Int}(A)$. □

Оставшаяся часть раздела будет посвящена доказательству теоремы 2.4. Мы будем вести разговор о минимальном k-связном графе G и использовать для него обозначения, введенные в начале главы.

Поскольку граф G минимален, то для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ существует разрез, содержащий e и $k-1$ вершину. Пусть $\mathfrak{R}$ — множество всех таких разрезов.

Изучим свойства разрезов из $\mathfrak{R}$.

2.3.1 Хорошие и плохие пары зависимых разрезов

Нам потребуется несколько вспомогательных определений.

Замечание 2.9. Отметим, что на этот раз, исходя из специфики работы с k-связными графами при $k \le 5$, мы определим кривые и нормальные разрезы иначе, чем это было сделано для произвольного k в разделе 2.1.3.

Определение 2.7. 1) Назовем разрез $S \in \mathfrak{R}$ *кривым*, если существует часть $A \in \mathrm{Part}(R)$ с $|\mathrm{Int}(A)| \le 2$ и *нормальным*, если такой части не существует.

2) Назовем упорядоченную пару зависимых разрезов (S,T) из $\mathfrak{R}$ *плохой*, если существует такая часть $A \in \mathrm{Part}(S)$, что $\mathrm{Int}(A) \subset T$.

3) Назовем неупорядоченную пару разрезов S, T из $\mathfrak{R}$ *хорошей*, если обе упорядоченные пары (S,T) и (T,S) не являются плохими.

Для пары зависимых разрезов мы будем использовать обозначения (2.2). Мы докажем две технические леммы, в целом аналогичные лемме 2.4, но учитывающие специфику работы с кривыми разрезами.

Лемма 2.19. *Пусть пара зависимых разрезов S, T из $\mathfrak{R}$ — хорошая, ребро $b_1b_2 \in T$ не принадлежит разрезу S. Тогда существуют такие $i, j \in \{1, 2\}$, что $R_{i,j} \ni b_1b_2$ — разрез.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) \neq \varnothing$. Тогда из леммы 2.1 следует, что $|R_{1,1}| = k = |R_{2,2}|$. Это, в частности, означает, что

$$R_{1,1} \cup R_{2,2} = S \cup T.$$

Не умаляя общности, положим $b_1b_2 \in R_{1,1}$. Тогда разрез $R_{1,1}$ нам подходит. Случай $\mathrm{Int}(G_{1,2}) \neq \varnothing$, $\mathrm{Int}(G_{2,1}) \neq \varnothing$ разбирается аналогично.

Пусть условия рассмотренных выше случаев не выполнены. Тогда не умаляя общности можно считать, что

$$\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \mathrm{Int}(G_{1,2}) = \varnothing \quad \text{или} \quad \mathrm{Int}(G_{1,1}) = \mathrm{Int}(G_{2,1}) = \varnothing.$$

В первом случае $\mathrm{Int}(F_1) = T_1$, следовательно, пара (S, T) — плохая. Во втором случае $\mathrm{Int}(H_1) = S_1$, следовательно, пара (T, S) — плохая. В обоих случаях получаем противоречие. □

Лемма 2.20. *Пусть $k \leq 5$, а пара зависимых разрезов (S, T) из $\mathfrak{R}$ — плохая. Пусть $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ — различные рёбра из E_{k+1}. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1° *Разрез S — кривой, а разрез T — нормальный.*

2° *Существуют такие $i, j \in \{1, 2\}$, что $R_{i,j} \ni b_1b_2$ — разрез.*

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что $\mathrm{Int}(F_1) \subset T$, то есть, $\mathrm{Int}(F_1) = T_1$. Тогда один из концов ребра $a_1a_2 \in S$ лежит в T_1. Пусть $a_1 \in T_1$ (см. рисунок 2.23а). Отметим, что $d_G(a_1) \geq k + 1$ и все вершины, смежные с a_1, лежат в $T_1 \cup V(S) \cup \{a_2\}$. Следовательно, $|T_1| = t \geq 2$. Более того, вершина a_1 может быть несмежна не более чем с $t-2$ вершинами разреза S.

Так как $T = T_1 \cup T_2 \cup P \cup \{b_1b_2\}$, мы имеем

$$|T_2|+|P| = k-t-1 \quad \text{и} \quad |R_{2,1}|+|R_{2,2}| = |S|+2(|T_2|+|P|+|\{b_1b_2\}|) \leq 3k-2t. \tag{2.12}$$

Рассмотрим два случая.

1. $t = 2$.

Тогда a_1 смежна со всеми $k-1$ вершинами разреза S. Предположим, что $b_1 \in S$ (см. рисунок 2.23b). Тогда $a_1b_1 \in E_{k+1}$, следовательно, $a_1b_1 \in T' \in \mathfrak{R}$. Пусть $A \in \mathrm{Part}(T')$ — часть, содержащая b_1. Из $a_1a_2 \in S$ следует, что $a_2 \notin S$, а значит, $b_1 \neq a_2$. Тогда $|\mathrm{Int}(A)| < |\mathrm{Int}(F_1)| = 2$ по лемме 2.2, а значит, $\mathrm{Int}(A) = \{b_1\}$. Следовательно, $d_G(b_1) \le k$, противоречие.

Значит, $b_1 \notin S$ и, аналогично, $b_2 \notin S$. Тогда можно считать, что

$$b_1 \in \mathrm{Int}(G_{2,1}) \quad \text{и} \quad b_2 \in \mathrm{Int}(G_{2,2})$$

(см. рисунок 2.23a). В этом случае $|R_{2,1}| \ge k$ и $|R_{2,2}| \ge k$. Из $k \le 5$ и неравенства (2.12) следует, что $|R_{2,1}| = k$ или $|R_{2,2}| = k$ (пусть выполнено первое равенство). Тогда $R_{2,1} \in \mathfrak{R}$ — разрез, содержащий ребро b_1b_2. Таким образом, $R_{2,1}$ удовлетворяет требованиям пункта 2.

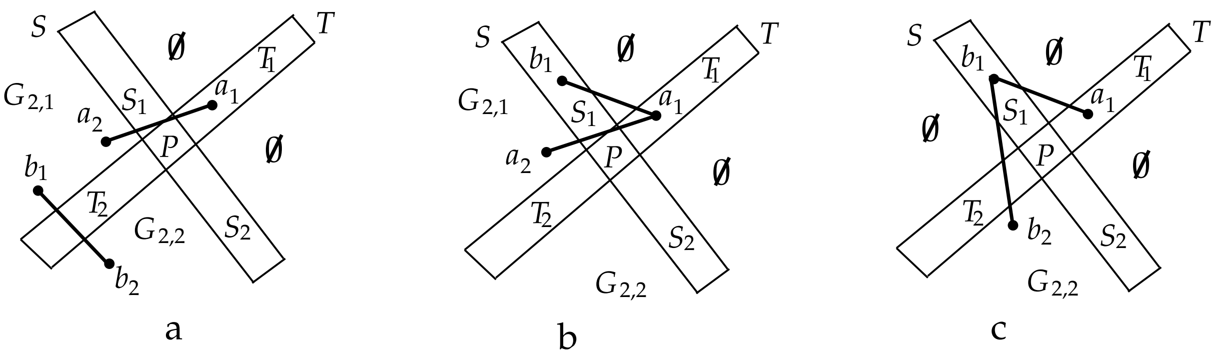


Рис. 2.23: Разбиение графа парой зависимых разрезов.

Так как $|\mathrm{Int}(F_1)| = 2$, разрез S — кривой. Осталось доказать, что разрез T нормален. Докажем, что $|\mathrm{Int}(H_1)| \ge 3$. Как мы знаем, $b_1 \in \mathrm{Int}(G_{2,1})$ и $d_G(b_1) \ge k+1$. Не более двух рёбер может выходить из b_1 в вершины не из $G_{2,1}$: это ребро b_1b_2 и, в случае, когда $a_2 = b_1$, ребро b_1a_1. Учитывая саму вершину b_1, получаем $|G_{2,1}| \ge k$. При этом,

$$|G_{2,1} \cap T| = |T_2 \cup P| \le k - 3$$

по неравенству (2.12). Значит, $|\mathrm{Int}(H_1)| \ge |G_{2,1} \setminus T| \ge 3$. Аналогично, $|\mathrm{Int}(H_2)| \ge 3$ и разрез T — нормален.

2. $t \ge 3$.

По неравенству (2.12), тогда $|R_{2,1}| + |R_{2,2}| < 2k$, а значит, можно считать, что $|R_{2,1}| < k$. В этом случае $\mathrm{Int}(G_{2,1}) = \varnothing$ и $\mathrm{Int}(H_1) = S_1$. Тогда один из концов ребра b_1b_2 лежит в S_1, пусть это b_1.

Предположим, что вершины b_1 и a_1 смежны (см. рисунок 2.23c). Тогда $a_1b_1 \in E_{k+1}$, следовательно, $a_1b_1 \in T' \in \mathfrak{R}$. Пусть $A \in \mathrm{Part}(T')$ — часть, содержащая a_1. Аналогично пункту 1, из $a_1 \in T$ следует, что $a_1 \ne b_2$. Тогда по лемме 2.2 мы имеем $|\mathrm{Int}(A)| < |\mathrm{Int}(H_1)|$. Как доказывалось выше, $|\mathrm{Int}(A)| \ge 2$, следовательно, $|S_1| = |\mathrm{Int}(H_1)| \ge 3$.

Пусть вершины b_1 и a_1 несмежны. Так как $d_G(b_1) \ge k+1$, а все вершины, смежные с b_1, лежат в $S_1 \cup (V(T) \cup \{b_2\})$, мы и в этом случае получаем $|S_1| \ge 3$.

Множество $R_{2,2}$ включает в себя вершины из P, S_2, T_2 и не более чем два ребра. Таким образом, во всех случаях,

$$|R_{2,2}| \le (|S_2| + |P| + 1) + (|T_2| + 1) \le (k - |S_1|) + (k - |T_1|) \le 2k - 6 < k,$$

а значит, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) = \varnothing$. Но тогда $b_2 \in S_2$ и аналогично доказанному выше мы имеем $|S_2| \ge 3$, что невозможно. $\square$

2.3.2 Доказательство теоремы 2.4

Опишем алгоритм построения искомого множества попарно независимых разрезов. Нам понадобятся два счетчика p и q. Изначально положим

$$p = q = 0.$$

Шаг алгоритма.

1. Выбор ребра e.

Пусть перед шагом имеются попарно независимые разрезы: кривые K_1, $\dots$, K_p и нормальные N_1, $\dots$, N_q (если $p = 0$ или $q = 0$, то соответствующих разрезов нет). Пусть $e_i \in K_i$, $f_j \in N_j$, причем e_1 ,$\dots$, e_p, f_1, $\dots$, f_q — различные рёбра из E_{k+1}. Положим

$$\mathfrak{S} = \{K_1, \dots, K_p, N_1, \dots, N_q\}, \quad E' = E_{k+1} \setminus \{e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q\}.$$

Если $E' = \varnothing$, алгоритм прекращает работу.

Пусть $E' = \varnothing$. Тогда рассмотрим ребро $e \in E'$, пусть $e \in T \in \mathfrak{R}$. Положим $\mathfrak{S}' = \varnothing$. *Мы будем по очереди рассматривать разрезы из $\mathfrak{S}$, совершать с ними последующие шаги, изменяющие разрез T, после чего добавлять рассмотренный разрез в множество $\mathfrak{S}'$.*

Перейдем к выбору разреза S.

2. Выбор разреза S.

Если разрез T — нормальный, то выберем любой разрез $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$ (если он существует). Если разрез T — кривой, то выберем любой кривой разрез $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$ (если он существует). В случаях, когда невозможно выбрать разрез S, мы перейдем к окончанию шага алгоритма.

Пусть мы смогли выбрать разрез S. Если разрезы S и T независимы, то мы поместим S в $\mathfrak{S}'$ и вернемся к выбору следующего разреза S. Если разрезы S и T зависимы, то мы перейдем к преобразованию разреза T.

3. Преобразование разреза T.

Пусть

$$\mathrm{Part}(T) = \{H_1, H_2\}, \quad \mathrm{Part}(S) = \{F_1, F_2\}, \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$

Мы хотим доказать существование такого разреза $R \in \mathfrak{R}$, что

$$R \ni e, \quad \mathrm{Part}(R) = \{G_{\alpha,\beta}, U\},$$

причем либо $U = \overline{G}_{\alpha,\beta}$, либо $U = \overline{G}_{\alpha,\beta} \cup \{a\}$, где a — конец ребра $e = ab$, лежащий в $G_{\alpha,\beta}$.

Если пара разрезов S, T — хорошая, то искомый разрез R существует по леммам 2.19 и 2.5. Предположим, что пара S, T — не является хорошей, тогда одна из упорядоченных пар (S, T) и (T, S) — плохая. Если пара (S, T) — плохая, то искомый разрез R существует по пункту 2 леммы 2.20 и лемме 2.5. Наконец, пусть пара (T, S) — плохая. Тогда по пункту 1 леммы 2.20 разрез T — кривой, а разрез S — нормальный, что противоречит выбору разреза S.

Докажем, что R независим с произвольным разрезом $S' \in \mathfrak{S}'$. Пусть $\mathrm{Part}(S') = \{D_1, D_2\}$. Так как разрезы S и S' независимы, разрезы T и S' независимы, а разрезы S и T зависимы, по лемме 1.9 можно считать, что

$$F_1 \supset D_2, \quad F_2 \subset D_1, \quad H_1 \supset D_2, \quad H_2 \subset D_1. \tag{2.13}$$

Разберем несколько случаев.

a. $\alpha = 2$.

Тогда $G_{2,\beta} \subset F_2 \subset D_1$ и $U \supset F_1 \supset D_2$ (см. рисунок 2.24a), то есть, R и S' независимы.

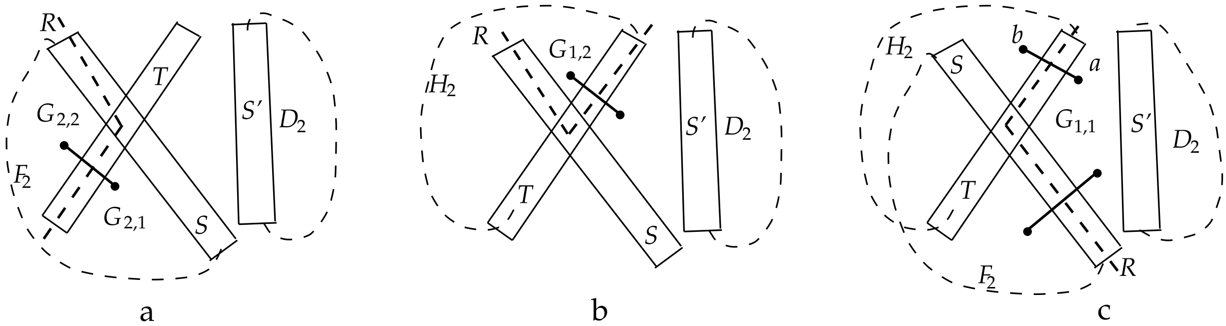


Рис. 2.24: Разрезы S, S' и T.

b. $\alpha = 1$. Разберем два подслучая.

b1. $\beta = 2$.

Тогда $G_{\alpha,\beta} = G_{1,2} \subset H_2 \subset D_1$ и $U \supset H_1 \supset D_2$ (см. рисунок 2.24b), что означает независимость разрезов S' и R.

b2. $\beta = 1$.

В силу (2.13), мы имеем $D_1 \supset H_2 \cup F_2 = \overline{G}_{1,1}$ (см. рисунок 2.24c). Так как T и S' не имеют общих рёбер, по пункту 2 леммы 1.10 мы имеем $D_1 \supset W(T) \ni a$. Значит, $D_1 \supset \overline{G}_{1,1} \cup \{a\} \supset U$.

Из $D_1 \supset F_2$ и независимости разрезов S и S' следует $D_2 \cap \mathrm{Int}(F_2) = \varnothing$. Значит, $D_2 \subset H_1 \setminus \mathrm{Int}(F_2) = G_{1,1}$. Таким образом, мы проверили независимость разрезов S' и R.

Положим $T = R$, добавим S в $\mathfrak{S}'$ и вернемся к выбору следующего разреза S.

4. Окончание шага агоритма.

Если разрез T — нормальный, то рассмотрены все разрезы из $\mathfrak{S}$ и T с ними независим. Тогда положим $N_{q+1} = T$, поместим этот разрез в $\mathfrak{S}$ и положим $q = q + 1$.

Пусть разрез T — кривой. Тогда рассмотрены все кривые разрезы из $\mathfrak{S}$ и T с ними независим. В этом случае положим $K_{p+1} = T$, поместим этот разрез в $\mathfrak{S}$ и положим $p = p + 1$. Кроме того, положим $q = 0$ и удалим все разрезы $N_1, \dots, N_q$ из $\mathfrak{S}$.

Вернемся к выбору следующего ребра e.

На этом описание шага алгоритма закончено.

В результате действия каждого шага алгоритма либо увеличится p, либо p не изменится и при этом увеличится q. Поэтому алгоритм обязательно закончит работу, в результате получится искомое множество попарно независимых разрезов.

На этом доказательство теоремы 2.4 закончено.

Глава 3

Гипердерево и теорема разбиения

В этой главе мы докажем *теорему о разбиении* — абстрактное утверждение о структуре, обобщающей свойства множества точек сочленения связного графа.

3.1 Гиперграф и гипердерево

Напомним определения гиперграфа и гипердерева.

Для *гиперграфа* H мы будем применять такие же обозначения как и для графа: множества *вершин* и *гиперребер* будем обозначать через $V(H)$ и $E(H)$ соответственно. Главное отличие гиперграфа от обычного графа в том, что *гиперребро* — это произвольное подмножество $V(H)$, состоящее хотя бы из двух вершин. Поэтому удобно оперировать с гиперрёбрами как с множествами вершин графа.

Для вершины $v \in V(H)$ пусть $d_H(v)$ — ее степень в гиперграфе H, то есть, количество содержащих v гиперребер.

Для множества вершин $X \subset V(H)$ определим гиперграф $H - X$ следующим образом: $V(H - X) = V(H) \setminus X$, а $E(H - X)$ состоит из всех множеств вида $R \setminus X$ (где $R \in E(H)$), содержащих хотя бы две вершины.

Определение 3.1. 1) Будем называть последовательность различных вершин $a_1a_2\dots a_k$ *путём*, если существуют гиперребра e_1, e_2, $\dots$, e_{k-1} такие, что $a_i, a_{i+1} \in e_i$.

2) Если, кроме того, существует гиперребро $e_k \ni a_k, a_1$, то мы назовем последовательность различных вершин $a_1a_2\dots a_k$ *циклом*

3) Гиперграф называется *связным*, если любые две его вершины *связаны*, то есть, соединены путём.

4) *Компоненты связности* гиперграфа определяются так же, как и компоненты связности графа — это максимальные по включению множества попарно связанных вершин.

Глава 3 начинается с определения гипердерева и изучения его свойств.

Определение 3.2. Пусть H — гиперграф.

1) Будем называть гиперграф H *гипердеревом*, если он связен, ни одно его гиперребро не является подмножеством другого и для любого цикла в этом графе существует гиперребро, содержащее все его вершины.

2) Назовем вершину v гипердерева H *крайней*, если граф $H - v$ связен.

3) По гиперграфу H построим двудольный граф $T(H)$, вершины одной доли которого — вершины H, а вершины другой доли — гиперребра H. Гиперребро R соединим со всеми вершинами, которые оно содержит.

Гипердерево имеет множество свойств, аналогичных свойствам обычного дерева.

Теорема 3.1. *Пусть H — гипердерево. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Граф $T(H)$ — дерево.*

2) *Никакие два гиперребра H не имеют двух общих вершин.*

3) *Пусть $a \in V(H)$. Тогда $d_H(a)$ равняется количеству компонент связности гиперграфа $H - a$. Более того, для любой компоненты связности W гиперграфа $H - a$ существует единственное гиперребро $R \in E(H)$,*

содержащее a и вершины из W. Это гиперребро не содержит вершин других компонент связности гиперграфа $H - a$.

4) *Крайние вершины гипердерева H — это в точности все его вершины, имеющие степень* 1.

5) *Если $v(H) \geq 2$, то множество висячих вершин дерева $T(H)$ совпадает с множеством крайних вершин гипердерева H.*

Доказательство. 1) Связность $T(H)$ очевидна. Предположим, что в графе $T(H)$ есть простой цикл $a_1 \dots a_n$. Пусть гиперрёбра $R_1, \dots, R_n$ таковы, что $R_i \ni a_i, a_{i+1}$ (мы считаем, что $n + 1 = 1$) и

$$R'_k = R_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} R_i \cup \{a_1, \dots, a_n\} \right).$$

Выпишем вершины в таком порядке: сначала все вершины из R'_1, затем a_1, затем все вершины из R'_2, затем a_2, ..., затем все вершины из R'_n и, наконец, a_n. Мы получили цикл в гипердереве H, содержащий все вершины гиперребер $R_1, \dots, R_n$, а значит, существует гиперребро R, содержащее все вершины этого цикла. Но тогда $R \supsetneq R_1$, что невозможно.

2) Если оба гиперребра E_1 и E_2 содержат вершины a и b, то в графе $T(H)$ есть цикл, что противоречит пункту 1.

3) Так как H — связный гиперграф, то существует его гиперребро, содержащее a и несколько вершин из W. Это гиперребро не может содержать вершины, отличные от a и не входящие в W (иначе W не была бы компонентой связности гиперграфа $H - a$).

Пусть существует два таких гиперребра E_1 и E_2. Тогда $E_1 \cap E_2 = \{a\}$ по пункту 2. Рассмотрим вершины $b_1 \in E_1 \setminus \{a\}$ и $b_2 \in E_2 \setminus \{a\}$. Так как $b_1, b_2 \in W$, существует такой простой путь P от b_1 до b_2, что все его гиперребра содержат только вершины из W. Значит, в $T(H)$ существует не проходящий через a путь от b_1 до b_2. Добавив к этому пути гиперребро E_2, вершину a и гиперребро E_1, мы получим цикл в $T(H)$, что противоречит пункту 1. Из доказанного следует, что $d_H(a)$ равняется количеству компонент связности гиперграфа $H - a$.

4) Прямое следствие пункта 3.

5) Пусть a — висячая вершина дерева $T(H)$, а b — единственная смежная с ней вершина. Если a соответствует гиперребру R гипердерева H, то $R = \{b\}$. Однако, по определению гиперграфа должно быть $|R| \geq 2$, противоречие. Значит, $a \in V(H)$ и по пункту 4 очевидно, что эта вершина — крайняя.

Наоборот, пусть a — крайняя вершина гипердерева H. По пункту 4, она входит ровно в одно гиперребро R, а значит, является висячей в дереве $T(H)$. □

3.2 Гипердерево $\mathrm{Struct}(V)$

Рассмотрим конечное множество вершин V. Пусть каждой вершине $w \in V$ соответствует разбиение V_w множества $V \setminus \{w\}$ на несколько *классов* (возможно, такой класс всего один). Будем говорить, что вершина *w разделяет* вершины v_1 и v_2, если v_1 и v_2 лежат в разных классах V_w.

Назовем вершины $v_1, v_2 \in V$ *соседними*, если их не разделяет никакая отличная от них вершина множества V. Построим *гиперграф разбиения* $\mathrm{Struct}(V)$ на вершинах множества V, гиперребра которого — это максимальные по включению множества попарно соседних вершин.

Приведем пример множества вершин и гиперграфа разбиения, показывающий, какое отношение эта конструкция имеет к теории связности. Пусть F — связный граф, $\mathfrak{R}_1(F)$ — множество всех его точек сочленения, а для каждой точки сочленения $a \in \mathfrak{R}_1(F)$ классы разбиения $(\mathfrak{R}_1(F))_a$ состоят из точек сочленения, лежащих в одной компоненте связности графа $F - a$. Именно классическая структура взаимного расположения точек сочленения связного графа подсказывает нам результат теоремы 3.2.

Теорема 3.2. *Пусть для любых $a, b, c \in V$ если a разделяет b и c, то b не разделяет a и c. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Гиперграф* $\mathrm{Struct}(V)$ *является гипердеревом.*

2) *Пусть для некоторой вершины $a \in V$ гиперграф* $\mathrm{Struct}(V) - a$ *распадается на компоненты связности $W_1, \ldots, W_\ell$. Тогда $V_a = \{W_1, \ldots, W_\ell\}$.*

Доказательство. 1) **a.** Докажем индукцией по количеству вершин, что существуют такие вершины $a, b \in V$, для которых $|V_a| = |V_b| = 1$. База для множества, состоящего не более чем из трех вершин, очевидна.

Докажем индукционный переход. Рассмотрим произвольную вершину $c \in V$, пусть $V' = V \setminus \{c\}$. По индукционному предположению, существуют такие две вершины $a, b \in V'$, что $|V'_a| = |V'_b| = 1$. Если $|V_a| = |V_b| = 1$, то утверждение доказано.

Предположим, что $|V_a| > 1$. Тогда вершина a разделяет $V' \setminus \{a\} \ni b$ и c, следовательно, вершина b не может разделять a и c, а это означает, что $|V_b| = 1$. Для любой вершины $x \in V' \setminus \{a\}$ вершина a разделяет c и x, следовательно, вершина c не разделяет a и x. Таким образом, $|V_c| = 1$. В этом случае вершины b и c нам подходят.

b. Докажем индукцией по количеству вершин в множестве V связность графа $\mathrm{Struct}(V)$. База для множества, состоящего не более чем из трех вершин, очевидна. Рассмотрим вершины $a, b \in V$ такие, что

$$|V_a| = |V_b| = 1.$$

По индукционному предположению, гиперграф $\mathrm{Struct}(V \setminus \{a\})$ связен. Так как $|V_a| = 1$, то все вершины множества $V \setminus \{a\}$ связаны и в гиперграфе $\mathrm{Struct}(V)$. По аналогичным причинам, вершины множества $V \setminus \{b\}$ связаны в $\mathrm{Struct}(V)$, что означает связность гиперграфа $\mathrm{Struct}(V)$.

c. Пусть $a_1 a_2 \ldots a_k$ — путь в гиперграфе $\mathrm{Struct}(V)$, а вершина b не лежит на нем. Тогда b не разделяет пары вершин a_1 и a_2,…, a_{k-1} и a_k. Следовательно, b не разделяет a_1 и a_k.

Из этого факта очевидно следует, что любые две вершины, входящие в какой-либо цикл графа $\mathrm{Struct}(V)$, невозможно разделить никакой отличной от них вершиной. Следовательно, все вершины цикла принадлежат одному гиперребру. Таким образом, граф $\mathrm{Struct}(V)$ является гипердеревом.

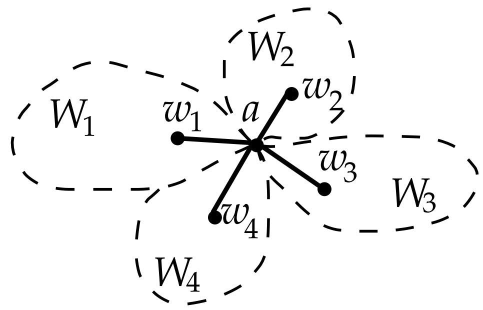


Рис. 3.1: Компоненты связности $\mathrm{Struct}(V) - a$.

2) Рассмотрим множество W_i. Из доказанного выше следует, что a не разделяет никакие две вершины из W_i, следовательно, все вершины из W_i лежат в одном классе разбиения V_a.

Рассмотрим две разных компоненты W_i и W_j и выберем в них смежные с a вершины w_i и w_j соответственно (см. рисунок 3.1). Никакая отличная от w_i, w_j, a вершина не может разделить пары смежных вершин $\{w_i, a\}$ и $\{w_j, a\}$. Следовательно, разделить вершины w_i и w_j может только a. Поскольку w_i и w_j не принадлежат одному гиперребру, то a их разделяет, следовательно, все вершины из W_i лежат в одном классе V_a, а все вершины из W_j — в другом. $\square$

Глава 4

Компоненты зависимости

В главе 1 были построены структурные деревья для разбиения k-связного графа набором из попарно независимых разделяющих множеств или разрезов и изучались свойства таких деревьев. Однако, k-разделяющие множества в k-связном графе могут быть зависимы. В этой главе мы разобьем набор разделяющих множеств $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ на компоненты зависимости и изучим структуру их взаимного расположения с помощью теоремы о разбиении.

Определение 4.1. Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) *Граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$ набора $\mathfrak{S}$ — это граф, вершины которого соответствуют множествам набора, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества зависимы.

2) Будем называть *компонентой зависимости* набора $\mathfrak{S}$ любой набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, состоящий из всех множеств, соответствующих вершинам одной из компонент связности графа зависимости $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$.

3) Обозначим через $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ множество всех компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$.

4.1 Некоторые технические леммы

Перед основными теоремами раздела нам необходимо доказать несколько лемм.

Лемма 4.1. *Пусть наборы* $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *попарно не пересекаются,* $\mathfrak{S} = \cup_{i=1}^n \mathfrak{S}_i$. *Рассмотрим все множества вершин вида*

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \tag{4.1}$$

где $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$. *Выполняются следующие утверждения.*

1) *Любая часть* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *представляется в виде* (4.1).

2) *Из всех множеств вершин графа* G*, представимых в виде* (4.1)*, частями* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *являются те и только те, которые являются максимальными по включению среди множеств такого вида.*

3) *Если множество вершин* A *представимо в виде* (4.1) *и* $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$*, то* A *является подмножеством одного из множеств набора* $\mathfrak{S}$.

Доказательство. 1) Пусть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}_i$ не разделяет A, следовательно, существует часть $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$, содержащая A. Пусть

$$A' = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Включение $A \subset A'$ очевидно. Понятно, что никакое можество набора $\mathfrak{S}$ не разделяет A', следовательно, существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $A' \subset B$. Таким образом, $A \subset A' \subset B$, откуда следует, что $A = A' = B$.

2) Пусть множество $A \subset V(G)$, представимое в виде (4.1) — максимальное по включению среди множеств такого вида. Тогда A невозможно разделить никаким множеством из набора $\mathfrak{S}$. Если $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, то существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $B \supsetneq A$. По пункту 1 часть B также представима в виде (4.1). Противоречие с максимальностью A.

Пусть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Рассмотрим представление A в виде (4.1) и предположим, что A — не максимальное по включению среди множеств такого вида. Пусть множество B представляется в виде (4.1) и $A \subsetneq B$. Тогда B невозможно разделить никаким множеством из набора $\mathfrak{S}$, следовательно, A не является частью $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Противоречие.

3) Пусть $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \quad \text{где} \quad A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i).$$

Тогда существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $B \supsetneq A$. Рассмотрим представление

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} B_i, \quad \text{где} \quad B_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i).$$

Так как $B \neq A$, то $A_j \neq B_j$ для какого-то j. Следовательно, $A \subset A_j \cap B_j$, а такое пересечение обязательно является подмножеством одного из множеств набора $\mathfrak{S}_j$. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}(G)$ не пересекаются, а часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ такова, что ни одно из множеств набора $\mathfrak{T}$ ее не разделяет. Тогда $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T})$.*

Доказательство. Ни одно из множеств набора $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T}$ не разделяет A, поэтому существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T})$, что $A \subset B$. Кроме того, очевидно, существует содержащая B часть $A' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Таким образом, $A \subset B \subset A'$, откуда очевидно следует, что $A = B = A'$. $\square$

Следующая лемма характеризует границу части разбиения k-связного графа набором k-вершинных разделяющих множеств.

Лемма 4.3. *Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ и $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Вершина $x \in \mathrm{Int}(A)$ не смежна ни с одной из вершин множества $V(G) \setminus A$. Граница $\mathrm{Bound}(A)$ состоит из всех вершин части A, имеющих смежные вершины в $V(G) \setminus A$.*

2) *Если* $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{Bound}(A)$ *отделяет* $\mathrm{Int}(A)$ *от* $V(G) \setminus A$.

Доказательство. 1) Пусть вершина $x \in A$ смежна с вершиной $y \in V(G) \setminus A$. Тогда существует множество $S \in \mathfrak{S}$, отделяющее y от $A \ni x$, следовательно, $x \in S$. Это означает, что $x \in \mathrm{Bound}(A)$.

Наоборот, пусть $x \in \mathrm{Bound}(A)$. Тогда можно считать, что $x \in S \in \mathfrak{S}$. Часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ содержится в одной из частей $\mathrm{Part}(S)$. Из $|\mathrm{Part}(S)| \geq 2$ следует, что существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(S)$, что $\mathrm{Int}(B) \subset V(G) \setminus A$. Из k-связности графа G следует, что вершина x смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(B)$, откуда немедленно следует доказываемое утверждение.

2) Утверждение пункта 2 непосредственно следует из пункта 1. □

Лемма 4.4. 1) *Пусть* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *и часть* $A \in \mathrm{Part}(S)$ *таковы, что* $T \cap \mathrm{Int}(A) = \varnothing$. *Тогда* S *и* T *независимы, причем* T *не разделяет часть* A.

2) *Пусть множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимы, а часть* $A \in \mathrm{Part}(S)$ *содержит* T. *Тогда в* $\mathrm{Part}(T)$ *есть часть, содержащая все отличные от* A *части из* $\mathrm{Part}(S)$, *а все остальные части* $\mathrm{Part}(T)$ *являются подмножествами* A.

Доказательство. Индуцированный подграф графа G на множестве вершин $\mathrm{Int}(A)$ связен, а каждая вершина множества $S = \mathrm{Bound}(A)$ смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(A)$ и $T \cap \mathrm{Int}(A) = \varnothing$. Поэтому все вершины из $A \setminus T$ лежат в одной компоненте связности графа $G - T$, то есть, T не разделяет A и, следовательно, не разделяет S. Это означает, что множества S и T независимы.

2) По пункту 1, множество T не разделяет никакой отличной от A части из $\mathrm{Part}(S)$. Поскольку $S \setminus T \neq \varnothing$, все эти части содержатся в одной части из $\mathrm{Part}(T)$. Следовательно, все остальные части $\mathrm{Part}(T)$ — подмножества части A. □

Определение 4.2. Назовем наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми*, если они не пересекаются и любые два множества $S \in \mathfrak{S}$ и $T \in \mathfrak{T}$ независимы.

Понятно, что любые две компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$ независимы.

Лемма 4.5. *Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ независимы, а граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$ *связен. Тогда все множества набора $\mathfrak{S}$ лежат в одной части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, а никакая другая часть из* $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ *не содержит ни одного множества набора $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $T \in \mathfrak{T}$. Так как T и любое множество $S \in \mathfrak{S}$ независимы, то S содержится в некоторой части из $\mathrm{Part}(T)$. Пусть множества $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$ лежат в разных частях $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(T)$, соответственно (см. рисунок 4.1). Тогда $S_2 \cap \mathrm{Int}(A_1) = \varnothing$, следовательно, по лемме 4.4 множество S_2 не разделяет часть A_1, а значит и множество S_1. Таким образом, множества S_1 и S_2 независимы.

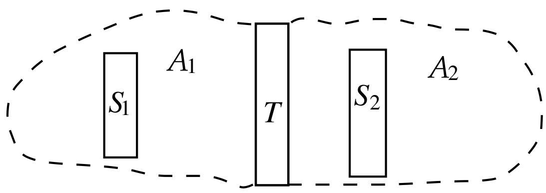


Рис. 4.1: Множества S_1 и S_2 из разных частей $\mathrm{Part}(T)$.

Отсюда в силу связности графа зависимости $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$ следует, что все множества набора $\mathfrak{S}$ содержатся в одной части из $\mathrm{Part}(T)$. Так как это утверждение верно для любого множества $T \in \mathfrak{T}$, то существует часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, содержащая все множества набора $\mathfrak{S}$.

Предположим, что отличная от A часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, содержит множество $S \in \mathfrak{S}$. Тогда $S \subset A \cap B$, но пересечение $A \cap B$ является подмножеством одного из множеств набора $\mathfrak{T}$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Лемма 4.6. *Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ независимы, часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ содержит все множества набора $\mathfrak{S}$, а часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ содержит все множества набора $\mathfrak{T}$. Тогда B содержит объединение всех отличных от A частей из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$.*

Доказательство. Рассмотрим отличную от A часть $A' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$. Если $\mathrm{Int}(A') = \varnothing$, то часть A' состоит из вершин множеств набора $\mathfrak{T}$ и, следовательно, $A' \subset B$. Далее будем рассматривать случай, когда $\mathrm{Int}(A') \neq \varnothing$. По лемме 4.1, существует представление

$$A' = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} A_T, \quad \text{где} \quad A_T \in \mathrm{Part}(T).$$

Рассмотрим любое множество $S \in \mathfrak{S}$: оно отделено каким-то множеством $T \in \mathfrak{T}$ от части A', следовательно, $S \cap \mathrm{Int}(A_T) = \varnothing$. По лемме 4.4, тогда существует такая часть $A_S \in \mathrm{Part}(S)$, что $A_S \supset A_T \supset A'$ (см. рисунок 4.2). Множество вершин $M = \cap_{S \in \mathfrak{S}} A_S$ содержит A'. Так как M невозможно разделить никаким множеством набора $\mathfrak{S}$, то существует часть $B' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, содержащая M, и, следовательно, содержащая A'.

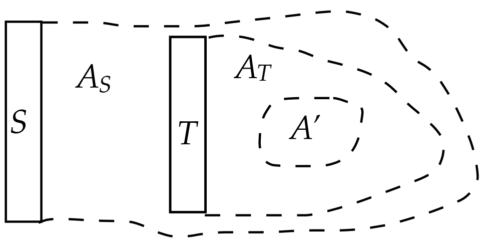


Рис. 4.2: Части A', A_T и A_S.

Предположим, что $B' \neq B$. Граница части $A' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ состоит из вершин множеств набора $\mathfrak{T}$ и, следовательно, содержится в B. Таким образом, из $B' \neq B$ следует

$$\mathrm{Bound}(A') \subset B \cap B' \subset S \in \mathfrak{S}, \tag{4.2}$$

Из $\mathrm{Int}(A') \neq \varnothing$ следует, что $|\mathrm{Bound}(A')| \geq k$. Вместе с (4.2) это означает, что $\mathrm{Bound}(A') = S$. По условию, $S \subset A$, следовательно,

$$S \subset A \cap A' \subset T \in \mathfrak{T},$$

откуда $S \in \mathfrak{T}$, что невозможно. Таким образом, сделанное выше предположение невозможно и $A' \subset B$. □

До конца этой главы мы будем считать, что $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S}) = \{\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_m\}$.

Определение 4.3. Будем говорить, что часть $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$ содержит компоненту зависимости $\mathfrak{S}_j$, если она содержит все входящие в $\mathfrak{S}_j$ множества. Такая часть существует и единственна по лемме 4.5, обозначим ее через $A_{i \supset j}$.

Переформулируем утверждение леммы 4.6 в обозначениях определения 4.3.

Следствие 4.1. *Часть* $A_{i \supset j}$ *содержит объединение всех частей* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_j)$*, кроме* $A_{j \supset i}$.

4.2 Взаимное расположение компонент зависимости

Каждой компоненте зависимости $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ поставим в соответствие разбиение остальных компонент зависимости на классы: каждый класс будут образовывать компоненты зависимости, содержащиеся в одной из частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$.

Определение 4.4. Гиперграф $\mathrm{Struct}(\mathrm{Comp}(\mathfrak{S}))$ описанного выше разбиения мы будем называть *гиперграфом компонент зависимости* набора $\mathfrak{S}$ и для простоты обозначать через $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Теорема 4.1. *Пусть G — k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Гиперграф компонент зависимости* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ *является гипердеревом.*

2) *Пусть* $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, *а* $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ *— компоненты связности гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S}) - \mathfrak{T}$. *Тогда компоненты зависимости из множества* $\mathcal{C}_i$ *содержатся в одной части* $B_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, *причем* $B_i \neq B_j$ *при* $i \neq j$.

3) *Пусть* $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, *а часть* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ *содержит хотя бы одно множество из* $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$. *Тогда существует единственное гиперребро гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, *вершинами которого являются* $\mathfrak{T}$ *и несколько (быть может, одна) компонент зависимости, лежащих в части* A.

Доказательство. 1) и 2) Проверим выполнение условия из теоремы 3.2 для описанного выше разбиения множества $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$. Пусть компонента зависимости $\mathfrak{S}_i$ разделяет $\mathfrak{S}_j$ и $\mathfrak{S}_\ell$, то есть, части $A_{i\supset j}$ и $A_{i\supset \ell}$ различны. Тогда по следствию 4.1 мы имеем $A_{j\supset i} \supset A_{i\supset \ell}$, то есть, $\mathfrak{S}_j$ не разделяет $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_\ell$. Теперь утверждение 1 и 2 настоящей теоремы следует из теоремы 3.2.

3) Как показано выше, для каждой компоненты из $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ либо все ее множества содержатся в A, либо ни одно из них не лежит в A. Из условия следует, что множество $\mathcal{C}_A \subset \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ компонент зависимости, все множества которых содержатся в A, непусто. Из пунктов 1 и 2 следует, что компоненты зависимости из $\mathcal{C}_A$ образуют компоненту связности гиперграфа $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S}) - \mathfrak{T}$. Теперь пункт 3 настоящей теоремы следует из пункта 5 теоремы 3.1. $\square$

Далее мы опишем части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ с помощью гиперребер гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$. Нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Лемма 4.7. *Пусть* $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, *граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{T})$ *связен, множество* $T \in \mathfrak{R}_k(G) \setminus \mathfrak{T}$ *является границей части* $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, *а все множества набора* $\mathfrak{T}$ *лежат в части* $F \in \mathrm{Part}(T)$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Часть* B *представляет собой объединение всех отличных от* F *частей* $\mathrm{Part}(T)$.

2) *Никакая отличная от B часть из* $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ *не содержит множество* T.

Доказательство. 1) Очевидно, наборы $\mathfrak{T}$ и $\{T\}$ независимы. По лемме 4.6, часть B содержит объединение всех отличных от F частей из $\mathrm{Part}(T)$. Учитывая, что любая часть из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ с границей T есть объединение нескольких частей из $\mathrm{Part}(T)$, мы получаем утверждение пункта 1.

2) По лемме 4.5, никакая отличная от B часть из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ не может содержать множество T, а все множества набора $\mathfrak{T}$ лежат в одной части $F \in \mathrm{Part}(T)$. □

Лемма 4.8. *Пусть графы зависимости непересекающихся наборов* $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *связны, а множество* $R \in \mathfrak{R}_k(G) \setminus (\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2)$ *таково, что все множества из* $\mathfrak{T}_1$ *и* $\mathfrak{T}_2$ *содержатся в одной части* $F \in \mathrm{Part}(R)$. *Предположим, что существует часть*

$$A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}_1) \cap \mathrm{Part}(\mathfrak{T}_2) \quad \text{с} \quad \mathrm{Bound}(A) = R.$$

Тогда наборы $\mathfrak{T}_1$ *и* $\mathfrak{T}_2$ *не являются независимыми.*

Доказательство. Предположим противное, пусть наборы $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ независимы. По лемме 4.7, часть A является объединением всех отличных от F частей из $\mathrm{Part}(R)$. По лемме 4.5, все множества набора $\mathfrak{T}_1$ лежат в одной части $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}_2)$. Поскольку

$$R \subset \bigcup_{T \in \mathfrak{T}_1} T \subset B,$$

то по пункту 2 леммы 4.7 имеем $A = B$. Однако, все множества набора $\mathfrak{T}_1$ лежат в F, причем $F \cap A = R$. Следовательно, все эти множества совпадают с R, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Лемма 4.9. *Пусть* $R = \{\mathfrak{S}_1, \dots \mathfrak{S}_n\}$ *— гиперребро гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$. *Для всех* $i \in \{1, \dots, n\}$ *пусть* $A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}_i)$ *— часть, содержащая мно-*

жества всех остальных компонент зависимости из R. Тогда для множества вершин

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

выполняется одно из двух утверждений.

1° *Множество A является частью* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, *содержит хотя бы k вершин, причем*

$$\mathrm{Bound}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Bound}(A_i).$$

2° $n = 2$, $\mathrm{Bound}(A_1) = \mathrm{Bound}(A_2) = A \in \mathfrak{S}$, *причем одна из компонент зависимости $\mathfrak{S}_1$ или $\mathfrak{S}_2$ — это $\{A\}$.*

Доказательство. а. Рассмотрим любую компоненту зависимости $\mathfrak{S}_\ell$, не входящую в R (если такая существует). Рассмотрим все пути в $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ от $\mathfrak{S}_\ell$ до гиперребра R, внутренние вершины которых не входят в R и отметим множество всех их концов в гиперребре R. Пусть мы отметили хотя бы две вершины (то есть, компоненты зависимости) из R. Тогда в $\mathrm{Struct}(V)$ существует цикл Z, содержащий две отмеченные вершины и хотя бы одну вершину не из R (см. рисунок 4.3a), а следовательно, существует и гиперребро E, содержащее все вершины Z. Это гиперребро не совпадает с R и $|E \cap R| \geq 2$, что противоречит пункту 2 теоремы 3.1.

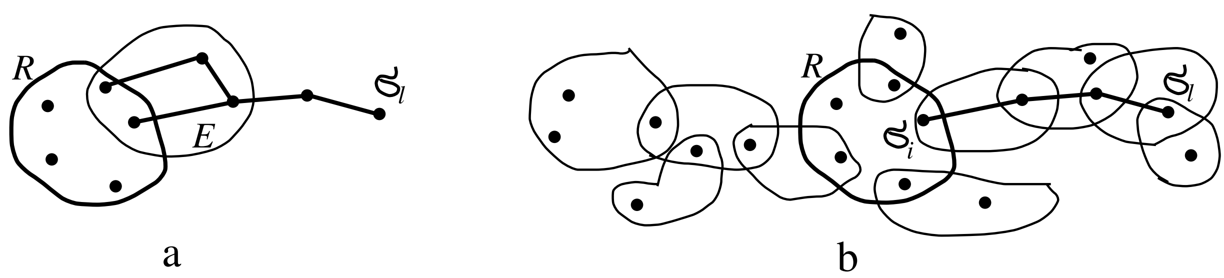


Рис. 4.3: Гипердерево $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ и его гиперребро R.

Значит, каждый путь в $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ от $\mathfrak{S}_\ell$ до гиперребра R, внутренние вершины которого не входят в R, имеет концом одну и ту же компоненту зависимости — пусть это $\mathfrak{S}_i$ (где $1 \leq i \leq n$). Это означает, что $\mathfrak{S}_i$ отделяет $\mathfrak{S}_\ell$ от компонент зависимости, входящих в R и отличных от $\mathfrak{S}_i$ (см. рисунок 4.3b). Тогда по утверждению 2 теоремы 4.1 мы имеем $A_{i \supset \ell} \neq A_i$. Таким образом, ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}_\ell$ не может содержаться в A_i, а стало быть, и в A.

b. По следствию 4.1, из $A_{i \supset \ell} \neq A_i$ следует, что $A_{\ell \supset i} \supset A_i \supset A$. Следовательно, множества компонент зависимости, не принадлежащих гиперребру R, не разделяют A. Тогда по лемме 4.1 либо $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, либо A — подмножество одного из множеств набора $\mathfrak{S}$. Пусть

$$R = \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{Bound}(A_j).$$

Поскольку $A_i \supset R$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, то $A \supset R$. Из условия леммы следует, что $\mathrm{Int}(A_j) \neq \varnothing$ для каждого j, поэтому $|\mathrm{Bound}(A_j)| \geq k$. Следовательно, $|R| \geq k$.

Пусть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Рассмотрим вершину $x \in \mathrm{Bound}(A)$. По лемме 4.3 существует вершина $y \notin A$, смежная с x. Не умаляя общности предположим, что $y \notin A_i$. Тогда по лемме 4.3 мы имеем $x \in \mathrm{Bound}(A_i) \subset R$. Наоборот, каждая вершина из R принадлежит части A и какому-то из множеств набора $\mathfrak{S}$. Таким образом, $\mathrm{Bound}(A) = R$.

Пусть $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. По пункту 3 леммы 4.1, тогда $R \subset A \subset S \in \mathfrak{S}$. Так как $|S| = k$ и $|R| \geq k$, мы имеем $R = A = S$ и, более того,

$$\mathrm{Bound}(A_1) = \mathrm{Bound}(A_2) \cdots = \mathrm{Bound}(A_n) = A \in \mathfrak{S}.$$

Из части **a** доказательства следует, что множество $A \in \mathfrak{S}$ должно принадлежать одной из компонент зависимости гиперребра R. Тогда не умаляя общности можно считать, что $A \in \mathfrak{S}_1$.

Так как $A = \mathrm{Bound}(A_1)$ — граница части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_1)$, то A и любое множество набора $\mathfrak{S}_1$ независимы, откуда следует, что $\mathfrak{S}_1 = \{A\}$. Предположим, что $n \geq 3$. Тогда по лемме 4.7 множество B, равное объединению всех отличных от A_1 частей из $\mathrm{Part}(A)$, принадлежит $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_2)\cap\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_3)$. Однако, компоненты зависимости $\mathfrak{S}_2$ и $\mathfrak{S}_3$ — независимые наборы, что противоречит лемме 4.8. $\square$

Определение 4.5. Определенную в лемме 4.9 часть A мы назовем *частью, соответствующей гиперребру* R (даже в случае, когда $A \notin \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$).

Теорема 4.2. *Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть* $\mathfrak{S}' \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ *и часть* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ *таковы, что A не содержит множеств из* $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$. *Тогда* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

2) *Пусть* $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. *Тогда либо часть H соответствует некоторому гиперребру R гипердерева* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, *либо существует такая компонента зависимости* $\mathfrak{S}' \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, *что* $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$.

Доказательство. 1) Так как часть A не содержит множеств из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$, то по лемме 4.6 ни одно из этих множеств не разделяет A. Тогда по следствию 4.2 мы имеем $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

2) Докажем утверждение индукцией по количеству компонент зависимости в наборе. База для случая, когда компонента зависимости одна, очевидна. Докажем переход. Пусть $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ — компонента зависимости, соответствующая крайней вершине гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$; эта компонента зависимости не разделяет никакие две другие и по теореме 3.1 принадлежит ровно одному гиперребру R гипердерева $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Утверждение пункта 2 для набора $\mathfrak{T}' = \mathfrak{S}\setminus\mathfrak{T}$ уже доказано. Пусть часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ содержит все множества набора $\mathfrak{T}'$, а часть $B' \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}')$ содержит все множества набора $\mathfrak{T}$ (такие части существуют по лемме 4.5). По лемме 4.1, для любой части $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ существует представление

$$H = H_1 \cap H_2, \qquad \text{где} \quad H_1 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}) \quad \text{и} \quad H_2 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T}').$$

Если $H_1 = B$ и $H_2 = B'$, то H — часть, соответствующая гиперребру R. По лемме 4.6 часть B содержит объединение всех отличных от B' частей из

$\mathrm{Part}(\mathfrak{T}')$, а часть B' содержит объединение всех отличных от B частей из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$. Тогда по следствию 4.2 остальные части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ — это либо части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, либо части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{T}')$, откуда следует доказываемое утверждение. $\square$

Глава 5

Удаление вершин из k-связного графа

5.1 Удаление вершин из двусвязного графа с сохранением двусвязности

Если из связного графа удалить любую внутреннюю вершину любого блока, то связность не нарушится. Начнем с описания множества вершин, удаление которых не лишает граф двусвязности.

Лемма 5.1. *Пусть G — двусвязный граф, $a \in A \in \mathrm{Part}(G)$. Тогда граф $G - a$ двусвязен если и только если $a \in \mathrm{Int}(A)$ и часть A — блок или треугольник.*

Доказательство. Граф $G - a$ двусвязен если и только если a не принадлежит множествам из $\mathfrak{R}_2(G)$. Вершина a не принадлежит одиночным множествам если и только если $a \in \mathrm{Int}(A)$. Остается добавить, что по пункту 2 теоремы 1.2 все вершины циклов длины хотя бы 4 принадлежат неодиночным множествам, а внутренние вершины блоков и треугольников — не принадлежат. $\square$

Если удалить из связного графа множество, состоящее из нескольких внутренних вершин блоков и содержащее не более чем по одной вершине каждого блока, то связность сохранится. В следующей теореме будет доказано аналогичное утверждение для двусвязного графа.

Теорема 5.1. *Пусть G — двусвязный граф, а W — множество, состоящее из внутренних вершин непустых частей-блоков графа G и содержащее не более чем по одной вершине из каждого блока. Тогда граф $G - W$ двусвязен.*

Доказательство. 1. Предположим, что утверждение теоремы неверно и рассмотрим минимальное по включению множество W, вершины которого принадлежат внутренностям разных непустых блоков и такое, что граф $G^* = G - W$ недвусвязен. Так как внутренние вершины блоков не входят в множества из $\mathfrak{R}_2(G)$, мы имеем $|W| \geq 2$. Так как вершины W принадлежат внутренностям разных блоков, существует множество $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}_2(G)$, разделяющее W.

Так как S не содержит вершин из W и разделяет W, части $\mathrm{Part}(S)$ можно разбить на две группы так, чтобы в каждой группе была часть, содержащая вершину из W. Пусть U_1 и U_2 — объединения вершин этих частей,

$$U^* = V(G) \setminus W = V(G^*), \quad U_1^* = U_1 \setminus W, \quad U_2^* = U_2 \setminus W.$$

Так как каждый блок графа G содержит хотя бы 4 вершины и не более чем одна из них удалена, множества вершин U_1^* и U_2^* содержат хотя бы по три вершины. Положим

$$G_1^* = G(U_1^*), \quad G_2^* = G(U_2^*), \quad G_1 = G_1^* + ab, \quad G_2 = G_2^* + ab.$$

2. Рассмотрим вершину $x \in U_2 \cap W$. Из выбора множества W мы знаем, что граф $G_x = G - (W \setminus \{x\})$ двусвязен. Очевидно, множество S отделяет U_1^* от $U_2^* \cup \{x\}$ в двусвязном графе G_x. Поэтому, с помощью теоремы Менгера нетрудно понять, что граф G_1 не имеет точек сочленения. Так как $|U_1^*| \geq 3$, граф G_1 двусвязен. Аналогично, граф G_2 двусвязен.

3. *Докажем, что от любой вершины $x \in U^*$ в графе G^* существует xa-путь P_a и xb-путь P_b, не имеющие общих вершин, кроме x.*
Не умаляя общности положим, что $x \in U_1^*$. Тогда по теореме Менгера два искомых пути есть в двусвязном графе G_1, эти же пути есть и в G^*.

4. *Теперь покажем, что для любой вершины $v \in U^*$ в графе $G^* - v$ все вершины из $U^* \setminus \{v\}$ связаны, то есть, граф $G^* = G - W$ двусвязен.*
Рассмотрим любую вершину $x \notin S$. По пункту 3, в графе G^* существует два непересекающихся пути от x до вершин множества S. Один из этих путей есть и в $G^* - v$.

Остается доказать, что при $v \notin S$ вершины a и b множества S связаны в графе $G^* - v$. Не умаляя общности можно считать, что $v \in U_1^*$. Тогда существует ab-путь P в графе $G^* - v$, проходящий по вершинам из U_2^*, значит, a и b связаны в $G^* - v$.

Двусвязность графа G^* противоречит предположению. Следовательно, граф $G - W$ двусвязен для любого множества W, удовлетворяющего условию. □

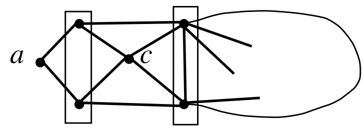


Рис. 5.1: Граф теряет двусвязность при удалении вершин a и c.

Отметим, что утверждение теоремы не может быть распространено на внутренние вершины непустых частей-треугольников двусвязного графа G. Если часть-треугольник A имеет внутреннюю вершину, то мы имеем $|\mathrm{Int}(A)| = 1$ и $|\mathrm{Bound}(A)| = 2$. Следовательно, $\mathrm{Bound}(A) \in \mathfrak{O}(G)$, а значит, часть A — крайняя. На рисунке 5.1 изображен граф, в котором отмечена внутренняя вершина a крайней части-треугольника и внутренняя вершина c части-блока. Их одновременное удаление делает граф недвусвязным.

5.2 Удаление вершин из k-связного графа при $k > 2$

В этом разделе G — это k-связный граф. Напомним определения и сформулируем основной результат раздела.

Определение 5.1. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, а H — компонента связности графа $G - S$. Мы будем называть H *фрагментом*. Множество S будем называть *границей* фрагмента H и обозначать через $\mathrm{Bound}(H)$.

Покажем, что понятия фрагмента и его границы имеют самостоятельный смысл.

Лемма 5.2. *Пусть H — фрагмент в k-связном графе G. Тогда*

$$\mathrm{Bound}(H) = \mathrm{N}_G(H).$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{Bound}(H) = S$. Тогда $H = \mathrm{Int}(A)$ для некоторой части $A \in \mathrm{Part}(S)$. Из k-связности графа G следует, что каждая вершина множества S смежна хотя бы с одной вершиной из H, то есть, $S \subset \mathrm{N}_G(H)$. Поскольку $S = \mathrm{Bound}(A)$ отделяет $H = \mathrm{Int}(A)$ от $V(G) \setminus A$, то $S = \mathrm{N}_G(A)$. $\square$

Замечание 5.1. Пусть G — k-связный граф, а H — его фрагмент. Отметим, что индуцированный подграф $G(H)$ связен, а каждая вершина из $\mathrm{Bound}(H)$ смежна хотя бы с одной вершиной из H в силу k-связности G.

Определение 5.2. Пусть G — k-связный граф, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$.

1) Назовем часть A *правильной*, если $|\mathrm{Bound}(A)| = k$ и $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$.

2) Пусть $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. Назовем множество $S \in \mathfrak{R}_k(G)$ *существенным* для части A, если не существует множества $T \in \mathfrak{R}_k(G)$, отделяющего S от $\mathrm{Int}(A)$.

Обозначим через $\mathrm{Bound}_2(A)$ множество всех граничных вершин части A, входящих в два и более существенных для части A множества. Назовем часть A *хорошей*, если $|\mathrm{Int}(A)| > |\mathrm{Bound}_2(A)|$.

Замечание 5.2. 1) Внутренность правильной части $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$ — это фрагмент графа G.

2) Несложно понять, что правильная часть обязательно является хорошей. Действительно, если часть A — правильная, то множество $\mathrm{Bound}(A) \in \mathfrak{R}_k(G)$ отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от любого другого множества $T \in \mathfrak{R}_k(G)$, то есть, $\mathrm{Bound}(A)$ — единственное существенное множество для правильной части A. Поэтому $\mathrm{Bound}_2(A) = \varnothing$.

Теорема 5.2. *Пусть G — k-связный граф, причем степень любой вершины, входящей в одно из множеств $\mathfrak{R}_k(G)$, не менее $2k-1$, а любой фрагмент имеет хотя бы $\frac{k+1}{2}$ вершин. Тогда существует множество W, содержащее по одной внутренней вершине каждой хорошей части $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$, такое, что для любого $W' \subset W$ граф $G - W'$ является k-связным.*

Перед доказательством теоремы мы сформулируем и докажем ряд технических лемм.

Лемма 5.3. *Пусть G — k-связный граф, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$, $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, $S \in \mathfrak{R}_k(G)$ — несущественное для части A множество. Тогда существует существенное для части A множество $T \in \mathfrak{R}_k(G)$, которое отделяет S от $\mathrm{Int}(A)$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $T \in \mathfrak{R}_k(G)$, которое отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от S. Это означает, что существуют такие различные части

$$H, H' \in \mathrm{Part}(T), \quad \text{что} \quad \mathrm{Int}(A) \subset H \quad \text{и} \quad S \subset H'.$$

Мы выберем T так, чтобы часть H была минимальной по включению среди всех возможных вариантов. Предположим, что T — несущественное для части A множество. Тогда существует множество $R \in \mathfrak{R}_k(G)$, отделяющее T от $\mathrm{Int}(A)$. То есть, существуют такие части

$$F, F' \in \mathrm{Part}(R), \quad \text{что} \quad \mathrm{Int}(A) \subset F \quad \text{и} \quad T \subset F'.$$

Если множество R не лежит в части H, то $R \cap \mathrm{Int}(H) = \varnothing$ и по лемме 4.4 мы знаем, что R не разделяет H и, в частности, не отделяет T от $\mathrm{Int}(A)$. Значит, $R \subset H$. Тогда часть $F' \in \mathrm{Part}(R)$, содержащая $T \setminus R$, содержит и объединение всех отличных от H частей $\mathrm{Part}(T)$. Следовательно, $F \subsetneq H$, что противоречит выбору множества T. Таким образом, множество T — существенное для части A. $\square$

Опишем разбиение графа парой зависимых множеств из $\mathfrak{R}_k(G)$.

Лемма 5.4. *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы,*

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, \ldots, A_m\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, \ldots, B_n\},$$
$$P = T \cap S, \quad T_i = T \cap \mathrm{Int}(A_i), \quad S_j = S \cap \mathrm{Int}(B_j), \quad G_{i,j} = A_i \cap B_j.$$

Тогда все множества $T_1, \ldots, T_m$; $S_1, \ldots, S_n$ непусты,

$\mathrm{Part}(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in \{1,\ldots,m\},\, j \in \{1,\ldots,n\}}$, *причем* $\mathrm{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j$.

Доказательство. В силу леммы 4.4 и зависимости множеств S и T,

$$T_i = T \cap \mathrm{Int}(A_i) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad S_j = S \cap \mathrm{Int}(B_j) \neq \varnothing.$$

Части $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ — это максимальные по включению среди множеств вида $G_{i,j}$. Докажем, что это все такие множества. Пусть $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)$. Не умаляя общности будем считать, что $\alpha \neq \gamma$. Тогда

$$T_\alpha \subset G_{\alpha,\beta}, \quad \text{и} \quad T_\gamma \not\subset G_{\alpha,\beta},$$

следовательно, $G_{\alpha,\beta} \not\subset G_{\gamma,\delta}$. Утверждение $\mathrm{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j$ очевидно. $\square$

Далее для описания разбиения графа парой зависимых разделяющих множеств мы будем использовать обозначения из леммы 5.4.

Лемма 5.5. *Пусть все фрагменты k-связного графа G содержат хотя бы по $\frac{k+1}{2}$ вершин, а множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы. Тогда каждое из* *них делит граф на две части, причем можно занумеровать эти части так, что*

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2\},$$
$$|\mathrm{Bound}(G_{1,2})| = |\mathrm{Bound}(G_{2,1})| = k, \quad |T_1| = |S_1|, \quad |T_2| = |S_2|.$$

Доказательство. 1. Пусть

$$\mathrm{Part}(S) = \{A_1, \dots, A_m\}, \quad \mathrm{Part}(T) = \{B_1, \dots, B_n\}.$$

Изобразим разбиение графа множествами S и T в виде таблицы $m \times n$, где клетка с координатами (i, j) соответствует части $G_{i,j} = A_i \cap B_j$: мы запишем в этой клетке количество вершин в $\mathrm{Int}(G_{i,j})$.

Предположим, что есть столбец или строка, содержащая только нули (не умаляя общности будем считать, что это первый столбец). Тогда $\mathrm{Int}(G_{1,j}) = \varnothing$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$ и

$$\mathrm{Int}(A_1) = \left(\bigcup_{j \in \{1,\dots,n\}} \mathrm{Bound}(G_{1,j}) \right) \setminus S = T_1,$$

следовательно, $|T_1| \geq \frac{k+1}{2}$. Значит, для каждого $i \in \{2, \dots, m\}$ мы имеем $|T_i| \leq \frac{k-1}{2}$. Не умаляя общности, положим $|S_1| \geq |S_2|$, тогда $|S_2| \leq \frac{k}{2}$. Отметим, что для каждого $i \in \{2, \dots, m\}$

$$|T_1| + |S_1| + |P| + |T_i| + |S_2| + |P| \leq |T| + |S| = 2k,$$

следовательно,

$$|\mathrm{Bound}(G_{i,2})| = |T_i| + |S_2| + |P| < k.$$

Если $\mathrm{Int}(G_{i,2}) \neq \varnothing$, то по лемме 4.3 состоящее менее чем из k вершин множество $\mathrm{Bound}(G_{i,2})$ отделяет от остальных вершин графа непустое множество $\mathrm{Int}(G_{i,2})$, что противоречит k-связности графа G. Следовательно, $\mathrm{Int}(G_{i,2}) = \varnothing$ для всех $i \in \{2, \dots, m\}$. Напомним, что по предположению $\mathrm{Int}(G_{1,2}) = \varnothing$. Следовательно, фрагмент

$$\mathrm{Int}(B_2) = \left(\bigcup_{i \in \{1,\dots,m\}} \mathrm{Bound}(G_{i,2}) \right) \setminus T = S_2, \quad \text{и} \quad |S_2| \leq \frac{k}{2},$$

что противоречит условию.

2. Таким образом, в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы один не ноль. Следовательно, существуют пары индексов (α, β) и (γ, δ) такие, что $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \delta$, $\mathrm{Int}(G_{\alpha,\beta}) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Int}(G_{\gamma,\delta}) \neq \varnothing$. Не умаляя общности, положим $\alpha = \delta = 1$ и $\beta = \gamma = 2$. Тогда

$$|\mathrm{Bound}(G_{1,2})| \geq k \quad \text{и} \quad |\mathrm{Bound}(G_{2,1})| \geq k.$$

Заметим, что

$$2k \leq |\mathrm{Bound}(G_{1,2})| + |\mathrm{Bound}(G_{2,1})| = \\ 2|P| + |T_1| + |T_2| + |S_1| + |S_2| \leq |S| + |T| = 2k.$$

Значит, оба неравенства обращаются в равенства, откуда следует, что

$$T = T_1 \cup T_2 \cup P \quad \text{и} \quad S = S_1 \cup S_2 \cup P. \tag{5.1}$$

По лемме 5.4 из (5.1) следует, что

$$|\mathrm{Part}(S)| = |\mathrm{Part}(T)| = 2 \quad \text{и} \quad |\mathrm{Bound}(G_{1,2})| = |\mathrm{Bound}(G_{2,1})| = k.$$

Тогда

$$|T_1| + |S_2| + |P| = |\mathrm{Bound}(G_{1,2})| = k = |T| = |T_1| + |T_2| + |P|,$$

откуда следует, что $|S_2| = |T_2|$. Аналогично доказывается, что $|S_1| = |T_1|$. □

Лемма 5.6. *Пусть H — минимальный по включению фрагмент k-связного графа G, все фрагменты которого содержат хотя бы по $\frac{k+1}{2}$ вершин. Тогда существует такая правильная часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$, что*

$$H = \mathrm{Int}(A).$$

Доказательство. Пусть

$$S = \mathrm{Bound}(H), \quad \mathrm{Part}(S) = \{A_1, \ldots, A_m\} \quad \text{и} \quad H = \mathrm{Int}(A_1).$$

Поскольку $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, то либо $A_1 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$, либо A_1 — объединение нескольких частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$. Таким образом, нам нужно доказать, что ни одно из множеств набора $\mathfrak{R}_k(G)$ не разделяет A_1. Предположим противное, пусть множество $T \in \mathfrak{R}_k(G)$ разделяет A_1. Из леммы 4.4 следует, что тогда $T \cap \mathrm{Int}(A_1) \neq \varnothing$. Рассмотрим два случая.

1. *Множества S и T независимы.*

Из независимости S и T следует, что $T \subset A_1$. По лемме 4.4, тогда T не разделяет ни одной из частей $A_2, \ldots, A_m$. Так как $S' = S \setminus T \neq \varnothing$, множество T не разделяет $(V(G) \setminus A_1) \cup S'$. Значит, существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(T)$, что $B \subset A \setminus S'$. Однако, тогда фрагмент

$$\mathrm{Int}(B) \subset (A \setminus S') \setminus \mathrm{Bound}(B) = A \setminus (S \cup T) \subsetneq H,$$

что противоречит минимальности H.

2. *Множества S и T зависимы.*

Пусть $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Будем использовать обозначения из леммы 5.4. По лемме 5.5 можно выбрать нумерацию частей $\mathrm{Part}(T)$ так, что $|\mathrm{Bound}(G_{1,2})| = |\mathrm{Bound}(G_{2,1})| = k$. Тогда $\mathrm{Int}(G_{1,2}) = \varnothing$ (в противном случае $\mathrm{Int}(G_{1,2}) \subsetneq H$ — строго меньший фрагмент, см. рисунок 5.2).

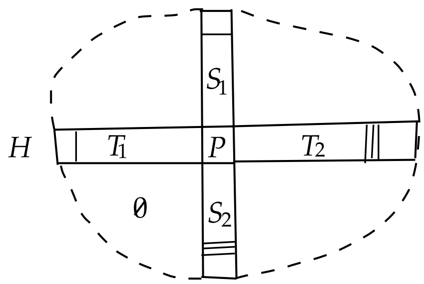


Рис. 5.2: Фрагмент H и множество T.

По лемме 5.5, мы имеем $|T_1| = |S_1|$. Если $|T_1| < \frac{k-|P|}{2}$, то $|R(G_{1,1})| < k$. В этом случае $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \varnothing$ и $H = T_1$, что невозможно: тогда $|H| < \frac{k+1}{2}$.

Пусть $|T_1| = \frac{k-|P|}{2}$. Если при этом $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \neq \varnothing$, то $|\mathrm{Bound}(G_{1,1})| = k$ и $\mathrm{Int}(G_{1,1}) \subsetneq H$ — строго меньший фрагмент, что невозможно. Если же $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \varnothing$, то $|H| = |T_1| < \frac{k+1}{2}$, что также невозможно.

Остается случай, когда $|T_1| > \frac{k-|P|}{2}$. Тогда $|T_2| = |S_2| < \frac{k-|P|}{2}$ и

$$|\mathrm{Bound}(G_{2,2})| = 2k - |P| - |T_1| - |S_1| < k,$$

а значит, $\mathrm{Int}(G_{2,2}) = \varnothing$. Но тогда фрагмент $\mathrm{Int}(B_2) = S_2$ состоит менее чем из $\frac{k+1}{2}$ вершин, что невозможно. Это противоречие завершает разбор случаев. $\square$

Лемма 5.7. *Пусть G — k-связный граф, любой фрагмент которого содержит хотя бы $\frac{k+1}{2}$ вершин. Пусть множество $W \subset V(G)$ состоит из внутренних вершин частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$, причем $|W| \geq 2$ и никакие две его вершины не принадлежат одной части.*

Предположим, что граф $G-W$ не является k-связным, но для любого собственного подмножества $W' \subsetneq W$ граф $G-W'$ является k-связным. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — все множества из $\mathfrak{R}_k(G)$, разделяющие W, а

$$R = \bigcap_{i=1}^{n} R_i.$$

Тогда после удаления любых $k-1$ вершин из графа $G-W$ все вершины, не входящие в R, попадут в одну компоненту связности. Более того, количество не вошедших в эту компоненту вершин из множества R не превосходит $\frac{k-1}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим множество R_i (где $i \in \{1, \ldots, n\}$), пусть $\mathrm{Part}(R_i) = \{A_1, \ldots, A_\ell\}$. Существуют две вершины $w_1, w_2 \in W$, разделенные множеством R_i, пусть $w_1 \in \mathrm{Int}(A_1)$ и $w_2 \in \mathrm{Int}(A_2)$. Введем обозначения

$$A_j^* = A_j \setminus W, \quad G_j^* = G(A_j^*), \quad U_j = A_j^* \setminus R_i, \quad G^* = G - W.$$

По условию, граф $G - (W \setminus \{w_1\})$ является k-связным. При этом из частей $A_2, \ldots, A_\ell$ мы удалили все входящие в них вершины множества W. Тогда по теореме Менгера для каждого $j \in \{2, \ldots, \ell\}$ и для любой вершины

$x \in U_j$ в графе G_j^* существует k вершинно непересекающихся путей от x до различных вершин множества R_i. Рассмотрев граф $G - (W \setminus \{w_2\})$, мы поймем, что аналогичное свойство верно и для $j = 1$.

Пусть $T \subset V(G^*)$, $|T| = k - 1$. Введем обозначения

$$R^* = R_i \setminus T, \quad t' = |T \cap R_i|, \quad t_j = |T \cap U_j|.$$

Мы хотим доказать, что *в графе $G^* - T$ все вершины не из R^* связаны и среди них есть вершина, связанная более чем с половиной вершин из R^*.* Рассмотрим два случая.

1. *Хотя бы два из множеств $U_1 \setminus T, \ldots, U_\ell \setminus T$ непусты.*
Пусть $x \in U_p \setminus T$ и $y \in U_q \setminus T$, $p \neq q$. Мы знаем, что в графе G^* от вершины x есть k не имеющих общих вершин путей до всех вершин множества R_i. Значит, в $G^* - T$ есть хотя бы $k - t_p - t'$ вершинно непересекающихся путей от x до разных вершин из R^*. Аналогично, в графе $G^* - T$ есть $k - t_q - t'$ вершинно непересекающихся путей от y до разных вершин из R^*. Так как

$$t_p + t_q = |T \cap U_p| + |T \cap U_p| \leq |T \setminus (T \cap R_i)| = k - 1 - t' < k - t' = |R^*|,$$

в графе $G^* - T$ существуют пути от x и y до общей вершины из R^*. Таким образом, любые две не принадлежащие $R_i \cup T$ вершины из разных частей в графе $G^* - T$ связаны, откуда следует, что все вершины не из R_i связаны в графе $G^* - T$.

Не умаляя общности, положим $t_p \leq t_q$. Тогда вершина x связана в графе $G^* - T$ более чем с половиной вершин из R^*.

2. *Ровно одно из множеств $U_1 \setminus T, \ldots, U_\ell \setminus T$ непусто.*
Пусть $U_1 \setminus T \neq \varnothing$. Рассмотрим две вершины $x, y \in U_1 \setminus T$. Аналогично пункту 1 получаем, что в графе $G^* - T$ есть хотя бы $k - t_1 - t'$ вершинно непересекающихся путей от x до разных вершин из R^* и хотя бы $k - t_1 - t'$ вершинно непересекающихся путей от y до разных вершин из R^*. Если

$$2(k - t_1 - t') > |R^*| = k - t', \tag{5.2}$$

то существуют пути от x и y до общей вершины из R^*, то есть, x и y связаны в графе $G^* - T$. Предположим, что неравенство (5.2) не выполнено. Тогда $t_1 \ge \frac{k-t'}{2}$ и

$$t_2 \le |T \setminus (T \cap R_i)| - t_1 \le k - 1 - t' - \frac{k-t'}{2} \le \frac{k-t'}{2} - 1. \tag{5.3}$$

Из $U_2 \setminus T = \varnothing$ следует, что

$$T \supset A_2 \setminus (R_i \cup W) = \mathrm{Int}(A_2) \setminus W.$$

Фрагмент $\mathrm{Int}(A_2)$ содержит хотя бы один минимальный по включению фрагмент H. По лемме 5.6, тогда $H = \mathrm{Int}(B)$, где $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$. Множество W содержит не более одной вершины из H, но тогда T содержит все остальные вершины из H. Следовательно,

$$t_2 \ge |H| - 1 \ge \frac{k-1}{2},$$

что противоречит неравенству (5.3). Следовательно, неравенство (5.2) выполнено, а это означает, что в графе $G^* - T$ все вершины не из R_i связаны и среди них есть вершина x, связанная более чем с половиной вершин из R^*.

3. *Все множества $U_1 \setminus T, \ldots, U_\ell \setminus T$ пусты.*
В этом случае $V(G) = W \cup T \cup R_i$. Существуют непересекающиеся минимальные по включению фрагменты $H_1 \subset U_1$ и $H_2 \subset U_2$ и аналогично пункту 2 множество T содержит все их вершины, не попавшие в W. Тогда из $|T| = k - 1$ следует, что

$$T = H_1 \cup H_2 \setminus W, \quad |H_1| = |H_2| = \frac{k+1}{2} \quad \text{и} \quad \ell = 2.$$

Более того, если H — отличная от H_1 и H_2 хорошая часть (не важно, правильная или нет), то $H \setminus W$ должно содержать хотя бы одну вершину и эта вершина должна лежать в T, что невозможно. Таким образом, хороших частей ровно две, откуда следует $|W| = 2$ и

$$V(G) = |W| + |T| + |R_i| = 2k + 1.$$

Граф $G - W - T = G(R_i)$ должен быть несвязным, но каждая вершина из R_i имеет в G степень не менее $2k-1$, то есть, может быть несмежна максимум с одной из вершин. В нашем случае $k > 2$, поэтому очевидно, что граф $G(R_i)$ в таком случае связен, противоречие. Таким образом, этот случай невозможен.

Итак, в любом случае в графе $G^* - T$ все вершины не из множества R_i связаны, пусть они попали в компоненту связности Y. Из выполненного выше разбора случаев, кроме того, следует, что всегда существует вершина $x \in V(G^* - T) \setminus R_i$, смежная более чем с половиной вершин множества $R^* = R_i \setminus T$. Значит, в графе $G^* - T$ более половины вершин множества R^* также попали в компоненту связности Y.

Обозначим через P множество всех вершин графа $G^* - T$, не попавших в компоненту связности Y. Мы доказали, что $P \subset R_i$ и $|R^* \setminus P| > \frac{k-t'}{2}$. Поэтому

$$|P| \le |R_i| - |R_i \cap T| - |R^* \setminus P| < k - t' - \frac{k-t'}{2} \le \frac{k}{2}.$$

Следовательно, $|P| \le \frac{k-1}{2}$.

Для завершения доказательства леммы остается заметить, что $P \subset R$, так как $P \subset R_i$ для каждого $i \in \{1, \dots, \ell\}$. $\square$

Доказательство теоремы 5.2. 1. *Опишем процесс выбора вершины в хорошей части* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G))$, у которой $\mathrm{Bound}_2(A) \ne \varnothing$ (в случае, когда $\mathrm{Bound}_2(A) = \varnothing$, можно выбрать произвольную внутреннюю вершину части A).

Пусть $\mathrm{Bound}_2(A) = \{d_1, \dots, d_q\}$. Рассмотрим вершину d_1 и отметим в $\mathrm{Int}(A)$ одну из смежных с ней вершин (если такие есть). Потом рассмотрим вершину d_2, и отметим в $\mathrm{Int}(A)$ одну из неотмеченных вершин, смежных с d_2 (если такая вершина есть). И так далее, на i шаге мы отметим в $\mathrm{Int}(A)$ одну из еще не отмеченных вершин, смежных с d_i (если такие вершины есть). Таким образом, окажутся отмеченными не более, чем $|\mathrm{Bound}_2(A)|$ вершин из $\mathrm{Int}(A)$, следовательно, останется неотмеченной хотя бы одна вершина. Мы выберем любую из неотмеченных вершин в $\mathrm{Int}(A)$.

Таким образом, все вершины множества $\mathrm{Bound}_2(A)$, не имеющие смежных вершин в $\mathrm{Int}(A)$ после удаления из $\mathrm{Int}(A)$ выбранной вершины, не имели смежных вершин в $\mathrm{Int}(A)$ и до удаления.

2. *Предположим противное, пусть при удалении некоторого множества из выбранных вершин k-связность нарушится.*
Пусть минимальное по включению множество из выбранных вершин, при удалении которого теряется k-связность — это

$$W^* = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad \text{причем} \quad a_i \in \mathrm{Int}(A_i), \quad A_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}_k(G)).$$

Тогда вершина a_i не входит в множества из $\mathfrak{R}_k(G)$, поэтому граф $G - a_i$ является k-связным. В частности, $n \geq 2$.

Пусть $S_1, S_2, \dots, S_m \in \mathfrak{R}_k(G)$ — все множества, которые разделяют W^*. Из $n \geq 2$ следует, что такие множества есть. Пусть

$$G^* = G - W^*, \quad \mathfrak{S} = \{S_1, \dots S_m\}, \quad P = \bigcap_{i=1}^{m} S_i.$$

Рассмотрим часть A_i, где $i \in \{1, \dots, n\}$. Так как $\mathrm{Int}(A_i) \neq \varnothing$ и $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, существует единственная часть $B_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, такая, что $A_i \subset B_i$. Отметим, что при $i \neq j$ части B_i и B_j различны: множество $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, отделяющее A_i от A_j, отделяет друг от друга вершины $a_i, a_j \in W$, а потому $S \in \mathfrak{S}$. Следовательно, S отделяет B_i от B_j, то есть, эти части различны.

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 5.8. *Пусть $P' \subset P$, $p = |P'|$ и $\mathrm{Int}(A_i)$ содержит вершину, смежную с P' в графе G. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть $P' \subset \mathrm{Bound}_2(A_i)$, а t_i — количество вершин из $\mathrm{Int}(A_i) \setminus \{a_i\}$, смежных с P' в графе G^*. Тогда $t_i \geq 1$, а вершина a_i смежна в G не более чем с t_i вершинами множества P'.*

2) *Пусть* $P' \not\subset \mathrm{Bound}_2(A_i)$. *Тогда* $\mathrm{Int}(B_i) \setminus \{a_i\}$ *содержит хотя бы* p *вершин, смежных с* P' *в графе* G^*.

Доказательство. 1) Вспомним, как выбиралась вершина a_i в $\mathrm{Int}(A_i)$ при построении множества W: так как в $\mathrm{Int}(A_i)$ есть вершина, смежная с P' в графе G, в $\mathrm{Int}(A_i) \setminus \{a_i\} = \mathrm{Int}(A_i) \setminus W$ такая вершина тоже есть. Следовательно, $t_i \geq 1$.

В процессе выбора вершины a_i мы в некотором порядке рассмотрели все вершины множества P' и на каждом из этих шагов мы отмечали одну из еще не отмеченных к этому моменту вершин, смежных с рассматриваемой вершиной из P' (если такая вершина была). Отмеченные вершины лежат в $V(G^*)$ и потому не более чем t_i из них смежны с P'. Следовательно, мы отмечали вершины не более чем на t_i шагах, сделанных с вершинами из P'.

Если в P' есть более чем t_i вершин, смежных с a_i, то при рассмотрении одной из этих вершин мы не отметили ни одной вершины в $\mathrm{Int}(A_i)$. Но это невозможно, поскольку в этот момент в $\mathrm{Int}(A_i)$ была неотмеченная вершина, смежная с рассматриваемой (вершина a_i).

2) Так как все множества набора $\mathfrak{S}$ содержат P' и $P' \not\subset \mathrm{Bound}_2(A_i)$, ровно одно множество из $\mathfrak{S}$ является существенным для части A_i — обозначим его через R. Пусть $A_i \subset H \in \mathrm{Part}(R)$.

Рассмотрим произвольное множество $S \in \mathfrak{S}$, $S \neq R$. Так как S — несущественное для части A_i, по лемме 5.3 есть существенное множество R', отделяющее S от $\mathrm{Int}(A_i)$. Предположим, что $R' \neq R$. Пусть $A_i \subset H' \in \mathrm{Part}(R')$. Тогда R' не разделяет множество вершин W и $W \cap \mathrm{Int}(A_i) \neq \varnothing$, следовательно, $H' \supset W$. Но $S \cap \mathrm{Int}(H') = \varnothing$ и по лемме 4.4 множество S не может разделять H', а следовательно, и W. Противоречие. Значит, именно множество $R \in \mathfrak{S}$ отделяет $\mathrm{Int}(A_j)$ от всех остальных множеств из $\mathfrak{S}$. Следовательно, $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Поскольку $H \supset \mathrm{Int}(A_i)$ и $B_i \supset \mathrm{Int}(A_i)$, то $B_i = H$.

Итак, мы доказали, что часть B_i – правильная. Значит, $\mathrm{Int}(B_i)$ — фрагмент графа G, который должен содержать хотя бы $\frac{k+1}{2}$ вершин по условию теоремы. Пусть $F = \mathrm{Int}(B_i) \setminus \{a_i\}$, а Q — множество всех вершин из F, смежных с P'. Предположим, что $|Q| \le p-1$. Очевидно,

$$|F \setminus Q| \ge \frac{k+1}{2} - 1 - (p-1) \ge 1.$$

Граф $G - a_i$, как уже сказано выше, k-связен. Однако, состоящее менее чем из k вершин множество $(R \setminus P') \cup Q$ отделяет непустое множество $F \setminus Q$ от остальных вершин k-связного графа $G - a_i$, что невозможно. Следовательно, $|Q| \ge p$, что и требовалось доказать. □

3. Вернемся к доказательству теоремы 5.2. Пусть в графе G^* существует состоящее не более чем из $k-1$ вершин разделяющее множество T. По лемме 5.7, в графе $G^* - T$ в одну компоненту связности U попадут все неудаленные вершины, не входящие в P, и более половины неудаленных вершин множества P. Значит, в $G^* - T$ есть компонента связности $P' \subset P$, причем $|P'| \le \frac{k-1}{2}$.

Не умаляя общности будем считать, что внутренности частей $A_1, \ldots, A_\ell$ содержат вершины, смежные с P' в исходном графе G, а внутренности частей $A_{\ell+1}, \ldots, A_n$ — не содержат.

По лемме 5.8, внутренность каждой из частей $B_1, \ldots, B_\ell \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ содержит по вершине, смежной с P' в графе G^*. Все эти ℓ вершин различны и должны содержаться в T. Из $|T| \le k-1$ следует, что $\ell \le k-1$.

Не умаляя общности предположим, что включение $P' \subset \mathrm{Bound}_2(A_i)$ выполняется в точности для $i \in \{1, \ldots, s\}$. Будем использовать обозначения из леммы 5.8. При $i \in \{1, \ldots, s\}$ в $\mathrm{Int}(A_i) \setminus \{a_i\}$ есть ровно t_i вершин, смежных с P' в графе G^*, и все эти вершины входят в T. По пункту 2 леммы 5.8, при $i \in \{s+1, \ldots, \ell\}$ в $\mathrm{Int}(B_i) \setminus \{a_i\}$ есть хотя бы p вершин, смежных с P' в графе G^*, и все эти вершины входят в T. Таким образом, мы имеем неравенство

$$\sum_{k=1}^{s} t_i + p(\ell - s) \le k - 1. \tag{5.4}$$

По пункту 1 леммы 5.8, для $i \in \{1, \dots, s\}$ вершина a_i смежна не более чем с t_i вершинами из P'. Для $i \in \{s+1, \dots, \ell\}$ вершина a_i смежна не более чем с $|P'| = p$ вершинами из P'. Пусть $W' = \{a_1, \dots, a_\ell\}$. Учитывая неравенство (5.4), получаем

$$e_G(P', W') \le \sum_{k=1}^{s} t_i + p(\ell - s) \le k - 1. \tag{5.5}$$

Теперь оценим сумму степеней вершин множества P'. Напомним, что каждая из них не менее $2k-1$. С другой стороны, вершина множества P' может быть смежна в графе G только с вершинами множеств T, W' и другими вершинами из P'. Учитывая, что $|P'| = p$ и $|T| \le k - 1$, с помощью неравенства (5.5) получаем

$$p(2k-1) \le p(p-1) + p(k-1) + e_G(P', W') \le p(p-1) + (p+1)(k-1).$$

После приведения подобных членов получаем квадратное неравенство

$$p^2 - (k+1)p + k - 1 \ge 0. \tag{5.6}$$

Меньший корень соответствующего квадратного уравнения меньше 1, а больший корень — больше k. Поскольку в нашем случае $1 \le p \le \frac{k-1}{2}$, неравенство (5.6) не выполнено. Следовательно, граф G^* является k-связным. Это противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Глава 6

Остовные деревья с большим количеством листьев

Глава посвящена доказательству нижних оценок на $u(G)$ (то есть, максимально возможное количество листьев в остовном дереве связного графа G). Доказательство каждой оценки будет сопровождено алгоритмом построения остовного дерева с соответствующим количеством листьев. Для каждой оценки будет построена бесконечная серия графов — экстремальных примеров (у которых максимальное количество листьев в остовном дереве равняется величине из нижней оценки).

6.1 Нижняя оценка на $u(G)$ через количество вершин степеней 3 и не менее 4

Теорема 6.1. *Пусть G — связный граф с более, чем одной вершиной, s — количество его вершин степени 3, а t — количество его вершин степени не менее 4. Тогда*

$$u(G) = \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + \alpha, \quad \text{где} \quad \alpha \geq \frac{8}{5}.$$

Более того, $\alpha \geq 2$, кроме трёх графов-исключений: C_6^2, C_8^2 (квадраты циклов на 6 и 8 вершинах) и регулярного графа G_8 степени 4 на 8 вер-

шинах, изображенного на рисунке 6.1.

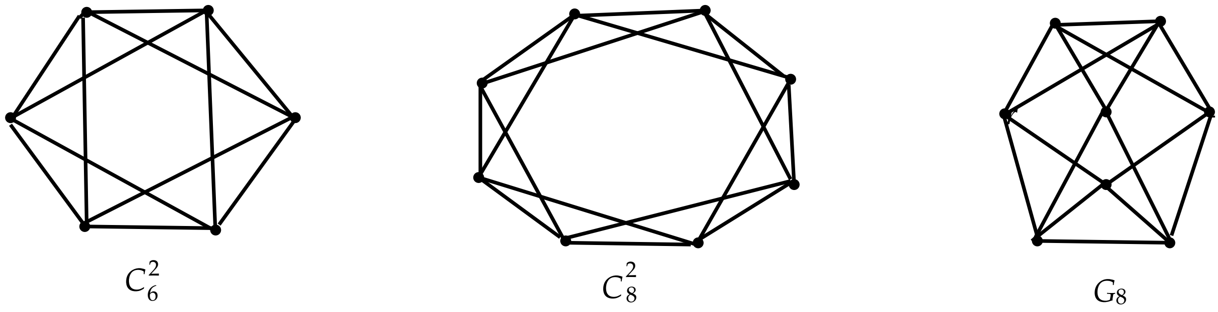


Рис. 6.1: Графы-исключения.

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 6.1. Введем необходимые обозначения.

Определение 6.1. Пусть H — произвольный граф. Через $S(H)$ обозначим множество вершин степени 3 в графе H, а через $T(H)$ — множество вершин степени не менее 4 в графе H.

Пусть $x \in V(H)$. Будем считать, что *цена* $c_H(x)$ вершины x в графе H — это

$$c_H(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{при } x \in T(H), \\ \frac{1}{5} & \text{при } x \in S(H), \\ 0 & \text{при } x \notin T(H) \cup S(H). \end{cases}$$

Стоимостью графа H назовём величину

$$c(H) = \sum_{x \in V(H)} c_H(x) = \frac{2}{5}|T(H)| + \frac{1}{5}|S(H)|.$$

Для любого множества вершин $U \subset V(H)$ мы определим *стоимость* этого множества в графе H как

$$c_H(U) = \sum_{x \in U} c_H(x).$$

Для любого дерева F — подграфа графа H — мы определим его *стоимость в графе* H как

$$c_H(F) = c_H(V(F)).$$

Для любого остовного дерева F графа H введем обозначение

$$\alpha(F) = u(F) - c(H).$$

Пусть $\alpha(H)$ — это максимум $\alpha(F)$ по всем остовным деревьям F графа H.

Замечание 6.1. Непосредственно из определения следует, что

$$u(G) = c(G) + \alpha(G).$$

Таким образом, мы хотим доказать, что $\alpha(G) \geq 2$ для всех связных графов G, кроме трёх исключений.

При доказательстве теоремы для графа G мы будем считать, что для всех меньших графов теорема уже доказана.

6.1.1 Редукционные правила

Сначала мы изменим граф так, чтобы с ним было удобнее работать. Опишем два редукционных правила.

R1. *Пусть* $x \in V(G)$, $d_G(x) = 2$, $\mathrm{N}_G(x) = \{a, b\}$, *причём* a *и* b *несмежны.*

Мы заменим граф G на граф $G' = G - x + ab$. Очевидно, $c(G') = c(G)$.

Рис. 6.2: Редукционные правила.

R2. *Пусть* $a_1, a_2 \in S$ *— смежные вершины,* $\mathrm{N}_G(a_1) \cap \mathrm{N}_G(a_2) = \varnothing$*.*
Мы заменим граф G на $G' = G \cdot a_1a_2$. Пусть $a = a_1 \cdot a_2$. Понятно, что $d_{G'}(a) = 4$, а тогда $c(G') = c(G)$.

В обоих случаях остовное дерево F' графа G' мы без труда сможем преобразовать в остовное дерево F графа G с неменьшим числом висячих вершин и, следовательно, с $\alpha(F) \geq \alpha(F')$. Таким образом, $\alpha(G) \geq \alpha(G')$.

Замечание 6.2. Далее мы будем считать, что граф удовлетворяет следующим условиям:

1° любая вершина степени 2 входит в треугольник с двумя вершинами своей окрестности;

2° нет двух смежных вершин степени 3, окрестности которых не пересекаются.

6.1.2 Общее описание метода мёртвых вершин

Для доказательства теоремы мы построим искомое остовное дерево, используя *метод мёртвых вершин*, как и в работах [19, 9].

Определение 6.2. Пусть дерево F — подграф связного графа G.

Висячую вершину x дерева F назовем *мертвой*, если $N_G(x) \subset V(F)$ и *живой* в противном случае. Количество мёртвых вершин дерева F мы будем обозначать через $b(F)$.

Введем обозначение

$$\alpha'(F) = \frac{13}{15}u(F) + \frac{2}{15}b(F) - c_G(F).$$

Мы будем строить в графе G остовное дерево последовательно, по шагам добавляя к нему вершины. Пусть $S = S(G)$, а $T = T(G)$.

Подробнее остановимся на шаге алгоритма (назовём этот шаг A). Пусть перед шагом A мы имеем дерево F (естественно, F — подграф графа G).

Через Δu и Δb мы будем обозначать прирост количества висячих вершин и количества мертвых висячих вершин в дереве F на шаге A, через Δt и Δs — количество добавленных на этом шаге в дерево F вершин из T и из S соответственно.

Назовём *доходом* шага A величину

$$p(A) = \frac{13}{15}\Delta u + \frac{2}{15}\Delta b - \frac{2}{5}\Delta t - \frac{1}{5}\Delta s.$$

Если F_1 — дерево, полученное после шага A, то нетрудно понять, что $\alpha'(F_1) = \alpha'(F) + p(A)$. Мы будем выполнять только шаги, для которых доход неотрицателен.

Замечание 6.3. 1) Нетрудно заметить, что мертвые вершины останутся мертвыми висячими вершинами на всех последующих этапах построения. По окончании построения, когда будет построено остовное дерево, все его висячие вершины будут мёртвыми.

2) Так как у остовного дерева F графа G все висячие вершины — мёртвые, в этом случае $\alpha'(F) = \alpha(F)$.

Сначала мы опишем все возможные шаги, а потом рассмотрим начало построения и оценим $\alpha(T)$ для построенного остовного дерева T.

Для удобства мы в описании шага будем обозначать множество вершин, не вошедших в дерево F, через W. Вершины множества W, смежные хотя бы с одной из вершин $V(F)$, назовем *вершинами уровня* 1. Не вошедшие в уровень 1 вершины из W, смежные хотя бы с одной вершиной уровня 1, назовем *вершинами уровня* 2.

Для каждой вершины x из W через $P(x)$ обозначим множество всех вершин из $V(F)$, смежных с x.

6.1.3 Шаг алгоритма

Мы будем пытаться выполнить очередной шаг алгоритма, переходя к следующему варианту, только когда невозможно выполнить ни один из предыдущих. Дополнительно об этом упоминать в описании шагов мы не будем.

После каждого законченного шага (то есть шага, имеющего неотрицательный доход) мы будем подсчитывать параметры этого шага: Δu, Δb и доход сделанного шага. Все эти параметры понадобятся нам в последнем разделе работы. Количество вершин, добавленных в дерево на шаге, не является параметром этого шага!

Начнем с шага, который таковым фактически не является, но поможет нам в описании других шагов.

Z0. *Висячая вершина v дерева F, посчитанная ранее как живая, оказалась мёртвой.*
В этом случае мы не будем менять дерево. Учитывая информацию о вершине v мы получаем

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 1, \quad p(Z0) = \frac{2}{15}.$$

Замечание 6.4. При описании шагов мы будем считать живыми все висячие вершины, про которые не сказано, что они мёртвые. Добавление лишней мёртвой вершины будет оформлено, как шаг $Z0$.

Шаги типа A

Определение 6.3. Пусть $x \in V(G), W \subset V(G)$. Через $d_{G,W}(x)$ обозначим количество вершин из множества W, смежных с x.

В первых четырёх вариантах в дерево добавляются новые висячие вершины.

A1. *В дереве F есть невисячая вершина x, смежная с вершиной $y \in W$.*
Тогда присоединим y к x. Так как $c_G(x) \leq \frac{2}{5}$, мы получаем

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(A1) \geq \frac{13}{15} - \frac{2}{5} = \frac{7}{15}.$$

A2. *В дереве F есть такая вершина x, что $d_{G,W}(x) \geq 2$.*
Тогда присоединим к x две смежные с ней вершины из W. Так как стоимость двух добавленных вершин не более $2 \cdot \frac{2}{5}$, мы получаем

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(A2) \geq \frac{13}{15} - 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15}.$$

A3. *Существует такая вершина x уровня 1, что $d_{G,W}(x) \geq 3$.*
Тогда присоединим к дереву F вершину x и затем три смежных с x вершины множества W. Стоимость четырех добавленных вершин не более $4 \cdot \frac{2}{5}$ и мы имеем

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 0, \quad p(A3) \geq 2 \cdot \frac{13}{15} - 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

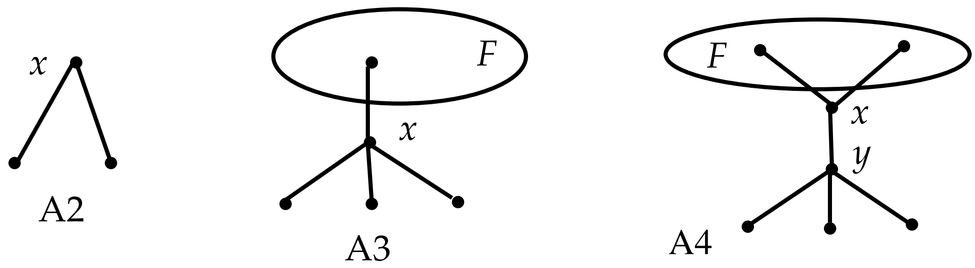


Рис. 6.3: Шаги типа A.

Замечание 6.5. Далее мы считаем, что невисячие вершины дерева F не смежны с вершинами из W, каждая висячая вершина смежна не более чем с одной вершиной из W и, наконец, каждая вершина уровня 1 смежна не более чем с двумя вершинами из W.

В частности, если $x \in T$ — вершина уровня 1, то $|P(x)| \geq 2$ и при присоединении вершины x к дереву хотя бы одна из вершин множества $P(x)$ станет мёртвой.

A4. *Существует вершина $x \in S$ уровня 1, смежная ровно с одной вершиной из W, причём эта вершина — $y \in T$ уровня 2.*
Присоединим к дереву F вершины x, y и три отличные от x вершины из W, смежные с y (вершина y не смежна с деревом F). Стоимость пяти добавленных вершин не более $\frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$ и мы имеем

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 1, \quad p(A4) \geq 2 \cdot \frac{13}{15} + \frac{2}{15} - \frac{9}{5} = \frac{1}{15}.$$

Шаги типов M и N

Далее мы рассмотрим гораздо более сложный случай.

M. *Существует такая вершина $x \in T$ уровня 1, что $d_{G,W}(x) = 2$.* Мы присоединим к дереву вершину x. Цена этой вершины составляет $\frac{2}{5}$. Вершина x смежна хотя бы с двумя висячими вершинами дерева F (см. рис. 6.4), одна из них точно станет мертвой. Присоединим две смежные с x вершины $y_1, y_2 \in W$, фактически выполнив шаг $A2$. Учитывая сказанное выше, мы получим

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 1, \quad p(M) \geq \frac{2}{15} - \frac{2}{5} + p(A2) \geq -\frac{3}{15}.$$

N. *Существует такая вершина $x \in S$ уровня 1, что $d_{G,W}(x) = 2$.* Мы присоединим к дереву вершину x и две смежные с x вершины $y_1, y_2 \in W$ и получим аналогично предыдущему случаю

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(N) = -\frac{1}{5} + p(A2) \geq -\frac{2}{15}.$$

Шаги M и N мы не считаем законченными. Мы добавили в дерево вершины x, y_1, y_2, однако, пусть F пока что обозначает дерево, построенное после предыдущего законченного *шага. После выполнения шагов M и N мы поставим следующую задачу:*

– каждая висячая вершина из $V(F)$ смежна не более чем с одной вершиной из W;

– каждая вершина первого уровня смежна не более чем с двумя вершинами из W.

Требуется выполнить шаг с доходом не менее $\frac{3}{15}$.

Шаги, которые мы рассматриваем далее в этом разделе, не включают в себя выполненные ранее шаги M или N. При подсчете параметров шагов вершины, добавленные на предшествующем шаге M или N, не учитываются.

Приступим к разбору случаев.

1. $y_1, y_2 \notin T$.

Эти вершины стоят дешевле, чем было посчитано, что добавляет доход хотя бы $\frac{2}{5}$. Получаем

$$\Delta u = \Delta b = 0, \quad p(1) \geq \frac{6}{15}.$$

Пусть $W_1 = W \setminus \{x, y_1, y_2\}$.

Если ровно одна из вершин y_1 и y_2 принадлежит множеству T, то мы далее будем считать, что $y_1 \in T$.

Если же $y_1, y_2 \in T$, то мы будем считать, что $d_{G,W_1}(y_1) \geq d_{G,W_1}(y_2)$.

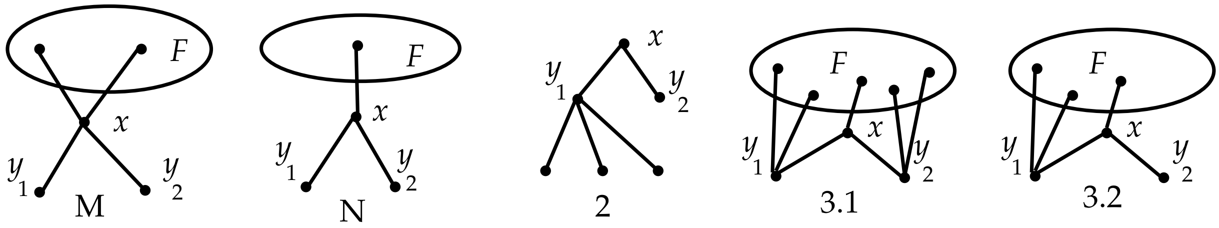


Рис. 6.4: Шаги M, N, 2, 3.1 и 3.2.

2. $d_{G,W_1}(y_1) \geq 3$.

Присоединим к дереву три смежные с y_1 вершины множества W_1, фактически выполнив шаги $A2$ и $A1$. Получаем

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 0, \quad p(2) = p(A1) + p(A2) \geq \frac{8}{15}.$$

3. $d_{G,W_1}(y_1) \leq 1$.

Вершина y_1 смежна не более, чем с тремя не входящими в дерево F вершинами: это x и, возможно, y_2 и одна вершина из W_1. Так как $d_G(y_1) \geq 4$, то y_1 — вершина уровня 1. По замечанию 6.5 мы имеем $|P(y_1)| \geq 2$, что добавит нам хотя бы две мёртвых вершины. Рассмотрим два случая.

3.1. *Если* $y_2 \in T$, то по выбору вершины y_1 мы имеем $d_{G,W_1}(y_2) \leq 1$. Аналогично сказанному выше для вершины y_1, мы получаем еще две мёртвые вершины. В этом случае

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 4, \quad p(3.1) = 4 \cdot \frac{2}{15} = \frac{8}{15}.$$

3.2. *Если* $y_2 \notin T$, то это добавит нам хотя бы $\frac{1}{5}$ (вершина y_2 стоит дешевле, чем посчитано ранее). В этом случае

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 2, \quad p(3.2) \geq \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{7}{15}.$$

4. $d_{G,W_1}(y_1) = 2$.

Пусть z_1 и z_2 – две смежные с y_1 вершины из множества W_1. Присоединим к дереву вершины z_1 и z_2 (через y_1), выполнив шаг $A2$ и получим

$$p(4) = p(A2) \geq \frac{1}{15}.$$

Поскольку этого недостаточно, продолжим разбирать случаи.

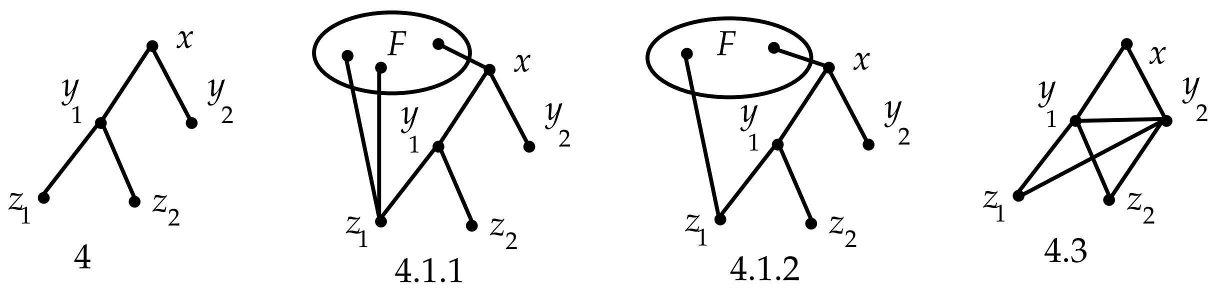


Рис. 6.5: Шаги 4, 4.1.1, 4.1.2 и 4.3.

4.1. *Среди вершин* y_2, z_1, z_2 *есть вершина, смежная с деревом* F.

Пусть, например, вершина z_1 смежна с деревом F, то есть, входит в уровень 1. Для остальных вершин рассуждения аналогичны.

4.1.1. *Если* $z_1 \in T$, то по замечанию 6.5, вершина z_1 должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами дерева F, что добавит нам две мёртвые вершины и обеспечит

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 2, \quad p(4.1.1) \geq p(4) + 2 \cdot \frac{2}{15} \geq \frac{5}{15}.$$

4.1.2. *Если* $z_1 \notin T$, то вершина z_1 стоит дешевле минимум на $\frac{1}{5}$, но добавляет лишь одну мёртвую вершину. Поэтому

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 1, \quad p(4.1.2) \geq p(4) + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} \geq \frac{6}{15}.$$

4.2. *Среди вершин y_2, z_1, z_2 есть вершина не из множества T.*
Это увеличит доход хотя бы на $\frac{1}{5}$, в результате

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.2) \geq p(4) + \frac{1}{5} \geq \frac{4}{15}.$$

4.3. $\mathrm{N}_G(y_2) = \{x, y_1, z_1, z_2\}$.
Тогда вершина y_2 оказывается мёртвой, в результате получится

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 1, \quad p(4.3) \geq p(4) + \frac{2}{15} = \frac{3}{15}.$$

Замечание 6.6. Итак, подведём итоги. В оставшихся до конца разбора шагов M и N случаях вершины y_1, y_2, z_1, z_2 принадлежат множеству T и не смежны с деревом F. Каждая из вершин y_1, y_2 смежна ровно с двумя вершинами из W_1, а значит, вершины y_1 и y_2 смежны, $d_G(y_1) = d_G(y_2) = 4$.

Вершина y_2 не смежна хотя бы с одной из вершин z_1, z_2. Не умаляя общности положим, что y_2 не смежна с z_1. Тогда z_1 смежна хотя бы с двумя вершинами из $W_2 = W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2\}$.

4.4. $d_{G,W_2}(z_1) \geq 3$.
Добавим три смежные с z_1 вершины множества W_2 в дерево, сделав шаг $A2$ и шаг $A1$. В результате получим

$$\Delta u = 3, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.4) \geq p(4) + p(A2) + p(A1) \geq \frac{9}{15}.$$

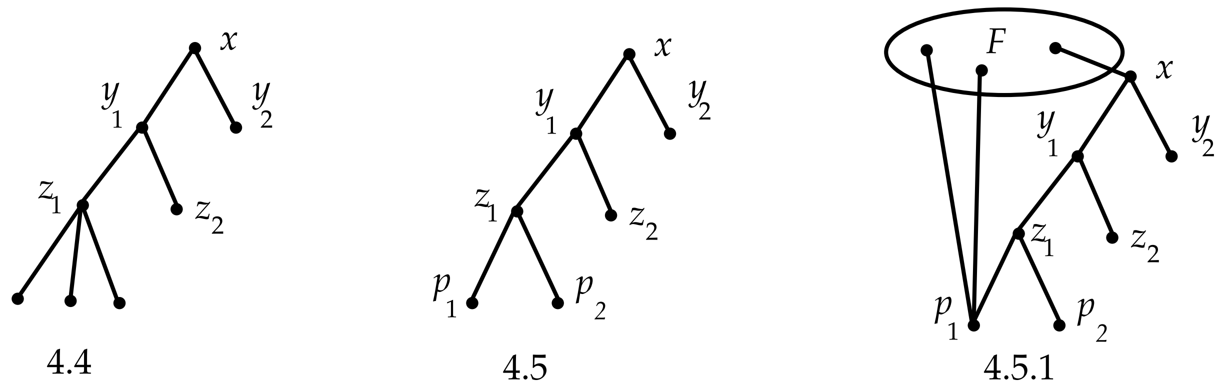


Рис. 6.6: Шаги 4.4, 4.5, 4.5.1.

4.5. $d_{G,W_2}(z_1) = 2$.

Обозначим две смежные с z_1 вершины из W_2 через p_1 и p_2 и добавим в дерево (см. рисунок 6.6), фактически выполнив еще один шаг $A2$. В результате получим

$$p(4.5) \geq p(4) + p(A2) \geq \frac{2}{15}.$$

Этого не хватает, продолжим разбор случаев.

4.5.1. *Среди вершин p_1, p_2 есть вершина, принадлежащая множеству T и смежная с деревом F.*

Пусть это вершина p_1. По замечанию 6.5 она смежна хотя бы с двумя вершинами дерева F, что добавит нам две мёртвые вершины и обеспечит

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 2, \quad p(4.5.1) \geq p(4.5) + 2 \cdot \frac{2}{15} \geq \frac{6}{15}.$$

Замечание 6.7. Далее все вершины $y_1, y_2, z_1, z_2, p_1, p_2$ не смежны с деревом F.

4.5.2. *Среди вершин p_1, p_2 есть вершина не из множества T.*

Это увеличит доход на $\frac{1}{5}$, получится

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.5.2) \geq p(4.5) + \frac{3}{15} \geq \frac{5}{15}.$$

4.5.3. *Среди вершин y_2, z_2, p_1, p_2 есть вершина, не смежная с вершинами из $W_3 = W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2, p_1, p_2\}$.*

Тогда в построенном дереве эта вершина — мёртвая, что увеличивает доход от шага на $\frac{2}{15}$. Поэтому

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 1, \quad p(4.5.3) \geq p(4.5) + \frac{2}{15} \geq \frac{4}{15}.$$

Замечание 6.8. Таким образом, все вершины $y_1, y_2, z_1, z_2, p_1, p_2$ принадлежат множеству T и не смежны с деревом F. Каждая из вершин y_2, z_2, p_1, p_2 смежна хотя бы с одной вершиной из W_3.

4.5.4. $d_{G,W_3}(p_1) \geq 2$ *или* $d_{G,W_3}(p_2) \geq 2$.

Не умаляя общности предположим, что $d_{G,W_3}(p_1) \geq 2$. Добавим две смежные с p_1 вершины $q_1, q_2 \in W_3$ в дерево, выполнив шаг $A2$. Получится

$$\Delta u = 3, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.5.4) \geq p(4.5) + \frac{1}{15} \geq \frac{3}{15}.$$

4.5.5. $d_{G,W_3}(p_1) = d_{G,W_3}(p_2) = 1$.

Тогда вершина p_1 смежна хотя бы с двумя из вершин p_2, y_2, z_2, а вершина p_2 смежна хотя бы с двумя из вершин p_1, y_2, z_2. Напомним, что по замечанию 6.6 вершины y_1 и y_2 смежны и $d_G(y_1) = d_G(y_2) = 4$. Поскольку y_2 смежна хотя бы с одной вершиной из W_3, то y_2 не может быть смежна и с p_1, и с p_2. Не умаляя общности положим, что y_2 не смежна с p_1. Тогда $d_G(p_1) = 4$, вершина p_1 смежна с p_2 и z_2 (см. рис. 6.7a).

Заметим, что вершина z_2 не может быть смежна с p_2. (Иначе z_2 была бы смежна с тремя вершинами из $W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2\}$: это p_1, p_2 и вершина из W_3. Тогда можно было бы выполнить шаг, аналогичный шагу 4.4, добавив эти три вершины к z_2.) Значит, вершина p_2 смежна с y_2 и $d_G(p_2) = 4$ (см. рис. 6.7b).

Кроме того, y_2 смежна ровно с двумя вершинами из $W_1 = W \setminus \{x, y_1, y_2\}$ по замечанию 6.6. Так как y_2 смежна с p_2 и вершиной из W_3, она не смежна ни с z_1, ни с z_2. Тогда z_1 смежна с z_2 и $d_G(z_1) = d_G(z_2) = 4$ (см. рис. 6.7c).

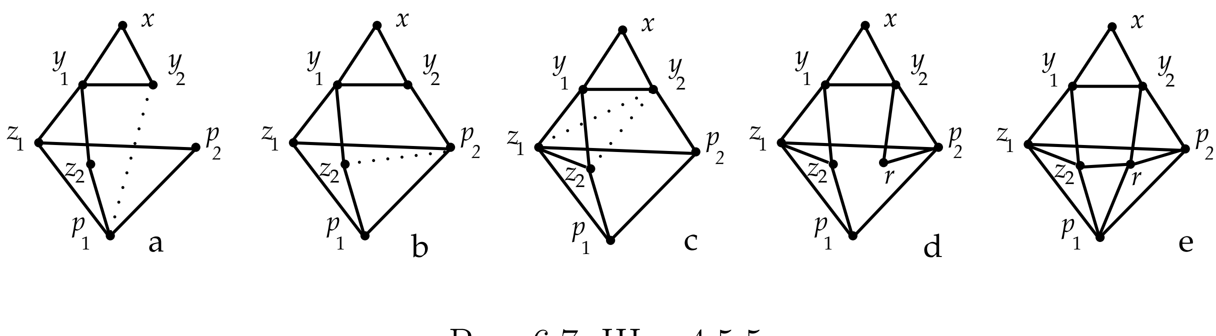


Рис. 6.7: Шаг 4.5.5.

Обозначим через r единственную смежную с y_2 вершину из множества W_3. Можно провести аналогичные сделанным выше для y_1 рассуждения шага 4 для вершины y_2. Окажется, что смежные с y_2 вершины r и p_2 смежны друг с другом и, кроме того, $d_G(r) = 4$ (см. рис. 6.7d).

Продолжая эти рассуждения для вершины p_2 и смежных с ней p_1 и z_1 мы убедимся, что одна из вершин p_1 и z_1 должна быть смежна с r. Поскольку z_1 не может быть смежна с r, то вершины p_1 и r смежны.

Теперь понятно (см. рис. 6.7d), что z_2 смежна ровно с двумя вершинами множества W_2: это p_1 и некая вершина $r' \in W_3$. В этом случае можно повторить написанные выше рассуждения для вершины z_2 вместо z_1 и получить, что p_1 смежна с r'. Следовательно, $r = r'$ и z_2 смежна с r. Мы получили конфигурацию, изображенную на рисунке 6.7e.

Добавим в дерево вершину r, присоединив ее к одной из смежных с ней вершин. Отметим, что ни одна из добавленных в дерево вершин в этом случае не имеет смежных вершин вне дерева. Произведём подсчёт параметров этого шага: $\Delta t = 5$,

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 4, \quad p(4.5.5) \geq 2 \cdot \frac{13}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} - 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

Замечание 6.9. 1) Оказалось, что в продолжении шагов M и N всегда можно выполнить шаг с доходом не менее $\frac{3}{15}$, что в сумме дает неотрицательный доход. После шагов M и N мы обязательно будем выполнять описанные выше шаги и получать неотрицательный доход. Обозначение $M4.2$ будет означать шаг, состоящий из M и 4.2, аналогично с остальными шагами. Назовем такие шаги *MN-шагами.*

Нулевой доход получается только в MN-шагах $M4.3$ и $M4.5.4$. В остальных MN-шагах доход не менее $\frac{1}{15}$. Все MN-шаги, кроме $M4.5.5$ и $N4.5.5$, не могут быть последними, так как добавляют хотя бы одну живую вершину.

2) Остаются лишь варианты, в которых каждая вершина уровня 1 смежна не более, чем с одной вершиной множества W (иначе мы выполнили бы шаг $A3$ или один из MN-шагов).

Шаги типа Z

В следующих вариантах количество висячих вершин построенного дерева не изменяется, но увеличивается количество мёртвых вершин.

Z1. *Существует вершина уровня* 1*, не смежная с вершинами из* W*.* Пусть это вершина w. Тогда $\mathrm{N}_G(w) = P(w)$. Добавим вершину w в дерево, в результате все вершины из $\mathrm{N}_G(w)$, кроме одной, станут мёртвыми, так же как и вершина w. Это означает, что $\Delta b = d_G(w)$.

Z1.1. $w \in T$.
В этом случае добавилось $d_G(w) \geq 4$ мертвых вершин. Мы будем считать, что на этом шаге добавилось ровно 4 мертвых вершины, а если их на самом деле добавилось больше, оформим это как $d_G(w) - 4$ шагов $Z0$. Таким образом для шага $Z1.1$ мы имеем

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 4, \quad p(Z1.1) = 4 \cdot \frac{2}{15} - \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

Z1.2. $w \in S$.
В этом случае параметры шага

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 3, \quad p(Z1.2) = 3 \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} = \frac{3}{15}.$$

Z1.3. $w \notin S \cup T$.
В этом случае получается $p(Z1.3) = \Delta b \cdot \frac{2}{15} > 0$. Этот шаг можно не рассматривать, так как параметры этого шага в точности равны параметрам Δb последовательных шагов $Z0$. (Напомним, что количество добавленных вершин не является параметром шага.)

Z2. *Существует две смежные вершины* v *и* w *первого уровня.*
По замечанию 6.9 тогда остальные смежные с v и w вершины — это висячие вершины дерева F. Очевидно, $d_G(v) \geq 2$ и $d_G(w) \geq 2$. Если, например, $d_G(v) = 2$ и $\mathrm{N}_G(v) = \{x, w\}$, то x — висячая вершина дерева F, смежная с w (иначе мы применили бы редукционное правило $R1$) и $d_{G,W}(x) \geq 2$, что противоречит замечанию 6.5.

Таким образом, получается, что $v, w \in S \cup T$. Случай $v, w \in S$ невозможен, в нем мы бы применили редукционное правило $R2$. Добавим вершины w и v в дерево, присоединив к смежным с ними вершинам, в результате v и w станут мёртвыми и

$$\Delta b = d_G(w) + d_G(v) - 2.$$

Как и в случае $Z1.1$, мы будем записывать в параметры шагов минимально возможные Δb и при необходимости применять шаги $Z0$.

Z2.1. *Если одна из вершин v и w лежит в S, а другая — в T*, то

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 5, \quad p(Z2.1) = 5 \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{15}.$$

Z2.2. *При $v, w \in T$* получается

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 6, \quad p(Z2.2) = 6 \cdot \frac{2}{15} - 2 \cdot \frac{2}{5} = 0.$$

Z3. *Вершина w уровня 1 смежна с вершиной $v \in W \setminus (S \cup T)$.* Добавим вершины w и v в дерево. Если $d_G(v) = 2$, то мы либо применили бы редукционное правило $R1$, либо v смежна с $P(w)$. Оба случая невозможны, поэтому $d_G(v) = 1$ и в результате вершина v станет мёртвой. Значит, $\Delta b = d_G(w) - 1$.

Z3.1. *При $w \in S$* получается

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 2, \quad p(Z3.1) = 2 \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

Z3.2. *При $w \in T$* получается

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 3, \quad p(Z3.2) = 3 \cdot \frac{2}{15} - \frac{2}{5} = 0.$$

Лемма 6.1. *Пусть w — вершина уровня 1. Тогда $w \in T$, причем вершина w смежна с вершиной $v \in S \cup T$ уровня 2 и не менее, чем с тремя висячими вершинами дерева F.*

Доказательство. По замечанию 6.9 мы имеем $d_{G,W}(w) \leq 1$. Поскольку нельзя выполнить шаг $Z1$, то $d_{G,W}(w) = 1$, то есть, w смежна с вершиной $v \in W$.

Так как нельзя выполнить шаг $Z2$, то v — вершина уровня 2. Так как нельзя выполнить шаг $Z3$, то $v \in T \cup S$. Поскольку нельзя выполнить редукцию $R1$, то $w \in T \cup S$.

Наконец, установим, что $w \in T$. Предположим противное, тогда $w \in S$. Если при этом $v \in T$, то мы выполнили бы шаг $A4$. А в случае $v \in S$ мы выполнили бы редукцию $R2$.

Таким образом, $w \in T$. Так как $d_{G,W}(w) = 1$, вершина w смежна не менее, чем с тремя висячими вершинами дерева F. $\square$

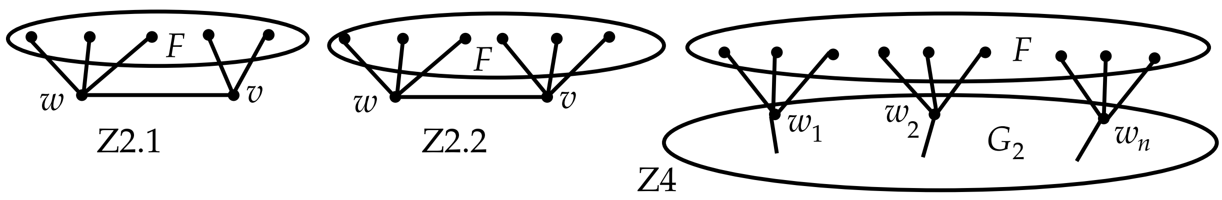


Рис. 6.8: Шаги типа Z.

Z4. *Существует не вошедшая в дерево вершина.*
Пусть $w_1, \dots, w_n$ — все вершины уровня 1. По лемме 6.1 каждая из них смежна хотя бы с тремя висячими вершинами дерева F. Всего имеем хотя бы $3n$ различных живых вершин, то есть, $u(F) - b(F) \geq 3n$ и

$$u(F) = c_G(F) + \alpha'(F) + \frac{2}{15}(u(F) - b(F)) \geq c_G(F) + \alpha'(F) + \frac{2n}{5}. \quad (6.1)$$

Разрежем все рёбра, ведущие от $w_1, \dots, w_n$ к дереву F, в результате граф G распадётся на $G_1 = G(V(F))$ и граф $G_2 = G(W)$. Поскольку $c_G(w_i) - c_{G_2}(w_i) = \frac{2}{5}$, то

$$c(G_2) = c_G(W) - n \cdot \frac{2}{5}. \quad (6.2)$$

Отметим, что граф G_2 может быть несвязным, но в каждой его компоненте связности есть хотя бы четыре вершины и среди них есть висячая (одна из вершин $w_1, \dots, w_n$), поэтому к каждой компоненте связности графа G_2 можно применить утверждение нашей теоремы (она не является исключением и содержит меньше вершин, чем граф G). Пусть в графе G_2 ровно k компонент связности. Тогда мы можем построить в нем остовный лес F' из k деревьев с

$$u(F') \geq c(G_2) + 2k. \tag{6.3}$$

Присоединим к F каждую из k компонент связности леса F' произвольным ребром, в результате мы получим остовное дерево T графа G. Оценим $u(T)$ с помощью неравенств (6.1), (6.2) и (6.3):

$$u(T) = u(F) + \Big(u(F') - 2k\Big) \geq \left(c_G(F) + \alpha'(F) + \frac{2n}{5}\right) + c(G_2) =$$
$$c_G(V(F)) + \alpha'(F) + c_G(W) = c(G) + \alpha'(F).$$

Таким образом, в этом случае мы имеем $\alpha(G) \geq \alpha(T) \geq \alpha'(F)$.

6.1.4 Начало построения и оценка α

Мы постараемся начать построение с *базового дерева* F' с как можно большим $\alpha'(F')$ и докажем, что в результате для любого графа, кроме трёх исключений, получится остовное дерево T с $\alpha(T) \geq 2$.

Разберём несколько случаев, в каждом из них будем считать, что условия всех предыдущих случаев не выполняются. Начнем со случаев, в которых удается построить базовое дерево F' с $\alpha'(F') \geq 2$ и, тем самым, закончить доказательство теоремы.

B1. *В графе есть две смежные вершины $a, a' \in T$, у которых*

$$\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(a') = \varnothing.$$

Мы начнём построение с базового дерева F', в котором a и a' соединены друг с другом и со всеми вершинами из их окрестностей. В таком дереве

$$u(F') = u \geq 6, \quad c_G(F') \leq \frac{2}{5}(u+2) \quad \text{и}$$
$$\alpha'(F') \geq \frac{13}{15}u - c_G(F') \geq \frac{7u-12}{15} \geq 2.$$

B2. *В графе есть вершина $a \in T$, смежная с вершиной степени не более 2.*
Пусть $v \in \mathrm{N}_G(a)$, $d_G(v) \le 2$. Мы начнём построение с базового дерева F', в котором a соединена со всеми вершинами из её окрестности. Если $d_G(v) = 1$, то вершина v, очевидно, мёртвая. Если же $d_G(v) = 2$, то, так как невозможно выполнить редукцию $R1$, вершины a и v входят в треугольник, третья вершина которого, очевидно, лежит в $\mathrm{N}_G(a)$. Значит, и в этом случае вершина v — мёртвая.

Таким образом,

$$u(F') = d_G(a) = u \ge 4, \quad b(F') \ge 1, \quad c_G(F') \le \frac{2}{5}u \quad \text{и}$$
$$\alpha'(F') \ge \frac{13}{15}u + \frac{2}{15} - c_G(F') \ge \frac{7u+2}{15} \ge 2.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать начала построения, в которых $\alpha'(F') < 2$. Для обеспечения оценки $\alpha(G) \ge 2$ мы обратим внимание на конец построения.

Лемма 6.2. *Предположим, что в графе нет конфигураций, описанных в случаях $B1$ и $B2$ и описанным выше алгоритмом было построено остовное дерево. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если хотя бы один раз выполнялся шаг $Z4$, то существует базовое дерево F' с $\alpha'(F') \ge 2$.*

2) *Если не выполнялся шаг $Z4$, то последний шаг алгоритма не добавляет живых вершин и даёт доход не менее $\frac{1}{15}$.*

Доказательство. 1) Вернёмся к шагу $Z4$ и отрезанному от заготовки дерева F графу G_2 (см. рис 6.8), точнее, к одной из его компонент связности G'. Не умаляя общности положим, что в G' попали вершины $w_1, \dots, w_k$ и не попали вершины $w_{k+1}, \dots, w_n$. Так как G' — меньший граф с висячими вершинами, в нем есть остовное дерево T' с

$$\alpha(T') = u(T') - c_{G'}(T') \ge 2.$$

Рассмотрим дерево T' как подграф графа G. К сожалению, вершины $w_1, \dots, w_k$ стоят в графе G не по 0, как в графе G', а по $\frac{2}{5}$, то есть,

$$c_G(T') = c_{G'}(T') + \frac{2k}{5}.$$

Кроме того, теперь эти висячие вершины дерева T' — не мёртвые (а остальные висячие вершины — мертвые), то есть, $u(T') - b(T') = k$. Учитывая сказанное выше, в графе G мы имеем

$$\alpha'(T') = u(T') - c_G(T') - \frac{2}{15} \cdot \Big(u(T') - b(T') \Big) =$$
$$u(T') - c_G(T') - \frac{2k}{15} = u(T') - \left(c_{G'}(T') + \frac{2k}{5} \right) - \frac{2k}{15} \geq$$
$$u(T') - c_{G'}(T') - \frac{8k}{15} \geq 2 - \frac{8k}{15}.$$

Вспомним шаг $Z4$ и при всех $i \in \{1, \dots, k\}$ выделим для каждой вершины w_i три смежные с ней вершины $x_1^i, x_2^i, x_3^i \in V(F)$. Такие тройки для разных вершин не пересекаются, все их вершины не входят в дерево T'. Выполним k раз — по очереди со всеми вершинами $w_1, \dots, w_k$ — шаг $A2$ и шаг $A1$, присоединив к w_i вершины x_1^i, x_2^i, x_3^i. В сумме мы получим доход $k \cdot \frac{8}{15}$ и построим базовое дерево F' с $\alpha'(F') \geq 2$.

2) Рассмотрим последний шаг. На этом шаге не добавилось живых вершин. Просмотрев параметры шагов, можно сделать вывод, что последним мог быть только один из шагов $Z0$, $Z1.1$, $Z1.2$, $Z2.1$, $Z2.2$, $Z3.1$, $Z3.2$, $N4.5.5$ и $M4.5.5$. Шаг $Z2.2$ невозможен, так как для этого шага в графе должна быть конфигурация, рассмотренная в пункте $B1$, а шаг $Z3.2$ невозможен, так как для этого шага в графе должна быть конфигурация, рассмотренная в пункте $B2$. Любой из остальных шагов даёт доход хотя бы $\frac{1}{15}$. $\square$

Таким образом, в дальнейшем нам достаточно доказывать, что на шагах, на которых добавляются живые вершины, будет построено дерево F с $\alpha'(F) \geq \frac{29}{15}$. Продолжим разбор случаев.

B3. *В графе есть вершина a степени не менее* 5.
Начнём построение с базового дерева F', в котором a соединена со всеми вершинами из её окрестности. Очевидно,

$$u(F') = d_G(a) = u \ge 5, \quad c_G(F') \le \frac{2}{5}(u+1) \quad \text{и}$$
$$\alpha'(F') \ge \frac{13}{15}u - c_G(F') \ge \frac{7u-6}{15} \ge \frac{29}{15}.$$

По лемме 6.2, этого достаточно.

B4. *В графе есть вершина $x \in S$, смежная с вершиной степени не более* 2. Пусть

$$v \in \mathrm{N}_G(x), \quad d_G(v) \le 2, \quad \mathrm{N}_G(x) = \{v, y_1, y_2\}.$$

Мы начнём построение с базового дерева F', в котором x соединена со всеми вершинами из её окрестности. Аналогично случаю $B2$, вершина v будет мёртвой. Таким образом, $u(F') = 3$, $b(F') \ge 1$ и

$$\alpha'(F') \ge \frac{13}{15} \cdot 3 + \frac{2}{15} - c_G(F') = \frac{41}{15} - c_G(F').$$

Если хотя бы одна из вершин y_1, y_2 не принадлежит множеству T, то

$$c_G(F') \le 2 \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{и} \quad \alpha'(F') \ge \frac{29}{15}.$$

По лемме 6.2 мы получим $\alpha(G) \ge 2$.

Рассмотрим случай $y_1, y_2 \in T$. Тогда обе вершины y_1, y_2 — живые,

$$c_G(F') = \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} = 1 \quad \text{и} \quad \alpha'(F') = \frac{26}{15}.$$

Построение не закончено, на данный момент нам не хватает $\frac{4}{15}$. При разборе случаев M и N мы решали аналогичную задачу о недостатке дохода в $\frac{3}{15}$ (даже с теми же обозначениями x, y_1, y_2). Повторив эти рассуждения и шаги, мы получим дерево F^* с $\alpha'(F^*) \ge \frac{29}{15}$. Более того, $\alpha'(F^*) < 2$ мы получим только в конфигурациях $M4.3$ и $M4.5.4$, но в этих случаях в построенных деревьях есть живые вершины и по лемме 6.2 последний шаг построения даст дополнительный доход в $\frac{1}{15}$ и обеспечит $\alpha(G) \ge 2$.

Замечание 6.10. В пунктах $B2$ и $B4$ рассмотрены все случаи, когда в графе есть вершина степени не более 2. В пункте $B3$ рассмотрен случай, когда в графе есть вершина степени более 4. Поэтому, далее мы рассматриваем случаи, когда в графе степени всех вершин равны 3 и 4.

В таблице 1 *приведена сводка данных по всем возможным шагам.* Для простоты восприятия доходы всех шагов умножены на 15.

Шаг	$\Delta u - \Delta b$	15·доход
$A1$	1	7
$A2$, $A4$, $M4.2$, $N4.3$, $M4.5.3$	1	1
$A3$, $N4.2$, $M4.5.2$, $N4.5.3$	2	2
$M1$, $M4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.1.1$	0	3
$N1$, $N4.1.2$, $N4.5.1$	1	4
$M2$	2	5
$N2$, $M4.4$	3	6
$M3.1$	-4	5
$N3.1$	-3	6
$M3.2$	-2	4
$N3.2$	-1	5
$M4.1.1$, $N4.5.5$, $Z0$	-1	2
$M4.3$	0	0
$N4.4$	4	7
$N4.5.2$	3	3
$M4.5.4$	3	0
$N4.5.4$	4	1
$M4.5.5$	-2	1
$Z1.1$	-4	2
$Z1.2$	-3	3
$Z2.1$	-5	1

Таблица 1.

Мы учли невозможность шагов $Z2.2$, $Z3.1$, $Z3.2$ и $Z4$. (Про шаги $Z2.2$, $Z3.2$ и $Z4$ сказано в лемме 6.2 и ее доказательстве, шаг $Z3.1$ невозможен, так как мы рассматриваем граф, все вершины которого имеют степени не менее 3.)

С таким большим количеством шагов неудобно работать и следующей леммой мы значительно сократим количество возможных шагов.

Лемма 6.3. *Если в процессе построения остовного дерева (с некоторым базовым деревом) хотя бы раз выполнялся один из указанных ниже шагов, то* $\alpha(G) \geq 2$.

1) *Шаг* $N4.2$, $N4.3$, $N4.4$, $N4.5.2$, $N4.5.3$, $N4.5.5$. *Один из шагов* $N1$, $N2$, $N4.5.4$ *при условии, что все добавленные на этом шаге вершины, кроме* x, *не смежны с деревом* F.

2) *Шаг* $M4.2$, $M4.3$, $M4.4$, $M4.5.2$, $M4.5.3$, $M4.5.5$. *Один из шагов* $M1$, $M2$, $M4.5.4$ *при условии, что все добавленные на этом шаге вершины, кроме* x, *не смежны с деревом* F.

Доказательство. Пусть перед шагом было построено остовное дерево F, к которому через вершину $x \in S \cup T$ уровня 1 добавили поддерево F_0 из нескольких вершин, причём доход шага равен p. Отметим, что во всех указанных в условии шагах вершина x смежна ровно с двумя вершинами из $W = V(G) \setminus V(F)$, а все добавляемые в построенное ранее дерево F вершины, кроме x, не смежны с $V(F)$ — чтобы в этом убедиться, достаточно посмотреть описание шагов и условие леммы.

1) В случае, когда выполнялись шаги типа N, мы имеем $x \in S$. Из таблицы 1 видно, что доход $p \geq \frac{1}{15}$. Вспомним, как производился подсчет дохода шага. Вершина x смежна с единственной вершиной $a \in V(F)$. После присоединения F_0 вершина a перестала быть висячей вершиной, за это из дохода вычли $\frac{13}{15}$. Новые мертвые вершины в исходном дереве F не появлялись, поэтому все новые висячие и мертвые вершины — это вершины дерева F_0, учтенные ровно с такими же коэффициентами, как при

подсчете $\alpha'(F_0)$. Поэтому

$$\alpha'(F_0) = p + \frac{13}{15} \geq \frac{14}{15}.$$

Очевидно, $\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(x) = \varnothing$. Поэтому, в силу замечания 6.2 мы имеем $a \in T$. Следовательно, a смежна с тремя вершинами $b_1, b_2, b_3 \in V(F)$, эти вершины не вошли в дерево F_0. Построим новое базовое дерево F_1, присоединив к F_0 через невисячую вершину x вершины a, b_1, b_2, b_3 (см. рис. 6.9). В результате количество висячих вершин увеличится на 3. Следовательно, от этой операции мы получим доход не менее чем $3 \cdot \frac{13}{15} - 4 \cdot \frac{2}{5} = 1$, в результате $\alpha'(F_1) \geq \frac{29}{15}$, что в виду леммы 6.2 достаточно для $\alpha(G) \geq 2$.

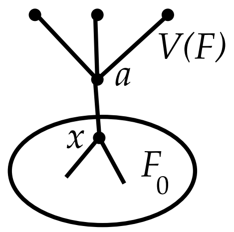


Рис. 6.9: Построение базового дерева. Случай шагов типа N.

2) *Опишем общий алгоритм построения базового дерева для шагов типа M.*

В этом случае $x \in T$. Вспомним, как производился подсчет дохода шага. Вершина x смежна с двумя вершинами $a_1, a_2 \in V(F)$. После присоединения F_0 одна из вершин множества $P(x) = \{a_1, a_2\}$ перестала быть висячей вершиной, за что вычли $\frac{13}{15}$, а другая вершина из $P(x)$ стала мертвой, за что прибавили $\frac{2}{15}$. Все остальные новые висячие и мертвые вершины — это вершины дерева F_0, учтенные ровно с такими же коэффициентами, как при подсчете $\alpha'(F_0)$. Поэтому

$$\alpha'(F_0) = p + \frac{11}{15}.$$

Построим новое базовое дерево F_1, присоединив к невисячей вершине x

дерева F_0 вершины $a_1, a_2 \in V(F)$. За этот шаг мы получили доход

$$2 \cdot \left(\frac{13}{15} - \frac{2}{5}\right) = \frac{14}{15} \quad \text{и} \quad \alpha'(F_1) \geq \frac{25}{15} + p.$$

При $a_1, a_2 \notin T$ мы выиграем хотя бы $\frac{2}{5}$ и получим $\alpha'(F_1) \geq \frac{31}{15}$, что нам достаточно.

Пусть $a_1 \in T$, тогда $d_G(a_1) = 4$. Отметим, что a_1 — висячая вершина дерева F, и потому не смежна с отличными от x вершинами из W, а значит, смежна хотя бы с двумя отличными от a_2 вершинами из $V(F)$. Этих вершин нет в F_1, добавим их в дерево и получим новое дерево F_2. Если мы добавили более двух вершин, то получили доход хотя бы $p(A2)+p(A1) \geq \frac{8}{15}$ (добавление первых двух вершин — шаг $A2$, добавление следующей — шаг $A1$) и $\alpha'(F_2) > 2$.

Остается случай, когда таких вершин две, пусть это b_1, b_2. Отметим, что в этом случае вершины a_1 и a_2 смежны. Добавление двух вершин — это шаг $A2$ с доходом не менее $\frac{1}{15}$, поэтому

$$\alpha'(F_2) \geq \frac{26}{15} + p.$$

При $p \geq \frac{3}{15}$ этого в виду леммы 6.2 достаточно. Для оставшихся шагов мы разберём два случая: a_2 — мёртвая (см. рис. 6.10a) и живая (см. рис. 6.11a) вершина дерева F_2, соответственно.

a. *Пусть a_2 — мёртвая вершина дерева F_2.*
Это увеличивает доход на $\frac{2}{15}$ и обеспечивает

$$\alpha'(F_2) \geq \frac{28}{15} + p.$$

Обе вершины b_1, b_2 — живые вершины дерева F_2, иначе доход возрастает хотя бы на $\frac{2}{15}$ и мы получаем $\alpha'(F_2) \geq 2$. При $p \geq \frac{1}{15}$ в силу леммы 6.2 мы имеем $\alpha(G) \geq 2$. Остаются лишь шаги с нулевым доходом $M4.5.4$ и $M4.3$. Разберем эти два случая.

a1. *Шаг* $M4.5.4$.

Рассмотрим дальнейшее построение остовного дерева указанным выше алгоритмом. У дерева F_2 ровно 7 живых вершин (это b_1, b_2, y_2, z_2, p_2, q_1 и q_2, см. рисунок 6.10c), следовательно, в процессе построения стали мёртвыми не менее чем 7 живых вершин. Посмотрим на таблицу 1: любой шаг, уменьшающий количество живых вершин, приносит доход хотя бы $\frac{1}{15}$, причем ровно с таким доходом можно уменьшить количество живых вершин только на 2 или на 5, то есть, меньше, чем на 7. Значит, за умертвление не менее чем 7 живых вершин мы получим доход хотя бы $\frac{2}{15}$ и $\alpha(G) \geq 2$.

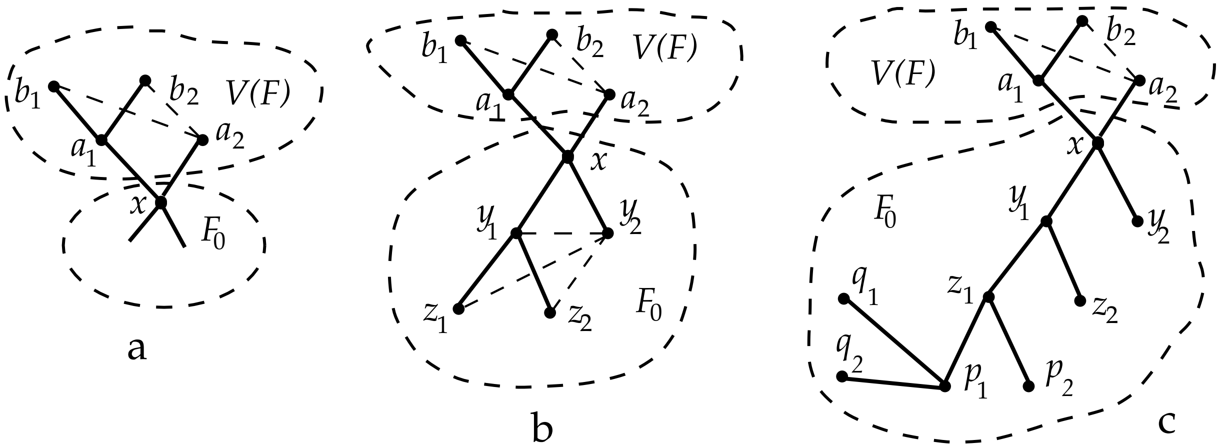


Рис. 6.10: Построение базового дерева. Случай шагов типа M и мёртвой вершины a_2.

a2. *Шаг* $M4.3$.

Рассмотрим дальнейшее построение остовного дерева указанным выше алгоритмом. У дерева F_2 ровно 4 живые вершины (это b_1, b_2, z_1 и z_2, см. рисунок 6.10b), следовательно, в процессе построения стали мёртвыми не менее чем 4 живых вершин. Нам нужно обеспечить суммарный доход оставшихся шагов не менее $\frac{2}{15}$. Уменьшение количества живых вершин всегда приносит доход хотя бы $\frac{1}{15}$. Единственное количество живых вершин, не меньшее 4, за умертвление которых мы получим менее $\frac{2}{15}$ — это 5. Но для получения 5 живых вершин нужно добавить ровно одну живую вершину, а за эту операцию мы получаем доход не менее $\frac{1}{15}$. В любом случае, мы получим $\alpha(G) \ge 2$.

б. *Пусть a_2 — живая вершина дерева F_2.*
Так как a_2 смежна с a_1 и $d_G(a_2) \le 4$, в этом случае хотя бы одна из вершин b_1 и b_2 несмежна с a_2 (пусть это b_1). Если $b_1 \notin T$, то доход увеличивается на $\frac{1}{5}$, в результате $\alpha'(F_2) \ge \frac{29}{15}$ и по лемме 6.2 мы имеем $\alpha(G) \ge 2$.

Значит, $b_1 \in T$. Вершины дерева F_0 несмежны с $b_1 \in V(F)$, поэтому из $V(F_2)$ вершина b_1 смежна только с a_1 и, возможно, с b_2. Следовательно, b_1 смежна хотя бы с двумя вершинами не из $V(F_2)$, которые мы и добавим в дерево F_2, в результате получится дерево F_3. Если мы добавили более двух вершин, то получили доход хотя бы $p(A1) + p(A2) \ge \frac{8}{15}$. В этом случае очевидно, что $\alpha'(F_3) > 2$. Значит, добавлено ровно две вершины, пусть это c_1, c_2 (см. рис. 6.11a). Мы считаем, что b_2, c_1, c_2 — живые вершины дерева F_3. Если среди них есть мертвые, то мы учтем это в конце построения с помощью шагов $Z0$.

Выполнив этот шаг $A2$, мы получили доход $\frac{1}{15}$ и

$$\alpha'(F_3) \ge \frac{27}{15} + p.$$

При $p \ge \frac{2}{15}$ мы имеем $\alpha' \ge \frac{29}{15}$ и по лемме 6.2 получим $\alpha(G) \ge 2$. Остаются лишь шаги с доходом менее $\frac{2}{15}$: это $M4.5.4$, $M4.3$ (с доходом 0), $M4.2$, $M4.5.3$, $M4.5.5$ (с доходом $\frac{1}{15}$). Разберём эти случаи.

б1. *Шаг $M4.5.4$.*
В этом случае в дереве F_3 ровно 9 живых вершин (это a_2, b_2, c_1, c_2, y_2, z_2, p_2, q_1 и q_2, см. рисунок 6.11b) и $\alpha'(F_3) \ge \frac{27}{15}$. Рассмотрим дальнейшее построение остовного дерева указанным выше алгоритмом. За умертвление одним шагом любого количества висячих вершин, кроме 2 и 5, мы получаем доход не менее $\frac{2}{15}$ (можно умертвить за шаг 1, 2, 3, 4 или 5 висячих вершин, см. таблицу 1). Поэтому, единственное количество умертвленных вершин, не меньшее 9, за которое доход может быть менее $\frac{3}{15}$ — это 10

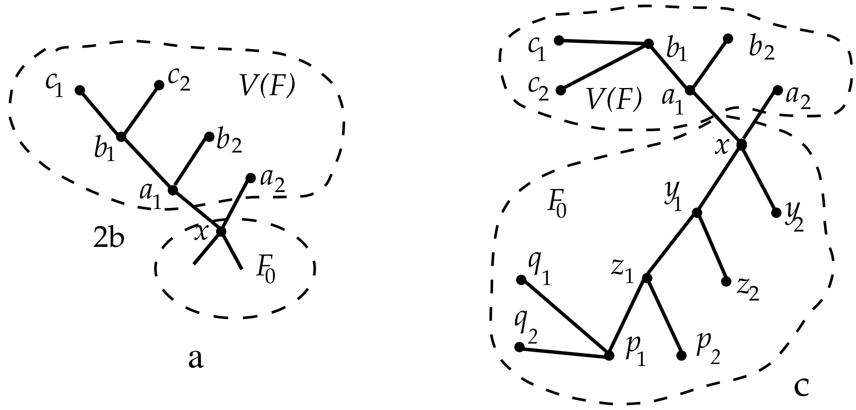


Рис. 6.11: Построение базового дерева. Случай шага $M4.5.4$ и мёртвой вершины a_2.

(доход $\frac{2}{15}$). Но для получения 10 вершин нужно добавить ровно одну живую вершину, а за эту операцию мы получаем доход не менее $\frac{1}{15}$. В любом случае, мы получим $\alpha(G) \geq 2$.

Замечание 6.11. Теперь случаи шагов $M4.5.4$ и $N4.5.4$ в лемме 6.3 полностью разобраны.

Пусть с помощью нашего алгоритма было построено остовное дерево T с $\alpha(T) < 2$ и в процессе построения остовного дерева выполнялся шаг $M4.5.4$ или $N4.5.4$. Пусть F — дерево, построенное перед шагом. Тогда хотя бы одна из добавленных на этом шаге вершин должна быть смежна с деревом F. Это может быть только одна из двух добавленных висячих вершин, смежных с p_1 (иначе был бы выполнен один из предыдущих шагов, см. рисунок 6.6 и описания шагов). Назовём эту вершину q.

Если $q \in T$ (в этом случае мы назовём шаги $M4.5.4.1$ и $N4.5.4.1$), то q смежна с двумя вершинами из $V(F)$ (по замечанию 6.5), что добавляет нам две мёртвые вершины. Таким образом,

$$p(M4.5.4.1) \geq p(M4.5.4) + 2 \cdot \frac{2}{15} \geq \frac{4}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 3,$$

$$p(N4.5.4.1) \geq p(N4.5.4) + 2 \cdot \frac{2}{15} \geq \frac{5}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 2.$$

Если $q \notin T$ (в этом случае мы назовём шаги $M4.5.4.2$ и $N4.5.4.2$), то добавляется одна мёртвая вершина и еще не менее $\frac{1}{5}$ в доход, так как цена вершины q уменьшается. В этом случае

$$p(M4.5.4.2) \geq p(M4.5.4) + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} \geq \frac{5}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 2,$$

$$p(N4.5.4.2) \geq p(N4.5.4) + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} \geq \frac{6}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 1.$$

Теперь можно утверждать, что любой увеличивающий число живых вершин шаг приносит доход хотя бы $\frac{1}{15}$. Это обстоятельство мы будем использовать в последующих рассуждениях.

Продолжим доказательство леммы 6.3.

б2. *Шаг* $M4.3$.

В этом случае в дереве F_3 ровно 6 живых вершин (это a_2, b_2, c_1, c_2, z_1 и z_2, см. рисунок 6.12a) и $\alpha'(F_3) \geq \frac{27}{15}$. За умертвление любого количества живых вершин, большего 5, мы получаем доход не менее $\frac{2}{15}$, причём за 6 вершин мы получаем хотя бы $\frac{3}{15}$. А при увеличении количества живых вершин получим дополнительный доход не менее $\frac{1}{15}$. В любом случае, мы получим $\alpha(G) \geq 2$.

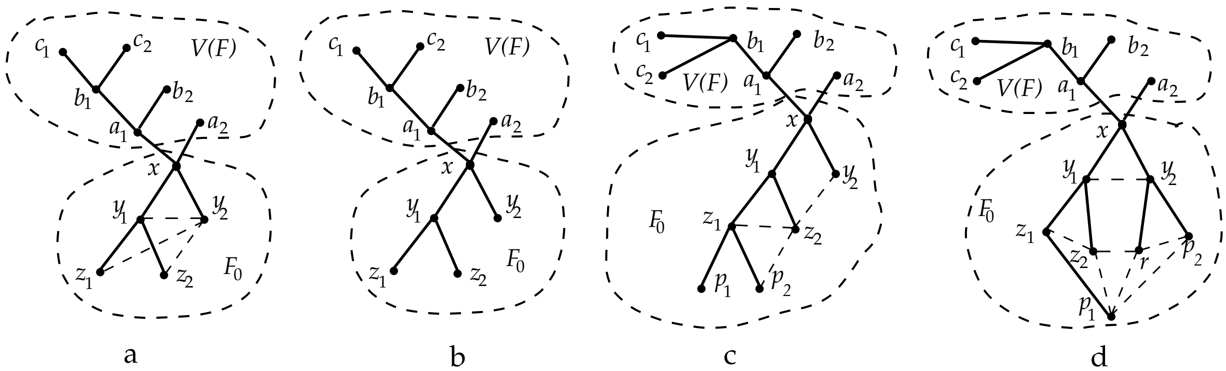


Рис. 6.12: Построение базового дерева. Случай мёртвой вершины a_2 и шагов $M4.3$, $M4.2$, $M4.5.3$ и $M4.5.5$.

б3. *Шаги* $M4.2$, $M4.5.3$, $M4.5.5$. В этих случаях

$$\alpha'(F_3) \geq \frac{28}{15}.$$

Для шага $M4.2$ в дереве F_3 ровно 7 живых вершин (это a_2, b_2, c_1, c_2, y_2, z_1 и z_2, см. рисунок 6.12b). Для шага $M4.5.3$ в дереве F_3 также ровно 7 живых вершин (это a_2, b_2, c_1, c_2 и какие-то три из вершин y_2, z_2, p_1 и p_2, см. рисунок 6.12c) в дереве F_3 ровно 7 живых вершин. Значит, необходимо умертвить не менее 7 живых вершин, за что мы получим доход хотя бы $\frac{2}{15}$ (см. таблицу 1) и обеспечим $\alpha(G) \geq 2$.

В случае шага $M4.5.5$ (см. рисунок 6.12d) в дереве F_3 ровно 4 живых вершины: это a_2, b_2, c_1 и c_2. Следовательно, мы должны умертвить $m \geq 4$ живых вершины. Из таблицы 1 видно, что если $m \neq 5$, то мы получим доход не менее $\frac{2}{15}$ и обеспечим $\alpha(G) \geq 2$. Предположим, что $m = 5$. В этом случае за умертвление вершин мы получим доход хотя бы $\frac{1}{15}$. Однако, нужно сделать хотя бы один шаг, увеличивающий число живых вершин, который даст доход хотя бы $\frac{1}{15}$ и также обеспечит $\alpha(G) \geq 2$. $\square$

Теперь в нашей таблице шагов произошли большие изменения, ниже приведём обновленный вариант — таблицу 2.

Замечание 6.12. 1) Анализируя таблицу 2, легко сделать следующие выводы:

— за любой шаг мы получаем доход хотя бы $\frac{1}{15}$;

— за один или несколько шагов, увеличивающих количество живых вершин 5, мы получаем доход хотя бы $\frac{5}{15}$.

— шаг, не меняющий количества живых вершин, приносит доход хотя бы $\frac{3}{15}$.

— шаг, уменьшающий количество живых вершин на величину, отличную от 5, приносит доход хотя бы $\frac{2}{15}$.

2) Построение остовного дерева по нашему алгоритму заканчивается тогда и только тогда, когда все висячие вершины построенного дерева становятся мертвыми. Поэтому нетрудно понять, что у последнего шага построения параметр $\Delta u - \Delta b$ должен быть отрицательным.

Шаг	$\Delta u - \Delta b$	15·доход
$A1$	1	7
$A2$, $A4$	1	1
$A3$	2	2
$M1$, $M4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.1.1$	0	3
$N1$, $N4.1.2$, $N4.5.1$, $M4.5.4.1$	1	4
$M2$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$	2	5
$N2$, $N4.5.4.2$	3	6
$M3.1$	-4	5
$N3.1$	-3	6
$M3.2$	-2	4
$N3.2$	-1	5
$M4.1.1$, $Z0$	-1	2
$Z1.1$	-4	2
$Z1.2$	-3	3
$Z2.1$	-5	1

Таблица 2.

Продолжим рассмотрение случаев в построении базового дерева.

B5. *В графе есть две смежные вершины $a \in T$ и $b \in S$, у которых $\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(b) = \varnothing$.*

Мы начнём построение с базового дерева F', в котором a и b соединены друг с другом и со всеми вершинами из их окрестностей. В таком дереве

$$u(F') = 5, \quad c_G(F') \le \frac{1}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{5} \quad \text{и} \quad \alpha'(F') \ge 5 \cdot \frac{13}{15} - c_G(F') \ge \frac{26}{15}.$$

Если хотя бы одна из висячих вершин дерева F' не принадлежит множеству T, это увеличит $\alpha'(F')$ на $\frac{1}{5}$ и сделает $\alpha'(F') \ge \frac{29}{15}$, чего с учётом леммы 6.2 нам достаточно.

Остаётся случай, когда все эти вершины — из T, то есть, имеют степень 4. Будем достраивать дерево по нашему алгоритму. Рассмотрим два варианта.

B5.1. *В процессе построения увеличивалось количество живых вершин.*
Изначально это количество равно 5. За умертвление любого количества живых вершин, большего 5, мы получим хотя бы $\frac{2}{15}$, причём ровно $\frac{2}{15}$ можно получить только за 10 вершин. Для остальных количеств мы получим за умертвление доход хотя бы $\frac{3}{15}$ и еще хотя бы $\frac{1}{15}$ за увеличение количества живых вершин и обеспечим $\alpha(G) \geq 2$.

Пусть количество живых вершин увеличилось до 10. По замечанию 6.12, мы на этом получили доход хотя бы $\frac{5}{15}$. Следовательно, $\alpha(G) > 2$.

B5.2. *В процессе построения не увеличивалось количество живых вершин.*
Предположим, что был выполнен какой-то шаг, не изменивший количество живых вершин и мы получили дерево F_1. По замечанию 6.12, этот шаг — не последний, а его доход был хотя бы $\frac{3}{15}$. Значит, $\alpha'(F_1) \geq \frac{29}{15}$, и по лемме 6.2 мы можем утверждать, что $\alpha(G) \geq 2$.

Остаётся случай, когда с базовым деревом F' производились только шаги, уменьшающие количество живых вершин. Нужно умертвить 5 живых вершин. Любой способ сделать это, кроме шага $Z2.1$, даст доход хотя бы $\frac{4}{15}$ и обеспечит $\alpha(G) \geq 2$. Значит, выполнен шаг $Z2.1$, добавивший две смежные вершины a' степени 4 и b' степени 3.

Таким образом, наш граф состоит из 9 вершин: в нем есть две копии дерева F' (с центрами a, b и a', b') с пятью общими висячими вершинами

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{N}_G(a) \quad \text{и} \quad y_1, y_2 \in \mathrm{N}_G(b).$$

Из $d_G(x_1) = d_G(x_2) = d_G(x_3) = d_G(y_1) = d_G(y_2) = 4$ следует, что $G(\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2\})$ — регулярный граф степени 2, то есть, цикл из пяти вершин. В любом случае, существуют два независимых ребра, соединяющих $\{x_1, x_2, x_3\}$ с $\{y_1, y_2\}$. Пусть это будут рёбра x_1y_1 и x_2y_2.

Можно считать, что x_1 и y_2 — несоседние вершины этого цикла из 5 вершин. (Если вершины x_1 и y_2 — соседние в цикле, то x_2 и y_1 — несоседние. В этом случае мы сменим нумерацию вершин.) Тогда

$$a, b, x_2, x_3, y_1 \in \mathrm{N}_G(x_1) \cup \mathrm{N}_G(y_2),$$

причём одна из вершин x_2, x_3, y_1 входит в $\mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$.

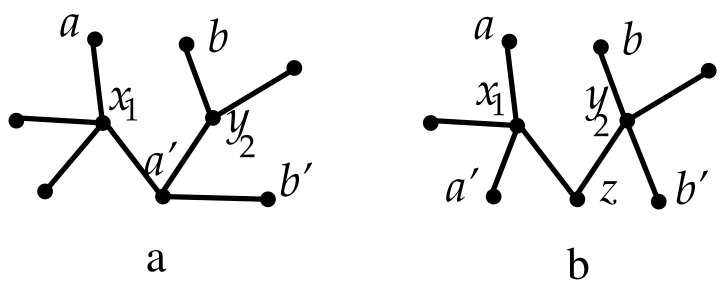


Рис. 6.13: Случай $B5.2$.

Если $a' \in \mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$, то построим остовное дерево, соединив a' с x_1 и y_2 и присоединив к ним все остальные вершины (вершину b' присоедним к a', см. рис. 6.13a). Аналогично в случае $b' \in \mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$. Остаётся случай, когда одна из вершин a' и b' смежна с x_1, а другая — с y_2. Тогда соединим x_1 и y_2 с вершиной из $\mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$ (выше сказано, почему такая есть, назовём ее z) и присоединим к этим двум вершинам все остальные (см. рис. 6.13b). В итоге получится остовное дерево с 6 висячими вершинами. Остается лишь отметить, что $6 > \frac{2}{5} \cdot 7 + \frac{1}{5} \cdot 2 + 2$.

Замечание 6.13. 1) В рассматриваемых далее случаях не выполняются шаги $Z2.1$ и $A4$ в виду отсутствия разобранной в пункте $B5$ конфигурации.

2) Далее мы считаем, что любые две смежные вершины $a, b \in V(G)$ имеют общую смежную вершину. Действительно, пусть это не так и $\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(b) = \varnothing$. Случай $a, b \in S$ невозможен — мы выполнили бы редукцию $R2$. Если $a, b \in T$, то граф удовлетворял бы условию пункта $B1$.

А в случаях, когда одна из вершин принадлежит множеству S, а другая — множеству T, граф удовлетворял бы условию пункта $B5$.

B6. *В графе нет вершин степени* 4.

Это означает, что G — регулярный граф степени 3. В этом случае Клейтман и Вест [19] доказали, что в таком графе $u(G) \geq s \cdot \frac{1}{4} + 2$, откуда следует результат нашей теоремы.

Лемма 6.4. *Если $\alpha(G) < 2$, то после любого из шагов $M1$, $N1$, $M2$, $N2$, $M3.1$, $N3.1$, $M3.2$, $N3.2$, $M4.1.1$, $N4.1.1$, $M4.1.2$, $N4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.5.1$, $M4.5.4.1$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$, $N4.5.4.2$ должна появиться дополнительная (по отношению к таблице 2) мёртвая вершина.*

Доказательство. В каждом из этих шагов одна из добавленных висячих вершин v была смежна с $V(F)$ (для шагов $M1$, $N1$, $M2$, $N2$, $M4.5.4.1$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$, $N4.5.4.2$ это было установлено в лемме 6.3, для шагов $M3.1$, $N3.1$, $M3.2$, $N3.2$ это установлено сразу после описания шага 3, для остальных шагов — следует из их описания).

Вспомним детали шагов. Во всех шагах мы к дереву F присоединяли некоторое поддерево (назовем его F_0, см. рисунок 6.14) через корень $x \in W$, где $W = V(G) \setminus V(F)$. Напомним, что все вершины из W, смежные с $V(F)$, называются вершинами уровня 1.

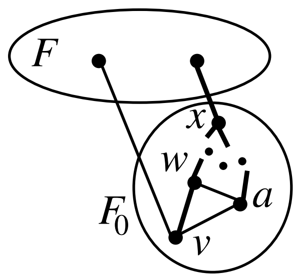


Рис. 6.14: Дополнительная мертвая вершина.

Отметим, что $v \neq x$ (вершина x во всех шагах — невисячая). Тогда существует $w \in W$ — предок v в добавленном поддереве F_0. По замечанию 6.13 мы имеем $\mathrm{N}_G(v) \cap \mathrm{N}_G(w) \neq \varnothing$.

Пусть a — вершина, смежная и с v, и с w. Понятно, что $a \notin V(F)$, так как ни одна вершина из $V(F)$ не смежна с двумя вершинами из W по замечанию 6.5. Вершина w — невисячая в полученном после шага дереве. Тогда по построению все смежные с w вершины лежат в $V(F) \cup V(F_0)$ (в этом несложно убедиться, просмотрев детали шагов). Следовательно, $a \in V(F_0)$. Таким образом, v имеет две смежные вершины $w, a \in W$, вошедшие в построенное после шага дерево. Вершина $v \in W$ — вершина уровня 1, так как смежна с $V(F)$. Тогда по замечанию 6.5 вершина v не может быть смежна более чем с двумя вершинами из W. Поэтому v после окончания шага будет мёртвой вершиной, которая не учтена в параметрах шага. $\square$

Шаг	$\Delta u - \Delta b$	15·доход
$A1$	1	7
$A2$	1	1
$A3$	2	2
$M1$, $M4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.1.1$	-1	5
$N1$, $N4.1.2$, $N4.5.1$, $M4.5.4.1$	0	6
$M2$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$	1	7
$N2$, $N4.5.4.2$	2	8
$M3.1$	-5	7
$N3.1$	-4	8
$M3.2$	-3	6
$N3.2$	-2	7
$M4.1.1$	-2	4
$Z0$	-1	2
$Z1.1$	-4	2
$Z1.2$	-3	3

Таблица 3.

Перед последним и самым сложным случаем перепишем нашу таблицу шагов, добавив в указанные в лемме 6.4 шаги по мёртвой вершине и доход за нее. Кроме того, уберем шаги $Z2.1$ и $A4$, невозможные в виду замечания 6.13. Обновленные параметры шагов приведены в таблице 3.

B7. *Граф не удовлетворяет условию ни одного из предыдущих случаев.* Тогда в графе есть вершина a степени 4. Если соединить a с вершинами из ее окрестности, получится дерево F' с 4 висячими вершинами v_1, v_2, v_3, v_4. Мы считаем эти вершины живыми. Если среди них есть мёртвые, это будет оформлено соответствующим количеством шагов Z_0. Тогда

$$\alpha'(F') \ge 4 \cdot \frac{13}{15} - 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{22}{15}.$$

Продолжим построение по нашему алгоритму. Подсчитаем суммарное количество прибавок живых вершин на шагах, когда их изменение положительно и обозначим его через ℓ. Шаги, уменьшающие количество живых вершин, должны умертвить $\ell + 4$ вершины. Разберём несколько случаев.

B7.1. $\ell \ge 2$.

Из таблицы 3 видно, что добавив ℓ живых вершин мы получили доход не менее $\frac{\ell}{15}$. При $\ell = 2$ мы должны умертвить 6 живых вершин, минимальный доход за это равен $\frac{6}{15}$, получаем $\alpha(G) \ge 2$.

При $\ell = 3$ мы должны умертвить 7 живых вершин, минимальный доход за это равен $\frac{5}{15}$, получаем $\alpha(G) \ge 2$.

При $\ell \ge 4$ мы должны умертвить не менее 8 живых вершин, минимальный доход за это не менее $\frac{4}{15}$, получаем $\alpha(G) \ge 2$.

B7.2. $\ell = 0$.

По замечанию 6.12 последний шаг должен иметь отрицательный параметр $\Delta u - \Delta b$. Из таблицы 3 легко видеть, что такой шаг добавляет в доход не менее $\frac{2}{15}$. Если был сделан шаг, не изменяющий количество живых вершин, за него получен доход не менее $\frac{6}{15}$, тогда $\alpha(G) \ge 2$.

Значит, выполнялись только шаги, уменьшающие количество живых вершин. Из таблицы 3 видно, что существуют два способа умертвить 4 живых вершины, заработав менее $\frac{8}{15}$ (и не обеспечив $\alpha(G) \geq 2$) — это шаг $Z0$ вместе с шагом $Z1.2$ (суммарный доход $\frac{5}{15}$) и шаг $Z1.1$ (доход $\frac{2}{15}$).

B7.2.1. *Выполнены шаг* $Z0$ *и шаг* $Z1.2$.

Мы получаем доход $\frac{5}{15}$, итого $\alpha(G) \geq \frac{27}{15}$. Если хотя бы одна из висячих вершин дерева F' не из T, то доход вырастет хотя бы на $\frac{3}{15}$ и получится $\alpha(G) \geq 2$. Значит, все эти вершины из T и имеют степень 4 в графе G. Тогда в графе G ровно 6 вершин: 5 вершин степени 4 и одна вершина степени 3 (добавленная на шаге $Z1.2$). Очевидно, это невозможно.

B7.2.2. *Выполнен шаг* $Z1.1$.

Мы получаем доход $\frac{2}{15}$, итого $\alpha(G) \geq \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$. Граф в этом случае имеет 6 вершин. Добавленная на последнем шаге вершина имеет степень 4. Если хотя бы две из вершин v_1, v_2, v_3, v_4 не принадлежат T, то доход увеличивается на $\frac{6}{15}$ и $\alpha(G) \geq 2$. Если одна из них не принадлежит T, мы получаем граф на 5 вершинах степени 4 и одной вершине степени 3, что невозможно. Значит, $\alpha(G) < 2$ может быть только у регулярного графа степени 4 на 6 вершинах, нетрудно понять, что единственный такой граф — это C_6^2, который действительно является графом-исключением ($\alpha(C_6^2) = \frac{8}{5}$).

B7.3. $\ell = 1$.

В этом случае мы сделали ровно один шаг, увеличивающий количество живых вершин, и увеличили его на 1. Из таблицы 3 видно, что либо это шаг $A2$, либо мы получили доход хотя бы $\frac{7}{15}$ и дерево F_1 с $\alpha'(F_1) \geq \frac{29}{15}$, что достаточно для $\alpha(G) \geq 2$.

Значит, мы сделали ровно один шаг $A2$ с доходом $\frac{1}{15}$ и получили дерево F_1 с $\alpha'(F_1) \geq \frac{23}{15}$. Как и в предыдущем пункте, если мы сделали шаг, не изменяющий количество живых вершин, то $\alpha(G) \geq 2$. Значит, шаг $A2$ был единственным, кроме шагов, уменьшающих число живых вершин. Из таблицы 3 видно, что существует единственный способ умертвить 5 живых вершин, заработав менее $\frac{7}{15}$ (и не обеспечив $\alpha \geq 2$) — это шаг $Z0$ вместе с шагом $Z1.1$ (доход $\frac{4}{15}$, добавляет вершину степени 4). Суммарный доход всех этих шагов обеспечивает $\alpha(G) \geq \frac{27}{15}$.

Если хотя бы одна из вершин v_1, v_2, v_3, v_4 или двух вершин, добавленных на шаге $A2$, имеет степень 3, то доход увеличивается на $\frac{3}{15}$ и обеспечивает $\alpha(G) \geq 2$. В оставшемся случае G — регулярный граф степени 4 на 8 вершинах.

По замечанию 6.13 каждое ребро графа G должно входить в треугольник. Убедимся, что с точностью до изоморфизма существует два 4-регулярных графа на 8 вершинах, которые удовлетворяют этому условию. Если G является вершинно 4-связным графом, то воспользуемся работой [27] — там доказано, что G — это C_n^2 или рёберный граф 4-циклически-связного кубического графа. Вторая возможность отпадает, так как количество вершин такого рёберного графа должно делиться на 3, а первая возможность даёт граф C_8^2, который является исключением ($\alpha(C_8^2) = \frac{9}{5}$).

Пусть G имеет разделяющее множество R менее чем из 4 вершин. Нетрудно понять, что множество из $4-k$ вершин не может отделить в 4-регулярном графе компоненту связности, содержащую менее $k+1$ вершины, поэтому $|R| \geq 2$.

Если $|R| = 2$, то существует единственная возможность: множество R должно разделять граф на две компоненты связности из трёх вершин, причём все эти 6 вершин должны быть смежны с двумя вершинами множества R. Тогда степени вершин из R будут по 6, противоречие.

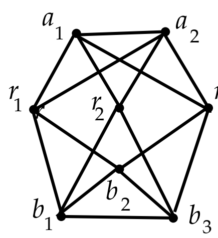


Рис. 6.15: Граф G_8.

Пусть $|R| = 3$, $R = \{r_1, r_2, r_3\}$. Тогда одна из компонент связности содержит две вершины (пусть это a_1, a_2), а другая — три вершины (b_1, b_2, b_3), см. рисунок 6.15. Легко понять, что a_1 и a_2 смежны и каждая из них смежна с r_1, r_2, r_3 (иначе $d_G(a_i) < 4$). От каждой из вершин r_1, r_2, r_3 выходит не более, чем по два ребра к b_1, b_2, b_3, значит, сумма степеней вершин в графе $G(\{b_1, b_2, b_3\})$ не менее 6, то есть, это треугольник. Следовательно, от каждой из вершин r_1, r_2, r_3 выходит ровно по два ребра к b_1, b_2, b_3, то есть, вершины r_1, r_2, r_3 попарно не смежны. Теперь двудольный граф с долями $\{r_1, r_2, r_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ определяется однозначно — это $K_{3,3}$ без паросочетания. Полученный граф — это граф G_8, изображенный на рисунке 6.15. Нетрудно убедиться в том, что $\alpha(G_8) = \frac{27}{15}$, то есть, этот граф действительно является исключением.

6.1.5 Редукция и контрпримеры

Докажем, что если к графу G хотя бы один раз было применено редукционное правило $R1$ или $R2$, то G — не исключение.

Как мы знаем, применение правил $R1$ и $R2$ не может уменьшить $\alpha(G)$. Значит, достаточно доказать, что $\alpha(G) \geq 2$ для графа G, из которого с помощью $R1$ или $R2$ получен один из графов C_6^2, C_8^2 или G_8. Рассмотрим 6 случаев.

1. *После применения $R1$ получился граф C_6^2.*

Пусть из нашего графа G получился квадрат цикла $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ после того, как на одном из рёбер убрали вершину w степени 2. Не умаляя общности положим, что вершина w была на ребре a_1a_2 или a_1a_3. В обоих случаях легко построить остовные деревья с 5 висячими вершинами: см. рис. 6.16a и 6.16b. Значит,

$$u(G) \geq 5 > 6 \cdot \frac{2}{5} + 2 \quad \text{и} \quad \alpha(G) > 2.$$

2. *После применения $R2$ получился граф C_6^2.*

Обозначения оставим, как в предыдущем случае, пусть после склеивания

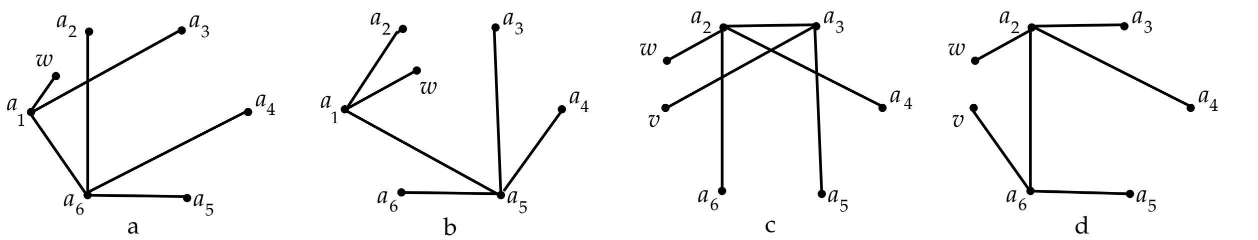


Рис. 6.16: Редукция: случай C_6^2.

двух вершин v и w степени 3 образовалась вершина a_1. Не умаляя общности предположим, что вершина a_2 смежна в графе G с w. Если a_3 смежна в G с v, мы построим остовное дерево с 5 висячими вершинами, как на рисунке 6.16c. Если a_3 смежна в G с w, то вершина a_6 смежна в графе G с v, и мы построим остовное дерево с 5 висячими вершинами, как на рисунке 6.16d. Таким образом, $u(G) \geq 5$ и $\alpha(G) > 2$.

3. *После применения $R1$ получился граф C_8^2.*
Пусть из нашего графа G получился квадрат цикла $a_1a_2 \ldots a_8$ после того, как на одном из рёбер убрали вершину w степени 2. Не умаляя общности положим, что вершина w была на ребре a_1a_2 или a_1a_3. В первом случае построим остовное дерево с 6 висячими вершинами, как на рисунке 6.17a, а во втором случае — как на рисунке 6.17b. Таким образом,

$$u(G) \geq 6 > 8 \cdot \frac{2}{5} + 2 \quad \text{и} \quad \alpha(G) > 2.$$

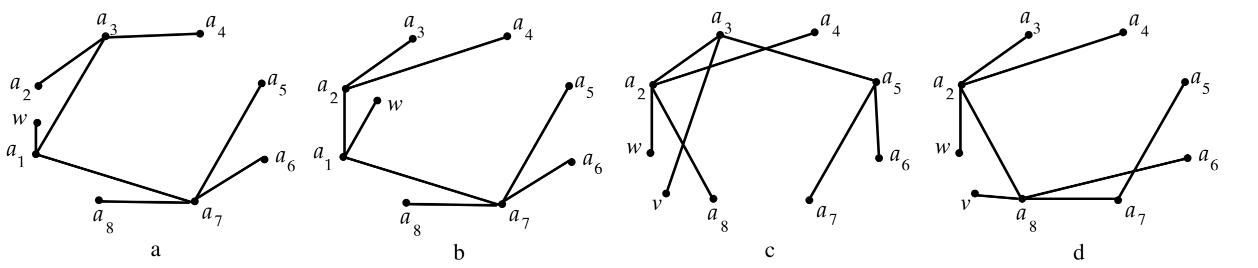


Рис. 6.17: Редукция: случай C_8^2.

4. *После применения $R2$ получился граф C_8^2.*
Обозначения оставим, как в предыдущем случае, пусть после склеивания

двух вершин v и w степени 3 образовалась вершина a_1. Не умаляя общности предположим, что вершина a_2 смежна в графе G с w.

Если a_3 смежна в G с v, мы построим остовное дерево с 6 висячими вершинами, как на рисунке 6.17c. Если a_3 смежна в G с w, то вершина a_8 смежна в графе G с v и мы построим остовное дерево с 6 висячими вершинами, как на рисунке 6.17d. Таким образом, $u(G) \geq 6$ и $\alpha(G) > 2$.

5. *После применения* $R1$ *получился граф* G_8.
Будем использовать для графа G_8 обозначения, как на рисунке 6.15. В силу симметрии достаточно разобрать четыре случая расположения вершины w графа G на одном из ребер графа G_8: на a_1a_2 (остовное дерево с 6 висячими вершинами изображено на рисунке 6.18a), b_1b_3 (рисунок 6.18b), r_3b_3 (рисунок 6.18c) и r_3a_1 (рисунок 6.18d). Тем самым, в любом случае построено остовное дерево графа G с 6 вершинами, $u(G) \geq 6$ и $\alpha(G) > 2$.

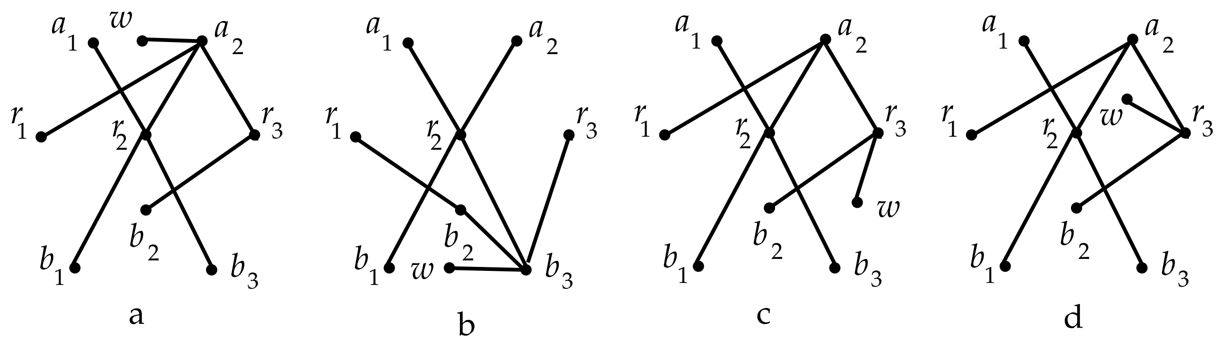


Рис. 6.18: Редукция: случай графа G_8 и правила $R1$.

6. *После применения* $R2$ *получился граф* G_8.
Обозначения оставим, как в предыдущем случае. В силу симметрии графа возможны три принципиально разных варианта: после склеивания двух вершин v и w степени 3 в графе G образовалась вершина a_1, b_1, r_1 соответственно.

Если образовалась вершина a_1, то $\mathrm{N}_G(\{w, v\}) = \{a_2, r_1, r_2, r_3\}$. Рассмотрим дерево F_1, изображенное на рисунке 6.19a. В нем три невисячих вершины a_2, r_2, r_3 и каждая из вершин w и v смежна в графе G с одной из них. Следовательно, F_1 можно преобразовать в остовное дерево графа G с 6 висячими вершинами.

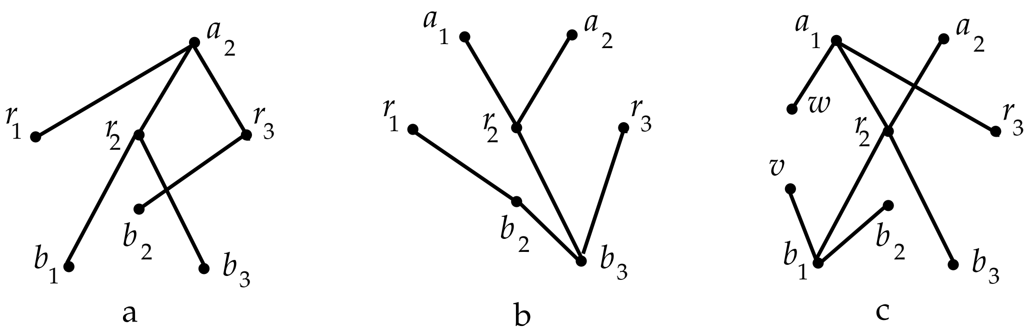


Рис. 6.19: Редукция: случай графа G_8 и правила $R2$.

Если образовалась вершина b_1, то $\mathrm{N}_G(\{w,v\}) = \{b_2, b_3, r_1, r_2\}$. Рассмотрим дерево F_2, изображенное на рисунке 6.19b. В нём три невисячих вершины b_2, b_3, r_2 и каждая из вершин w и v смежна с одной из них. Следовательно, F_2 можно преобразовать в остовное дерево графа G с 6 висячими вершинами.

Пусть образовалась вершина r_1, тогда $\mathrm{N}_G(\{w,v\}) = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. В силу симметрии возможны два принципиально разных случая:

— $a_1, a_2 \in \mathrm{N}_G(w)$, $\quad b_1, b_2 \in \mathrm{N}_G(v)$;

— $a_1, b_2 \in \mathrm{N}_G(w)$, $\quad a_2, b_1 \in \mathrm{N}_G(v)$.

В обоих случаях построим остовное дерево с 6 вершинами в графе G, как на рисунке 6.19c.

Таким образом, в любом случае $u(G) \geq 6$ и $\alpha(G) > 2$.

Теперь мы полностью доказали теорему 6.1.

6.1.6 Экстремальные примеры

Существует много бесконечных серий примеров графов G, содержащих $s > 0$ вершин степени 3 и $t > 0$ вершин степени более 3, для которых

$$u(G) = \frac{2}{5}t + \frac{1}{4}s + 2.$$

Мы приведём пример серии графов, все вершины которых имеют степени 3 и 4. Таким образом, графы этой серии являются также обещанными во введении контрпримерами к сильной гипотезе Линиала.

Приступим к построению. Ключевой деталью нашего построения будет следующий граф D_i: к графу K_4 на вершинах x_i, y_i, z_i, v_i добавлены вершина a_i, смежная с x_i и y_i, и вершина b_i, смежная с z_i и v_i. Графы $D_1, \ldots,$ D_n (где $n > 1$) мы расположим по циклу и соединим a_{i+1} с b_i (мы считаем, что $n + 1 = 1$). Полученный граф обозначим H_n (см. рисунок 6.20). Очевидно,

$$v(H_n) = 6n, \quad c(H_n) = 2n \cdot \frac{1}{5} + 4n \cdot \frac{2}{5} = 2n.$$

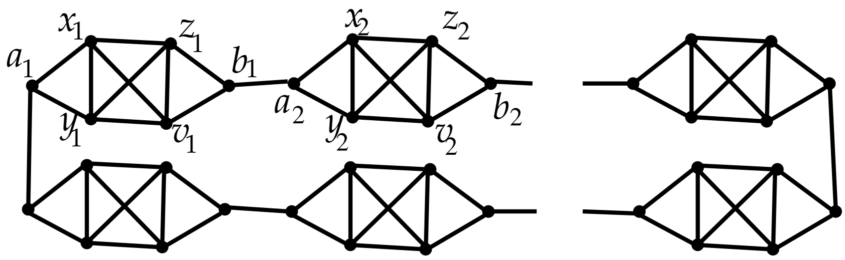


Рис. 6.20: Экстремальные примеры.

Покажем, что $u(H_n) = 2n + 2$. Отметим, что множество висячих вершин остовного дерева T не является разделяющим в графе H_n. Рассмотрим следующую циклическую последовательность из $4n$ непересекающихся множеств вершин графа H_n:

$$\{a_1\}, \{x_1, y_1\}, \{z_1, v_1\}, \{b_1\}, \quad \{a_2\}, \{x_2, y_2\}, \{z_2, v_2\}, \{b_2\}, \quad \ldots$$
$$\{a_n\}, \{x_n, y_n\}, \{z_n, v_n\}, \{b_n\}.$$

Любые два несоседних в циклическом порядке множества в объединении дают разделяющее множество графа G, поэтому множество U висячих вершин остовного дерева не может содержать их объединение. Следовательно, U содержит не более чем два множества из нашей последовательности. Значит, хотя бы $4n - 2$ из этих множеств содержат вершину, не входящую в U, то есть,

$$|U| \le v(H_n) - 4n + 2 = 2n + 2.$$

Пример остовного дерева графа H_n с $2n+2$ листьями построить несложно.

6.2 Нижняя оценка на $u(G)$ через количество вершин степеней 1, 3 и не менее 4

Теорема 6.2. *Пусть G — связный граф с более чем одной вершиной, s — количество его вершин степеней 1 и 3, а t — количество его вершин степени не менее 4. Тогда*

$$u(G) \ge \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}s + \frac{3}{2}.$$

Раздел посвящен доказательству теоремы 6.2.

При построении искомого остовного дерева для графа G мы будем считать, что для всех меньших графов (то есть, графов, имеющих меньше вершин или столько же вершин, но меньше рёбер) теорема уже доказана.

Пусть $S(G)$ — множество вершин степеней 1 и 3, а $T(G)$ — множество вершин степени не менее 4 в графе G, $s(G) = |S(G)|$, $t(G) = |T(G)|$.

Определение 6.4. Будем считать, что *цена* вершины $x \in V(G)$ — это

$$c_G(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{при } x \in T(G), \\ \frac{1}{4} & \text{при } x \in S(G), \\ 0 & \text{при } x \notin T(G) \cup S(G). \end{cases}$$

Стоимостью графа G назовём величину

$$c(G) = \frac{1}{3}t(G) + \frac{1}{4}s(G) = \sum_{x \in V(G)} c_G(x).$$

Для любого подграфа F графа G определим *его стоимость в графе* G как

$$c_G(F) = \sum_{x \in V(F)} c_G(x).$$

Мы хотим доказать неравенство $u(G) \geq c(G) + \frac{3}{2}$, очевидно, эквивалентное утверждению теоремы 6.2.

6.2.1 Редукция

В некоторых случаях мы будем сводить задачу к меньшему графу. Для редукции нам понадобится несколько вспомогательных определений и утверждений.

Определение 6.5. Пусть даны два графа G_1 и G_2, в которых выделены вершины $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$ соответственно, $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$. *Склеить* графы G_1 и G_2 по вершинам x_1 и x_2 означает склеить две вершины x_1 и x_2 в одну вершину x, которой будут переданы все выходящие из x_1 и x_2 рёбра обоих графов. Остальные вершины и рёбра графов G_1 и G_2 войдут в полученный при склейке граф без изменений.

Напомним, что *мост* графа G — это его ребро, не входящее ни в один цикл.

Лемма 6.5. *Пусть G_1 и G_2 — связные графы с $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$, $v(G_1) \geq 2$, $v(G_2) \geq 2$ и висячими вершинами x_1 и x_2. Пусть G — граф, полученный из G_1 и G_2 склеиванием по вершинам x_1 и x_2 и последующим стягиванием нескольких мостов, не инцидентных висячим вершинам. Тогда*

$$u(G) = u(G_1) + u(G_2) - 2.$$

Доказательство. Пусть G' — граф, полученный из G_1 и G_2 склеиванием по x_1 и x_2. Очевидно, мосты графа G' входят в любое его остовное дерево. Поэтому, при стягивании мостов, не инцидентных висячим вершинам, не меняется максимально возможное число листьев в остовном дереве, то есть, $u(G') = u(G)$. Остаётся доказать, что

$$u(G') = u(G'_1) + u(G'_2) - 2.$$

Пусть x — вершина графа G', полученная из x_1 и x_2 в результате склеивания.

$\geq$. Рассмотрим остовные деревья T_1 и T_2 графов G'_1 и G'_2 с $u(T_1) = u(G'_1)$ и $u(T_2) = u(G'_2)$. Склеив в них висячие вершины x_1 и x_2 в одну вершину x, мы получим остовное дерево T графа G' с $u(T) = u(T_1) + u(T_2) - 2$ (все висячие вершины деревьев T_1 и T_2, кроме x_1 и x_2, остались висячими в дереве T). Следовательно, $u(G') \geq u(G'_1) + u(G'_2) - 2$.

$\leq$. Теперь рассмотрим остовное дерево T' графа G' с $u(T') = u(G')$. Вершина x является точкой сочленения графа G' и потому не является висячей вершиной дерева T', значит, $d_{T'}(x) = d_{G'}(x) = 2$. Очевидно, дерево T' склеено по вершинам x_1 и x_2 из остовного дерева T'_1 графа G'_1 (в котором вершина x_1 — висячая) и остовного дерева T'_2 графа G'_2 (в котором вершина x_2 — висячая). Все остальные висячие вершины деревьев T'_1 и T'_2 являются висячими вершинами дерева T', поэтому

$$u(G') = u(T') = u(T'_1) + u(T'_2) - 2 \leq u(G'_1) + u(G'_2) - 2.$$

□

Замечание 6.14. В разделе 6.2, в отличие от остальной части диссертации, под *компонентой связности* графа мы понимаем *максимальный по включению двусвязный подграф*, а не множество его вершин.

Лемма 6.6. *Пусть $a, b \in V(G)$ — смежные вершины, а подграф G' — компонента связности графа $G - a$, содержащая вершину b. Тогда, если b — точка сочленения графа G', то $u(G) \geq u(G') + 1$.*

Доказательство. Пусть T' — остовное дерево графа G' с $u(T') = u(G')$. Построим остовное дерево T графа G, присоединив вершину a к b и далее присоединив к вершине a все отличные от G' компоненты связности графа $G - a$. Вершина b — точка сочленения графа G', поэтому она не является висячей вершиной в дереве T'. Следовательно,

$$u(G) \geq u(T) \geq u(T') + 1 = u(G') + 1.$$

□

Опишем редукционные правила. В каждом следующем пункте мы считаем, что не выполняются условия ни одного из предыдущих.

R1. *В графе G есть вершина a степени 2.*
Если a — точка сочленения, то, стянув инцидентное ей ребро, мы получим меньший граф G' с $c(G') = c(G)$ и $u(G') = u(G)$.

Если же a — не точка сочленения, то инцидентное ей ребро ab — не мост и граф $G' = G - ab$ связен. Очевидно,

$$c_{G'}(a) - c_G(a) = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad c_G(b) - c_{G'}(b) \le \frac{1}{4},$$

поэтому $c(G') \ge c(G)$. Так как любое остовное дерево графа G' является остовным деревом графа G, мы имеем $u(G') \le u(G)$. В обоих случаях утверждение теоремы для графа G следует из утверждения теоремы для меньшего графа G'.

Замечание 6.15. Далее мы будем считать, что в графе G нет вершин степени 2.

Пусть U — множество всех висячих вершин графа G. Мы будем считать, что $U \ne \varnothing$ (случай графа без висячих вершин мы разберём в следующем разделе).

Если какие-то две вершины из U смежны, то в графе есть только эти две вершины, а для графа из двух вершин утверждение теоремы 6.2 очевидно. Далее мы будем считать, что в графе более двух вершин, поэтому, никакие две вершины из U не смежны.

Пусть $W \subset V(G)$ — множество всех вершин, смежных с висячими, а $X \subset V(G)$ — множество всех не вошедших в U и W вершин, смежных с W.

Пусть $H = G - U$. Понятно, что граф H связен.

R2. *Граф H недвусвязен.*

Пусть a — точка сочленения графа H. Тогда a — точка сочленения графа G и существуют такие связные графы G_1 и G_2, что

$$V(G_1) \cup V(G_2) = V(G), \quad V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\} \quad \text{и} \quad v(G_1), v(G_2) > 2.$$

Для $i \in \{1,2\}$ рассмотрим граф G_i', полученный из G_i присоединением новой висячей вершины x_i к вершине a (см. рисунок 6.21). Тогда граф G получается из G_1' и G_2' склейкой вершин x_1 и x_2 в одну вершину x и последующим стягиванием двух инцидентных x мостов (при этом две копии вершины a в графах G_1' и G_2' склеятся в вершину a графа G). Таким образом, выполняются условия леммы 6.5 и мы имеем

$$u(G) = u(G_1') + u(G_2') - 2.$$

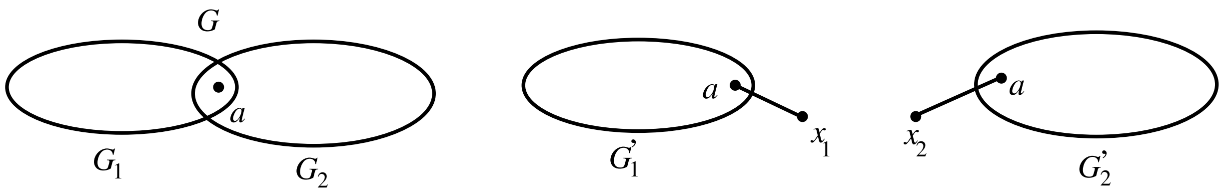


Рис. 6.21: Редукция $R2$

Поскольку $d_G(a) = d_{G_1'}(a) + d_{G_2'}(a) - 2$, то несложно проверить, что $c_G(a) \le c_{G_1'}(a) + c_{G_2'}(a)$. Так как вершины $x_1 \in V(G_1')$ и $x_2 \in V(G_2')$ (которые стоят по $\frac{1}{4}$) не принадлежат $V(G)$, а все отличные от a вершины графа G входят ровно в один из графов G_1' и G_2' и имеют в этом графе такую же степень, как в графе G, мы имеем

$$c(G) \le c(G_1') + c(G_2') - 2 \cdot \frac{1}{4}.$$

Нетрудно понять, что $v(G_1') < v(G)$ и $v(G_2') < v(G)$. Тогда по индукционному предположению

$$u(G_1') \ge c(G_1') + \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad u(G_2') \ge c(G_2') + \frac{3}{2}.$$

Таким образом,

$$u(G) = u(G_1') + u(G_2') - 2 \geq c(G_1') + c(G_2') - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \geq c(G) + \frac{3}{2},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 6.16. В дальнейшем мы будем считать, что в графе H нет точек сочленения. Это означает, что все точки сочленения графа G — это вершины множества W (каждая такая вершина отделяет смежные с ней висячие вершины от остальных вершин графа).

R3. *Существуют такие смежные вершины $x, y \in V(G)$, что $d_G(x) \geq 5$ и $d_G(y) \geq 5$.*
Тогда рассмотрим граф $G' = G - xy$. Из двусвязности графа $H = G - U$ очевидно следует связность графа G', для него утверждение теоремы уже доказано. Очевидно, $d_{G'}(x) \geq 4$ и $d_{G'}(y) \geq 4$, поэтому

$$c_G(x) = c_{G'}(x), \quad c_G(y) = c_{G'}(y) \quad \text{и} \quad c(G') = c(G).$$

Так как остовное дерево графа G' является остовным деревом G, утверждение теоремы доказано и для G.

R4. *Существуют такие смежные вершины $a, b \in V(G)$, что b — точка сочленения в содержащей ее компоненте связности G' графа $G - a$ и $c(G') \geq c(G) - 1$.*
Так как вершина $b \in \mathrm{N}_{G'}(a)$ является точкой сочленения графа G', по лемме 6.6 мы имеем $u(G) \geq u(G') + 1$. Для меньшего графа G' утверждение уже доказано, поэтому

$$u(G) \geq u(G') + 1 \geq c(G') + 1 + \frac{3}{2} \geq c(G) + \frac{3}{2},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 6.7. *Если граф удовлетворяет одному из следующих условий, то можно провести редукцию $R4$.*

1° *Существуют такие смежные вершины $a, b \in V(G)$, что b — точка сочленения в содержащей ее компоненте связности G' графа $G - a$ и $d_G(a) \le 3$.*

2° *Существует смежная с $w \in W$ вершина x такая, что $d_G(x) = 3$.*

3° *Существуют две вершины $x, y \in U$, смежные с одной вершиной $w \in W$.*

4° *Существует смежная с W вершина x, такая, что $d_G(x) \le 6$ и x смежна не более, чем с одной вершиной из $S(G)$.*

5° *Существует смежная с W вершина x, такая, что $d_G(x) = 4$ и x смежна не более, чем с двумя вершинами из $S(G)$.*

Доказательство. 1° Из двусвязности H следует, что в G' входят все вершины графа $G - a$, кроме смежных с a висячих вершин. От уменьшения степени на 1 цена вершины уменьшается не более, чем на $\frac{1}{4}$. Смежные с x висячие вершины (если такие есть) также имеют цену $\frac{1}{4}$. Поэтому

$$c(G) - c(G') \le c_G(a) + \sum_{v \in \mathrm{N}_G(a)} (c_G(v) - c_{G'}(v)) \le \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

и условие $R4$ для вершин a и b выполнено.

2° и 3°. В обоих случаях рассмотрим компоненту связности G' графа $G - x$, содержащую w. Очевидно, w — точка сочленения графа G', так как отделяет смежную с ней висячую вершину (отличную от x) от остальных вершин графа G. Следовательно, граф удовлетворяет условию 1° для $a = x$ и $b = w$.

4° и 5°. Пусть $w \in W$ — вершина, смежная с x. В обоих случаях рассмотрим компоненту связности G' графа $G - x$, содержащую w. Как и выше, нетрудно понять, что G' содержит все вершины графа $G - x$, кроме смежных с x висячих вершин, а w — точка сочленения графа G'.

Осталось показать, что $c(G) - c(G') \le 1$. От уменьшения степени на 1 цена вершины из $S(G)$ уменьшается на $\frac{1}{4}$, а цена любой другой вершины

— не более, чем на $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Напишем оценку для случая 4°:

$$c(G) - c(G') \leq c_G(x) + \sum_{y \in \mathrm{N}_G(x)} (c_G(y) - c_{G'}(y)) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{12} = 1.$$

Аналогичная оценка верна и в случае 5°:

$$c(G) - c(G') \leq c_G(x) + \sum_{y \in \mathrm{N}_G(x)} (c_G(y) - c_{G'}(y)) \leq \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{12} = 1.$$

Теперь мы видим, что условия редукции $R4$ для $a = x$ и $b = w$ выполнены. $\square$

Замечание 6.17. В дальнейшем мы считаем, что граф не удовлетворяет ни одному из условий $1^\circ - 5^\circ$ леммы 6.7.

Лемма 6.8. *Если нельзя применить правила $R1 - R4$, то никакие две вершины из W не смежны в графе G.*

Доказательство. Предположим противное, пусть существуют две смежные вершины $w, w' \in W$, $d_G(w) \leq d_G(w')$. Тогда $d_G(w) \leq 4$ (иначе можно было бы выполнить $R3$). Более того, $d_G(w) = 4$ (иначе w и w' удовлетворяют условию 2° леммы 6.7). Все смежные с w вершины, кроме одной висячей, имеют степень не менее 4, иначе граф удовлетворяет одному из условий 2° или 3° леммы 6.7. Но в таком случае выполняется условие 4° леммы 6.7 для $x = w$, противоречие. $\square$

Замечание 6.18. Таким образом, каждая вершина $w \in W$ смежна с одной вершиной из U и $d_G(w) - 1$ вершиной множества X. В частности, отсюда следует, что $X \neq \varnothing$. Так как не выполняется условие 2° леммы 6.7, все вершины множества X имеют в графе G степень хотя бы 4.

R5. *Существует вершина $x \in X$, смежная с вершинами w, w', причём $w \in W$, $d_G(w) = d_G(w') = 3$ и в $\mathrm{N}_G(w')$ не более одной вершины из $S(G)$.*

Замечание 6.19. Так как $X \cap S(G) = \varnothing$, в случае $w' \in W$ условие $R5$ выполнено.

Пусть $\mathrm{N}_G(w) = \{x, y, u\}$, где $u \in U$. Отметим, что по замечанию 6.18 мы имеем $d_G(y) \geq 4$. Легко понять, что граф $G' = G \cdot wx$ связен. Пусть $x' = x \cdot w \in V(G')$ (см. рисунок 6.22).

Замечание 6.20. Любая точка сочленения $v \neq x'$ графа G' является точкой сочленения графа G. Более того, пусть K — компонента связности графа $G' - v$. Если K не содержит x', то K является компонентой связности графа $G - v$. Если же K содержит x', то $K \cup \{x, w\} \setminus \{x'\}$ — компонента связности графа $G - v$.

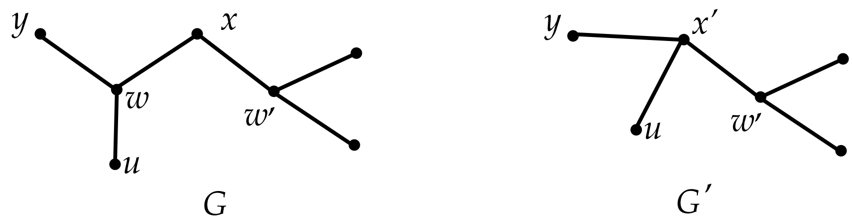


Рис. 6.22: Графы G и G'.

Если $w' \in W$, то граф $G' - w'$ имеет две компоненты связности, причем одна из них состоит из висячей вершины, смежной с w'. Пусть G^* — другая компонента связности графа $G' - w'$, которая содержит все остальные вершины. Если $w' \notin W$, то граф $G' - w'$ связен. Тогда положим $G^* = G' - w'$. Очевидно, в обоих случаях $c(G^*) = c(G' - w')$. Так как связный граф G^* меньше G, для этого графа выполнено утверждение теоремы.

Вершина x' — точка сочленения графа G^* (с ней смежна висячая вершина u), поэтому в силу леммы 6.6

$$u(G) \geq u(G') \geq u(G^*) + 1 \geq c(G^*) + 1 + \frac{3}{2}.$$

Осталось доказать, что

$$c(G^*) = c(G' - w') \geq c(G) - 1.$$

Отметим, что $d_{G'}(x') \ge 4$, поэтому, $c_{G'}(x') = \frac{1}{3} = c_G(x)$. При стягивании ребра xw степень отличной от x и w вершины могла уменьшиться только на 1 (в случае, когда эта вершина смежна в графе G и с x, и с w). Такой вершиной может быть только y, следовательно, $c_{G'}(y) \ge c_G(y) - \frac{1}{12}$ (так как $y \in X \subset T(G)$ по замечанию 6.18). Степени отличных от x, y, w вершин в графах G и G' одинаковы. Таким образом,

$$c(G') \ge c(G) - \frac{1}{3}.$$

Поскольку $d_{G'}(x') \ge 4$, то $S(G) \supset S(G')$. Остается заметить, что в $\mathrm{N}_G(w')$ не более одной вершины из $S(G)$, поэтому в $\mathrm{N}_{G'}(w')$ не более одной вершины из $S(G')$. Следовательно,

$$c(G' - w') = c(G') - c_{G'}(w') - \sum_{v \in \mathrm{N}_{G'}(w')} (c_{G'}(v) - c_{G'-w'}(v)) \ge$$
$$c(G') - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{12}\right) = c(G') - \frac{2}{3} \ge c(G) - 1,$$

что для нас достаточно.

R6. *Существует вершина $x \in X$, $d_G(x) \le 6$.*

Мы выберем вершину $x \in X$ наименьшей степени. Так как вершина x не должна удовлетворять условию 4° леммы 6.7, то она смежна хотя бы с двумя вершинами из $S(G)$. Так как $x \notin W$, обе эти вершины имеют степень 3. Поскольку нельзя выполнить $R5$, то хотя бы одна из этих двух вершин не принадлежит W (см. замечание 6.19) и имеет двух соседей из $S(G)$. Обозначим эту вершину через y, пусть $\mathrm{N}_G(y) = \{x, z, z'\}$. Тогда, так как $y \notin W$, мы имеем $d_G(z) = d_G(z') = 3$.

Пусть вершина $w \in W$ смежна с x. Рассмотрим два случая.

R6.1. $d_G(x) = 4$, $d_G(w) \ge 4$.

Пусть $N_G(x) = \{w, y, y_1, y_2\}$. Тогда $d_G(y) = d_G(y_1) = d_G(y_2) = 3$, иначе выполняется условие 5° леммы 6.7.

Наша первая цель — построить в графе G простой путь P от вершины y до некоторой вершины q (где $q \notin S(G) \cup \mathrm{N}_G(x)$ или $q \in \{y_1, y_2\}$), все внутренние вершины которого лежат в $S(G)$ и не лежат в $\mathrm{N}_G(x)$, а граф $G - E(P) - x$ связен.

Рассмотрим $z \in \mathrm{N}_G(y)$, $z \neq x$. По замечанию 6.18 из $d_G(y) = 3$ следует, что $y \notin X$, то есть, y не может быть смежна с $w \in W$. Значит, $z \neq w$. Если ребро yz — мост в $G - x$, то x — точка сочленения в графе $G - y$ и выполнено условие 1° леммы 6.7 для вершин y и x, противоречие. Значит, ребро yz — не мост в $G - x$.

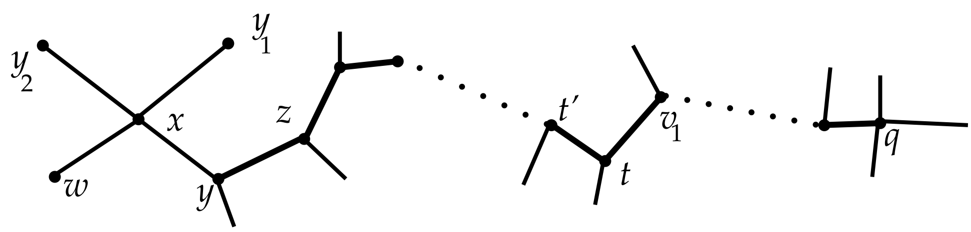


Рис. 6.23: Редукция $R6.1$, путь P.

В начале построения мы рассмотрим путь P', содержащий единственное ребро yz. Отметим, что граф $G - yz - x$ связен и $d_G(z) \geq 3$.

Пусть в некоторый момент построен путь P' от y до t, причём граф $G - E(P') - x$ связен, $d_G(t) \geq 3$ и $t \neq w$ (в начале построения $t = z$ и все эти условия выполнены). Понятно, что $t \in S(G)$ (то есть, $d_G(t) = 3$) и $t \notin \{y_1, y_2\}$, иначе путь $P = P'$ нам подходит.

Пусть $\mathrm{N}_G(t) = \{t', v_1, v_2\}$, где t' — предыдущая вершина пути P'. Тогда $d_G(t') = 3$. Попробуем продлить путь P' на одно ребро.

Не умаляя общности можно считать, что $v_1 \neq w$. Очевидно, $v_1 \neq x$. Пусть tv_1 — мост графа $G - E(P') - x$. Тогда t — точка сочленения графа $G - E(P') - x - t'$ (который, очевидно, связен, так как получен из связного графа $G - E(P') - x$ удалением висячей вершины t'). Тогда

$$u(G) \geq u(G - E(P')) \geq u(G - E(P') - x - t') + 2$$

(в остовное дерево графа $G - E(P') - x - t'$ добавим две новые висячие вершины: x присоединим к точке сочленения w, а t' — к точке сочленения t).

Оценим $c(G)-c(G-E(P')-x-t')$. Удалены вершины x и t' суммарной стоимостью $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Так как цена вершин степени 1 и 3 одинакова, то цена отличных от t' и t вершин пути P' не изменилась. Тогда в результате удаления $E(P')$, x и t' из графа G' цена могла измениться лишь у трех вершин из $\mathrm{N}_G(x)\setminus\{y\}$ и двух из трёх вершин множества $\mathrm{N}_G(t')$ (кроме предшествующей t' вершины пути P'), что дает нам максимум $\frac{5}{4}$. Значит,

$$c(G-E(P')-x-t')\ge c(G)-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}>c(G)-2$$

и по индукционному предположению мы имеем

$$u(G)\ge u(G-E(P')-x-t')+2\ge c(G-E(P')-x-t')+2+\frac{3}{2}>c(G)+\frac{3}{2}.$$

В этом случае теорема доказана.

Остается случай, когда tv_1 — не мост графа $G-E(P')-x$. Тогда $d_{G-E(P')}(v_1)\ge 2$, следовательно, $v_1\notin V(P')$ и $d_G(v_1)\ge 3$. Мы продлим путь P' на ребро tv_1 и продолжим рассуждения с новым путём и его концом v_1. Рано или поздно процесс в виду конечности графа закончится и мы получим искомый путь P.

Теперь рассмотрим граф $G-E(P)-x$. Аналогично доказанному выше,

$$u(G)\ge u(G-E(P)-x)+1$$

и нам остается лишь оценить $c(G)-c(G-E(P)-x)$. Мы удалили вершину x ценой $\frac{1}{3}$. При $q\notin\{y_1,y_2\}$ мы уменьшили цену трех отличных от y вершин из $\mathrm{N}_G(x)$ (максимум на $2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$, так как $w\notin S(G)$) и вершины q (на $\frac{1}{12}$). При $q\in\{y_1,y_2\}$ мы уменьшили цену только двух отличных от y и q вершин из $\mathrm{N}_G(x)$, максимум на $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$. В обоих случаях получаем, что

$$c(G)-c(G-E(P)-x)\le 1\quad\text{и}$$
$$u(G)\ge u(G-E(P)-x)+1\ge c(G-E(P)-x)+1+\frac{3}{2}\ge c(G)+\frac{3}{2}.$$

R6.2. *Выполнено одно из двух условий:*

- $d_G(x) = 4$ *и* $d_G(w) = 3$;
- $d_G(x) > 4$.

Как и в пункте $R5$, мы рассмотрим граф $G' = G \cdot xw$ и вершину

$$x' = x \cdot w \in V(G')$$

(см. рисунок 6.22). Понятно, что x' — точка сочленения графа G', она отделяет от остальных вершин висячую вершину. Легко видеть, что

$$d_{G'}(x') \geq d_G(x) \geq 4.$$

(Вершина x' смежна в графе G' со всеми вершинами из $\mathrm{N}_G(x)$, кроме w и, кроме того, смежна с висячей вершиной из $\mathrm{N}_G(w)$.)

Замечание 6.21. 1) При стягивании ребра xw уменьшаются, причем ровно на 1, лишь степени вершин, входящих в треугольник с w и x, а такие вершины принадлежат X (в силу леммы 6.8) и имеют степень не менее 4 (иначе выполняется условие 2° леммы 6.7).

2) Поэтому, из $d_G(a) = 3$ и $a \neq w$ следует, что $d_{G'}(a) = 3$.

Если $d_G(w) = 3$, то $c(G') \geq c(G) - \frac{1}{3}$, как доказано в пункте $R5$.

Пусть $d_G(x) > 4$, тогда степень каждой вершины из X не менее 5. По замечанию 6.21 при стягивании ребра xw могут уменьшиться лишь степени вершин из множества X, причем ровно на 1. В нашем случае степень таких вершин в графе G не менее 5, поэтому цена любой такой вершины в G и G' одна и та же. Таким образом, в этом случае

$$c(G) - c(G') = c_G(w) \leq \frac{1}{3}.$$

Напомним, что y — такая смежная с x вершина графа G, что

$$y \notin W, \quad \mathrm{N}_G(y) = \{x, z, z'\} \quad \text{и} \quad d_G(z) = d_G(z') = 3$$

(см. начало пункта $R6$). Отметим, что $\mathrm{N}_{G'}(y) = \{x', z, z'\}$.

Мы будем строить в графе G' простой путь P от вершины z до некоторой вершины q (где $q \notin S(G') \cup \mathrm{N}_G(y)$ или $q = z'$), все внутренние вершины которого лежат в $S(G')$ и не лежат в $\mathrm{N}_{G'}(x')$ и граф $G' - E(P) - y$ связен.

Пусть $v \in \mathrm{N}_{G'}(z)$, $v \notin \{y, x'\}$. Если ребро zv — мост в $G' - y$, то z — точка сочленения в $G' - y$. По замечанию 6.20, тогда z — точка сочленения в $G - y$, то есть, вершины y и z удовлетворяют условию 1° леммы 6.7, противоречие. Значит, ребро zv — не мост в $G' - y$.

В начале построения мы рассмотрим путь P', содержащий единственное ребро zv. Отметим, что граф $G' - E(P') - y$ связен и $d_{G'}(v) \geq 3$.

Пусть в некоторый момент построен простой путь P' от z до t, причём граф $G' - E(P') - y$ связен, $t \neq x'$ и $d_{G'}(t) \geq 3$ (в начале построения $t = v$ и все эти условия выполнены). Понятно, что $t \neq z'$ и $t \in S(G')$, иначе путь $P = P'$ нам подходит. Следовательно, $d_{G'}(t) = 3$.

Попробуем продлить путь P' на одно ребро. Пусть $\mathrm{N}_{G'}(t) = \{t', v_1, v_2\}$, где t' — предшествующая t вершина пути P' и $v_1 \neq x'$. Тогда $d_{G'}(t') = 3$.

Пусть tv_1 — мост графа $G' - E(P') - y$. Тогда t — точка сочленения связного графа $G' - E(P') - y - t'$ (этот граф связен, так как получен из связного графа $G' - E(P') - y$ удалением висячей вершины t'). Аналогично пункту $R6.1$, мы получим, что

$$u(G) \geq u(G') \geq u(G' - E(P')) \geq u(G' - E(P') - y - t') + 2.$$

Оценим $c(G) - c(G' - E(P') - y - t')$. Как мы знаем, $c(G) - c(G') \leq \frac{1}{3}$. Из графа G' удалены вершины y и t' суммарной стоимостью $\frac{1}{2}$. При удалении из G' вершин y и t' цена могла измениться у двух соседей y и у двух соседей t' (степени соседей y и t', лежащих между ними на пути P', изменились с 3 на 1, что не меняет цену вершины). Это дает нам не более

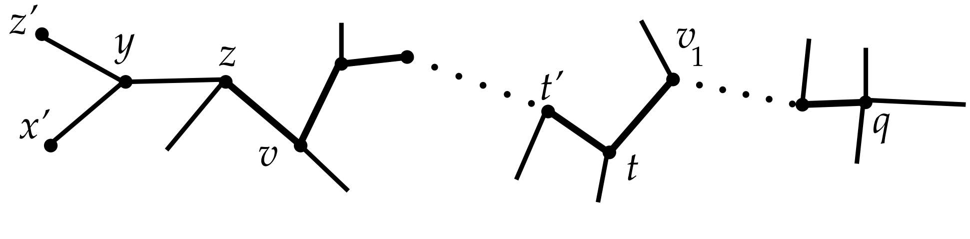


Рис. 6.24: Редукция $R6.2$: граф G' и путь P.

чем $4 \cdot \frac{1}{4}$. Значит,

$$c(G' - E(P') - y - t') \geq c(G') - \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4} \geq c(G) - \frac{11}{6}$$

и по индукционному предположению имеем

$$u(G) \geq u(G' - E(P') - y - t') + 2 \geq c(G' - E(P') - y - t') + 2 + \frac{3}{2} > c(G) + \frac{3}{2}.$$

В этом случае теорема доказана.

Остается случай, когда tv_1 — не мост графа $G' - E(P') - y$. Тогда $d_{G'-E(P')}(v_1) \geq 2$, поэтому $v_1 \notin V(P')$ и $d_{G'}(v_1) \geq 3$. Мы продлим путь P' на ребро tv_1 и продолжим рассуждения с новым путём и его концом v_1. Рано или поздно процесс в виду конечности графа закончится и мы получим искомый путь P.

Теперь рассмотрим граф $G' - E(P) - y$. Аналогично доказанному выше, $u(G) \geq u(G') \geq u(G' - E(P) - y) + 1$ и нам остается доказать, что

$$c(G' - E(P) - y) \geq c(G') - \frac{2}{3} \geq c(G) - 1.$$

На этот раз мы удалили из G' вершину y ценой $\frac{1}{4}$. При $q \neq z'$ мы уменьшили цену двух отличных от z вершин из $\mathrm{N}_{G'}(y)$ (максимум на $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$, так как $x' \notin S(G')$) и вершины q (на $\frac{1}{12}$). При $q = z'$ мы уменьшили только цену вершины x', причем не более, чем на $\frac{1}{12}$. В обоих случаях получаем $c(G') - c(G' - E(P) - x) \leq \frac{2}{3}$, что и требовалось доказать.

Лемма 6.9. *Если в связном графе G более двух вершин, есть висячие вершины и невозможно выполнить ни один из пунктов $R1 - R6$, то граф удовлетворяет следующим условиям.*

1° *Вершины множества X попарно несмежны и имеют степень хотя бы 7.*

2° *Вершины множества W попарно несмежны и имеют степень не более 4.*

3° *Каждая висячая вершина графа G смежна с вершиной множества W. Каждая вершина множества W смежна ровно с одной висячей вершиной графа G.*

Доказательство. Так как в графе хотя бы две вершины, то никакие две его висячие вершины не смежны. Значит, каждая висячая вершина смежна с вершиной из W.

Так как невозможно выполнить $R6$, все вершины множества X имеют степень хотя бы 7 и, следовательно, попарно несмежны. По лемме 6.8 вершины множества W попарно несмежны и, как мы знаем, они имеют степень хотя бы 3. Значит, каждая вершина множества W смежна с множеством X. Так как степени всех вершин из X хотя бы 7 и невозможно выполнить $R3$, то степени вершин множества W не превосходят 4. $\square$

6.2.2 Метод мёртвых вершин

Пусть невозможно применить ни одно из правил редукции $R1 - R6$. В этом случае мы построим искомое остовное дерево в графе G с помощью *метода мёртвых вершин.*

Наша модификация будет отличаться от классического метода: мы начнем построение с леса (не обязательно дерева). Будем последовательно, по шагам добавлять к нему вершины и уменьшать количество компонент связности.

Для произвольного графа H мы будем обозначать через $k(H)$ количество компонент связности этого графа.

Пусть после нескольких шагов построения мы получили лес F (где $V(F) \subset V(G)$, $E(F) \subset E(G)$). Все рёбра леса F останутся в нашем лесе на последующих этапах построения и войдут в итоговое остовное дерево.

Определение 6.6. Висячую вершину x леса F назовем *мертвой*, если все вершины графа G, смежные с x, входят в лес F, причём в ту же компоненту связности, что и x.

Для леса F через $b(F)$ обозначим количество его мёртвых вершин.

Замечание 6.22. Нетрудно заметить, что мертвые вершины останутся мертвыми висячими вершинами на всех последующих этапах построения.

По окончании построения, когда будет построено остовное дерево, все его висячие вершины станут мёртвыми.

Для леса F мы определим

$$\alpha(F) = \frac{5}{6}u(F) + \frac{1}{6}b(F) - c_G(F) - 2(k(F) - 1). \quad (6.4)$$

Введем обозначения $T = T(G)$ и $S = S(G)$. В нашем случае

$$V(G) = S \cup T.$$

Начало построения

Отдельно опишем начало построения. Будем считать, что в графе G более двух вершин. На этом этапе мы построим в графе G лес F^* с достаточно большим $\alpha(F^*)$, содержащий все висячие вершины графа G. Рассмотрим два случая.

B1. *В графе G нет висячих вершин.*
В этом случае мы будем считать, что в графе есть вершина a с $d_G(a) \geq 4$, иначе наша теорема следует из результата работы [19]. Мы начнём построение с базового дерева F^*, в котором a соединена с 4 вершинами из её окрестности. Тогда

$$\alpha(F^*) \geq \frac{5}{6} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}.$$

B2. *В графе G есть висячие вершины, то есть $U \neq \varnothing$.*
В этом случае выполняется утверждение леммы 6.9.

Пусть $Y \subset V(G)$ — множество всех вершин, смежных с X и не вошедших в W. Рассмотрим граф G^* на вершинах $W \cup X \cup U \cup Y$, все рёбра которого — это рёбра графа G, инцидентные W или X. Из леммы 6.9 понятно, что G^* — двудольный граф с долями $W \cup Y$ и $X \cup U$.

Пусть G' — компонента связности графа G^*. Мы построим в G' остовное дерево F' с $\alpha(F') \geq 2$. Для начала рассмотрим подграф $G'' = G' - Y$, пусть в этом подграфе k компонент связности. Различные компоненты связности графа G'' соединяются друг с другом через вершины множества Y (см. рисунок 6.25).

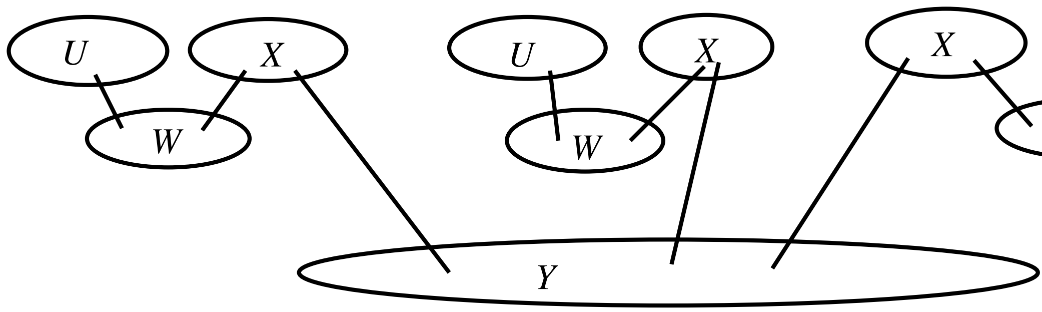


Рис. 6.25: База $B2$, граф G'.

Пусть

$$W' = W \cap V(G'), \quad X' = X \cap V(G'), \quad Y' = Y \cap V(G'), \quad U' = U \cap V(G').$$

Каждая вершина множества X' смежна хотя бы с 7 вершинами из $W' \cup Y'$. Каждая вершина множества W' смежна ровно с одной вершиной из U и, следовательно, с 2 или 3 вершинами из X'. Обозначим через W_2' и W_3' множества вершин из W', смежных с 2 и 3 вершинами из X', соответственно. Понятно, что $W_2' \subset S$ и $W_3' \subset T$.

Каждая вершина множества Y' смежна с вершинами множества X', имеющими степень хотя бы 7. Так как нельзя выполнить $R3$, вершины из Y' имеют степень не более 4, то есть, каждая из них смежна не более, чем с 4 вершинами из X'. Обозначим через Y_4' множество всех вершин из Y', смежных с 4 вершинами из X', пусть $Y_3' = Y' \setminus Y_4'$. Введём обозначения

$$x = |X'|, \quad w_2 = |W_2'|, \quad w_3 = |W_3'|, \quad y_3 = |Y_3'|, \quad y_4 = |Y_4'|.$$

Тогда

$$|U'| = w_2 + w_3, \quad x \le \frac{2w_2 + 3w_3 + 3y_3 + 4y_4}{7}. \tag{6.5}$$

Выделим в графе G' остовный лес F', подвесив к $W' \cup X'$ вершины из $Y' \cup U'$ (эти вершины будут висячими, их количество равно $w_2+w_3+y_3+y_4$).

Нетрудно понять, что в таком лесу k компонент связности (столько же, сколько в графе $G'' = G' - Y$). Построим остовное дерево T' графа G', связав эти k компонент связности в одну, для чего проведём $k-1$ новое ребро между Y' и X'. В результате количество висячих вершин из $Y' \cup U'$ уменьшится не более чем на $k-1$ и получится

$$u(T') \geq w_2 + w_3 + y_3 + y_4 - k + 1. \tag{6.6}$$

Оценим стоимость дерева T':

$$c_G(T') \leq \frac{1}{4} \cdot (2w_2 + w_3) + \frac{1}{3} \cdot (w_3 + x + y_3 + y_4). \tag{6.7}$$

Все вершины из U', очевидно, являются мёртвыми вершинами дерева T'. Поскольку каждая вершина из Y имеет степень не более 4, то те вершины из Y'_4, которые являются висячими вершинами в дереве T' — мёртвые вершины этого дерева. Таким образом, меньше всего мёртвых вершин у дерева T' в случае, когда все висячие вершины леса F', пропавшие при склейке компонент связности, лежали в Y'_4 и мы имеем

$$b(T') \geq |U'| + y_4 - k + 1 = w_2 + w_3 + y_4 - k + 1. \tag{6.8}$$

Учитывая полученные выше неравенства (6.6), (6.7) и (6.8), получаем

$$\begin{aligned}\alpha(T') = \frac{5}{6}u(T') + \frac{1}{6}b(T') - c_G(T') \geq \\ \frac{5}{6}(w_2 + w_3 + y_3 + y_4 - k + 1) + \frac{1}{6}(w_2 + w_3 + y_4 - k + 1) - c_G(T') \geq \\ w_2 + w_3 + y_4 + \frac{5}{6}y_3 - c_G(T') - k + 1 \geq \\ w_2 \cdot \frac{1}{2} + w_3 \cdot \frac{5}{12} + y_3 \cdot \frac{1}{2} + y_4 \cdot \frac{2}{3} - x \cdot \frac{1}{3} - k + 1.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Далее нам нужно оценить k. Рассмотрим компоненту связности G_0 графа G''. В G_0 есть вершина $v \in W'_2 \cup W'_3$. Если $v \in W'_2$, то в G_0 хотя бы две вершины из X', а если $v \in W'_3$ — то хотя бы три вершины из X'. Таким образом,

$$2k \leq x. \tag{6.10}$$

Пусть k_2 — количество компонент связности графа G'', содержащих по две вершины из X'. В каждой такой компоненте связности обязательно есть вершина из W_2', поэтому $k_2 \le w_2$. Тогда

$$x \ge 3(k-k_2)+2k_2 = 3k-k_2 \ge 3k-w_2,$$

что мы перепишем в виде

$$3k \le x+w_2. \tag{6.11}$$

Сложив умноженное на $\frac{3}{2}$ неравенство (6.10) и неравенство (6.11) и сократив на 6, получим

$$k \le \frac{5}{12}x+\frac{1}{6}w_2. \tag{6.12}$$

Отметим, что $X' \ne \varnothing$, а каждая вершина из X' смежна хотя бы с 7 вершинами из $W' \cup Y'$. Поэтому,

$$w_2+w_3+y_3+y_4 \ge 7. \tag{6.13}$$

Теперь рассмотрим несколько случаев.

B2.1. $W_3' = \varnothing$.

Вернёмся к неравенству (6.9). С учетом $w_3 = 0$ и неравенства (6.10) получаем

$$\alpha(T') \ge w_2\cdot\frac{1}{2}+y_3\cdot\frac{1}{2}+y_4\cdot\frac{2}{3}-x\cdot\frac{1}{3}-k+1 \ge \\ w_2\cdot\frac{1}{2}+y_3\cdot\frac{1}{2}+y_4\cdot\frac{2}{3}-x\cdot\frac{5}{6}+1. \tag{6.14}$$

Подставив в (6.14) оценку на x из (6.5), учитывая (6.13) и $w_3 = 0$, получим

$$\alpha(T') \ge w_2\cdot\frac{11}{42}+y_3\cdot\frac{1}{7}+y_4\cdot\frac{4}{21}+1 \ge (w_2+y_3+y_4)\cdot\frac{1}{7}+1 \ge 2,$$

что и требовалось доказать.

B2.2. $W_2' = \varnothing$, $k=1$.

Тогда из неравенства (6.9), $w_2 = 0$ и $k=1$ получаем

$$\alpha(T') \ge w_3\cdot\frac{5}{12}+y_3\cdot\frac{1}{2}+y_4\cdot\frac{2}{3}-x\cdot\frac{1}{3}. \tag{6.15}$$

Подставив в (6.15) оценку на x из (6.5), получим

$$\alpha(T') \geq w_3 \cdot \frac{23}{84} + y_3 \cdot \frac{5}{14} + y_4 \cdot \frac{10}{21} \geq w_3 \cdot \frac{23}{84} + (y_3 + y_4) \cdot \frac{5}{14}. \qquad (6.16)$$

Если $y_3 = y_4 = 0$, то все висячие вершины дерева T' — мёртвые, то есть, $G = G'$. В этом случае из (6.13) имеем $w_3 \geq 7$ и

$$u(G) \geq u(T') \geq c(G) + \frac{23}{12},$$

теорема полностью доказана. Пусть $y_3 + y_4 \geq 1$. Тогда из (6.16) и (6.13) мы имеем

$$\alpha(T') \geq 6 \cdot \frac{23}{84} + \frac{5}{14} = 2,$$

что нас устраивает.

B2.3. $k \geq 2$.

В оставшемся случае можно считать, что $w_3 \neq 0$, иначе можно воспользоваться пунктом $B2.1$. В графе G'' хотя бы две компоненты связности. Среди них есть компонента, которая содержит вершины из W_3', в ней хотя бы 3 вершины из X'. В другой компоненте связности не менее чем 2 вершины из X'. Таким образом, $x \geq 5$. Воспользуемся неравенством (6.9), оценкой на k из (6.12) и оценкой на x из (6.5):

$$\begin{aligned}\alpha(T') \geq w_2 \cdot \frac{1}{2} + w_3 \cdot \frac{5}{12} + y_3 \cdot \frac{1}{2} + y_4 \cdot \frac{2}{3} - x \cdot \frac{1}{3} - k + 1 \geq \\ w_2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + w_3 \cdot \frac{5}{12} + y_3 \cdot \frac{1}{2} + y_4 \cdot \frac{2}{3} - x \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{12}\right) + 1 \geq \\ w_2 \cdot \frac{1}{3} + w_3 \cdot \frac{5}{12} + y_3 \cdot \frac{1}{2} + y_4 \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\left(\frac{2w_2 + 3w_3 + 3y_3 + 4y_4}{7}\right) + 1 \geq \\ w_2 \cdot \frac{5}{42} + w_3 \cdot \frac{2}{21} + y_3 \cdot \frac{5}{28} + y_4 \cdot \frac{5}{21} + 1 \geq \\ \frac{2}{9}\left(\frac{2w_2 + 3w_3 + 3y_3 + 4y_4}{7}\right) + 1 \geq x \cdot \frac{2}{9} + 1 > 2,\end{aligned}$$

что нам и нужно.

Лемма 6.10. *Если к связному графу G невозможно применить ни одно из редукционных правил, то существует лес F^* — подграф графа G — с $\alpha(F^*) \geq \frac{3}{2}$.*

Доказательство. Если $v(G) = 2$, то G — дерево с двумя вершинами, следовательно,

$$u(G) = 2, \quad c(G) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \text{и} \quad \alpha(G) = \frac{3}{2}.$$

Далее пусть $v(G) > 2$. В этом случае мы применим описанное выше построение базового леса. Если граф G не имеет висячих вершин, то по пункту $B1$ можно построить дерево F^* с $\alpha(F^*) \geq \frac{5}{3}$. В случае, когда граф G имеет висячие вершины, выделим в графе G^* остовный лес F^*, действуя описанным в пункте $B2$ способом. Тогда каждая компонента связности F' леса F^* имеет $\alpha(F') \geq 2$. Следовательно, $\alpha(F^*) \geq 2$. Отметим, что в этот лес вошли все висячие вершины графа G. □

Шаг построения

Опишем шаг алгоритма построения остовного дерева (назовём этот шаг A). Пусть перед шагом A мы имеем лес F — подграф графа G. (Перед первым шагом мы имеем лес $F = F^*$, построенный выше.)

Через Δu и Δb мы будем обозначать прирост количества висячих вершин и количества мертвых висячих вершин в лесе F на шаге A, через Δt и Δs — количество добавленных на этом шаге в лес F вершин из T и из S, соответственно.

Пусть F_1 — лес, полученный после шага A. Введем обозначение

$$\Delta k = k(F) - k(F_1).$$

Назовём *доходом* шага A величину

$$p(A) = \frac{5}{6}\Delta u + \frac{1}{6}\Delta b + 2\Delta k - \frac{1}{3}\Delta t - \frac{1}{4}\Delta s.$$

Мы будем выполнять только шаги, для которых доход неотрицателен. Из формулы (6.4) и определения цены вершины нетрудно понять, что

$$\alpha(F_1) = \alpha(F) + p(A).$$

Опишем все возможные виды шагов. Для удобства мы в описании шага будем обозначать множество вершин, не вошедших в лес F, через Z. Вершины множества Z, смежные хотя бы с одной из вершин $V(F)$, назовем *вершинами уровня* 1. Для каждой вершины $x \in Z$ через $P(x)$ обозначим множество всех вершин из $V(F)$, смежных с x.

Замечание 6.23. 1) Отметим, что все не вошедшие в F вершины принадлежат $S \cup T$ и имеют степень не менее 3. Действительно, все висячие вершины графа G вошли в лес F^*, а вершин степени 2 нет, иначе можно было бы выполнить редукцию $R1$.

2) При оценке дохода шага мы будем считать, что все добавленные вершины, про которые неизвестна их принадлежность множеству S, принадлежат множеству T. Если какая-то добавленная вершина посчитана как вершина из T, но на самом деле принадлежит S, то доход шага увеличится на $\frac{1}{12}$.

Далее мы представим несколько вариантов выполнения шага алгоритма. Мы будем пытаться выполнить очередной вариант шага алгоритма, только в случае, когда невозможно выполнить ни один из предыдущих. Дополнительно об этом упоминать в описании шагов мы не будем.

S1. *Существует ребро xy, концы которого — вершины разных компонент связности леса F.*
Добавим в F ребро xy, тем самым уменьшив количество компонент связности на 1. Таким образом, $\Delta k \geq 1$ и $\Delta u \geq -2$. Получаем

$$p(S1) \geq -2 \cdot \frac{5}{6} + 2 = \frac{1}{3}.$$

S2. *В F есть невисячая вершина x, смежная с вершиной $y \in Z$.*
Присоединим y к x. В этом случае $\Delta u = 1$, $c_G(y) \leq \frac{1}{3}$ и

$$p(S2) \geq \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Замечание 6.24. Далее мы будем считать, что невисячие вершины F несмежны с вершинами множества Z и никакое ребро не соединяет разные компоненты связности леса F.

S3. *Существует вершина $x \in V(F)$, смежная с двумя вершинами из Z.*
Добавим эти две вершины в дерево, присоединив их к вершине x. Тогда $\Delta u = 1$, стоимость двух добавленных вершин не более $\frac{2}{3}$ и

$$p(S3) \geq \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

S4. *Существует вершина $x \in Z$, смежная с вершинами хотя бы двух компонент связности леса F.*
Тогда соединим эти две компоненты через x, проведя от каждой из них по одному ребру к x. Получим $\Delta u \geq -2$, $\Delta k = 1$ и, поскольку $c_G(x) \leq \frac{1}{3}$, то

$$p(S4) \geq -2 \cdot \frac{5}{6} + 2 - \frac{1}{3} = 0.$$

S5. *Существует вершина $x \in Z$, смежная с $m \geq 3$ вершинами из $V(F)$.*
Так как невозможно выполнить $S4$, вершина x смежна с тремя вершинами одной компоненты связности леса F. Присоединим x к одной из этих вершин, две другие станут мёртвыми. Тогда $\Delta u = \Delta k = 0$, $\Delta b \geq 2$ и, так как $c_G(x) \leq \frac{1}{3}$, мы получаем

$$p(S5) \geq 2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = 0.$$

Замечание 6.25. Далее мы считаем, что каждая висячая вершина леса F смежна ровно с одной вершиной из Z и не смежна с другими компонентами связности леса F. Каждая вершина уровня 1 смежна не более чем с двумя вершинами из $V(F)$ и, если таких вершин две, то они принадлежат одной компоненте связности леса F.

S6. *Существует вершина $x \in T$ уровня 1.*

По замечанию 6.25 вершина x смежна не более, чем с двумя вершинами из $V(F)$. Рассмотрим два случая.

S6.1. *Вершина x смежна с одной вершиной из $V(F)$.*

Тогда x смежна с тремя вершинами, не вошедшими в F. Добавим x и эти три вершины в F. Получим $\Delta u = 2$, стоимость четырёх добавленных вершин не более $4 \cdot \frac{1}{3}$, поэтому

$$p(S6.1) \geq 2 \cdot \frac{5}{6} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

S6.2. *Вершина x смежна с двумя вершинами из $V(F)$.*

Тогда x смежна с двумя вершинами $y_1, y_2 \in Z$. Добавим x, y_1, y_2 в лес F и получим $\Delta u = 1$. Две смежные с x вершины из $V(F)$ принадлежат одной компоненте связности, поэтому $\Delta b \geq 1$. Стоимость трёх добавленных в F вершин не более $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ и мы имеем

$$p(S6.2) \geq \frac{5}{6} + \frac{1}{6} - 1 = 0.$$

S7. *Существует вершина $x \in S$ уровня 1, смежная с одной вершиной из $V(F)$.*

Тогда x смежна с двумя не вошедшими в F вершинами y_1, y_2. Добавим x, y_1, y_2 в лес F и получим $\Delta u = 1$. Разберём несколько случаев.

S7.1. $y_1, y_2 \in S$.

Тогда стоимость трёх добавленных вершин не более $3 \cdot \frac{1}{4}$ и в результате

$$p(S7.1) \geq \frac{5}{6} - 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

что нас устраивает.

S7.2. $y_1 \in T$.

Тогда стоимость трёх добавленных в F вершин не более $\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$.

Пусть F_1 — компонента связности леса F, с которой смежна вершина x. Добавим в дерево F_1 вершины x, y_1, y_2. В результате получим

$$p(S7.2) \geq \frac{5}{6} - \frac{11}{12} = -\frac{1}{12},$$

что нам не подходит. Разберём несколько случаев, с чем может быть смежна вершина y_1, и в каждом из них продолжим шаг до тех пор, пока доход не станет неотрицательным.

S7.2.1. *Вершина y_1 смежна с $z \in V(F_1)$.*
Тогда z в результате сделанного шага стала мёртвой вершиной (см. рисунок 6.26a), то есть $\Delta b \geq 1$ и мы имеем

$$p(S7.2.1) \geq p(S7.2) + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

S7.2.2. *Вершина y_1 смежна с $z \in V(F) \setminus V(F_1)$.*
Тогда добавим в F ребро zy_1, соединив две различные компоненты связности леса F в одну, фактически выполнив шаг $S1$ (см. рисунок 6.26b). В результате

$$p(S7.2.2) \geq p(S7.2) + p(S1) \geq \frac{1}{4}.$$

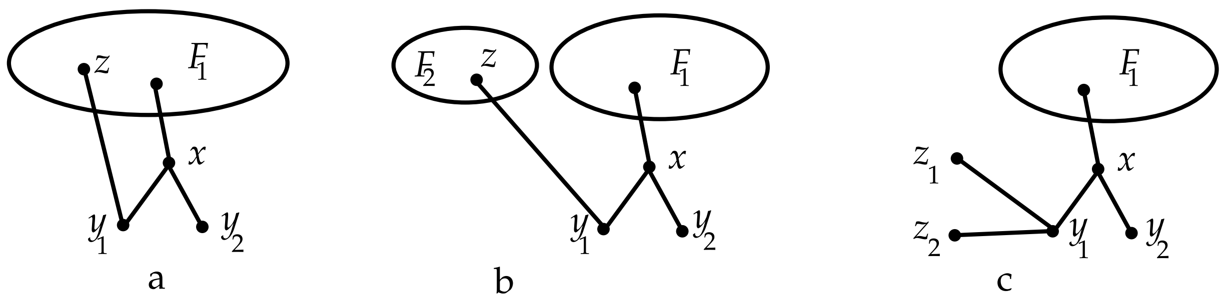


Рис. 6.26: Шаг $S7.2$.

S7.2.3. *Вершина y_1 несмежна с $V(F)$.*
Так как $d_G(y_1) \geq 4$, вершина y_1 смежна хотя бы с двумя еще не добавленными в F вершинами z_1, z_2. Добавим их в F, фактически выполнив шаг $S3$ (см. рисунок 6.26c), и получим

$$p(S7.2.3) \geq p(S7.2) + p(S3) \geq \frac{1}{12}.$$

S8. *Существует вершина $x \in S$ уровня 1, смежная с двумя вершинами из $V(F)$.*

Обе вершины из $P(x)$, как отмечалось ранее, лежат в одной компоненте связности F_1 леса F. Добавим x в дерево F_1, в результате одна из вершин множества $P(x)$ станет мёртвой. Пока что мы имеем $\Delta s = 1$, $\Delta b = 1$.

Вершина x смежна ровно с одной вершиной из Z, пусть это вершина y. Добавим y в лес. Получается

$$p(S8) \geq \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - c_G(y) \geq -\frac{1}{12} - c_G(y). \tag{6.17}$$

Разберём несколько случаев, с чем может быть смежна вершина y, и в каждом из них продолжим шаг до тех пор, пока доход не станет неотрицательным.

S8.1. *Вершина y смежна с $V(F)$.*

Поскольку невозможно выполнить шаги $S1 - S7$ с вершиной y, то $y \in S$ и y смежна с двумя вершинами одной компоненты связности F_2 леса F. Учитывая данные о вершине y, мы получим $c_G(y) = \frac{1}{4}$. В силу (6.17), тогда

$$p(S8) \geq -\frac{1}{3}.$$

Рассмотрим два случая.

S8.1.1. $F_2 = F_1$.

Тогда обе вершины из $P(y)$ и сама вершина y стали мёртвыми (см. рисунок 6.27a) и мы имеем

$$p(S8.1.1) \geq p(S8) + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

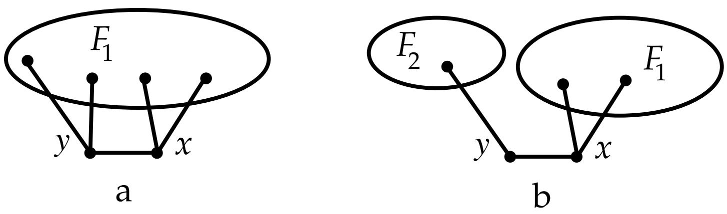


Рис. 6.27: Шаг $S8.1$.

S8.1.2. $F_2 \neq F_1$.

Тогда соединим эти две компоненты связности, добавив ребро между y и одной из вершин $P(y)$, фактически выполнив шаг $S1$ (см. рисунок 6.27b). Получим

$$p(S8.1.2) \geq p(S8) + p(S1) \geq 0.$$

S8.2. *Вершина y несмежна с $V(F)$.*

Тогда все смежные с y вершины, кроме x, еще не вошли в F. Разберём два случая.

S8.2.1. $y \in T$.

Тогда мы можем добавить в дерево F_1 три смежные с y вершины, фактически выполнив шаг $S3$ и шаг $S2$ (см. рисунок 6.28a). Учитывая (6.17) и то, что $c_G(y) = \frac{1}{3}$, получим $p(S8) \geq -\frac{5}{12}$ и

$$p(S8.2.1) \geq p(S8) + p(S3) + p(S2) \geq \frac{1}{4}.$$

S8.2.2. $y \in S$.

В этом случае мы можем добавить в дерево F_1 только две смежные с y вершины z_1, z_2. Добавим их в дерево F_1, в результате выполнив шаг $S3$ (см. рисунок 6.28b). Учитывая (6.17) и то, что $c_G(y) = \frac{1}{4}$, получим $p(S8) \geq -\frac{1}{3}$ и

$$p(S8.2.2) \geq p(S8) + p(S3) \geq -\frac{1}{6}.$$

Продолжим рассматривать варианты.

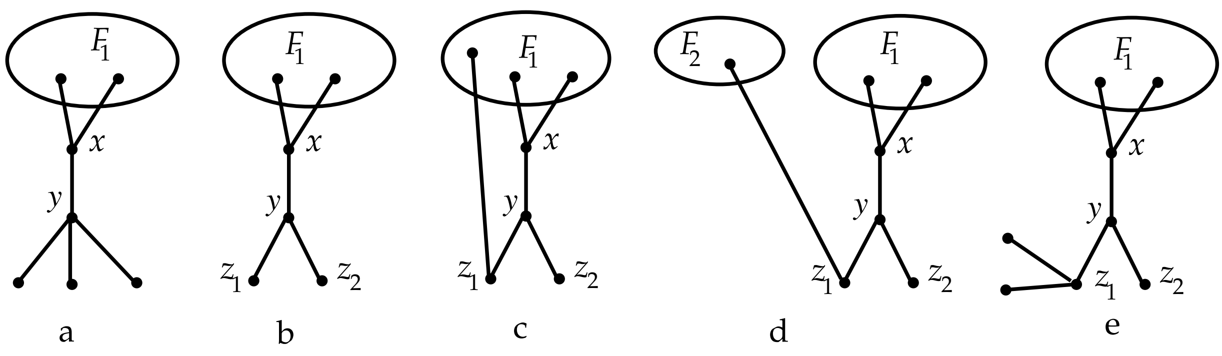


Рис. 6.28: Шаг $S8.2$.

S8.2.2.1. $z_1, z_2 \in S$

Тогда две добавленные в последнюю очередь вершины стоят $2 \cdot \frac{1}{4}$, а не $2 \cdot \frac{1}{3}$, как было посчитано выше и

$$p(S8.2.2.1) \geq p(S8.2.2) + \frac{1}{6} \geq 0,$$

что нас устраивает.

S8.2.2.2. *Вершина $z_1 \in T$ смежна с лесом F.*

Если z_1 смежна с деревом F_1 (см. рисунок 6.28c), то к параметрам шага $S8.2.2$ добавляется еще одна мёртвая вершина и

$$p(S8.2.2.2) \geq p(S8.2.2) + \frac{1}{6} \geq 0.$$

Пусть z_1 смежна с деревом $F_2 \neq F_1$. Тогда проведём ребро, соединяющее F_2 с z_1 (см. рисунок 6.28d), уменьшив число компонент связности леса F на 1 и фактически выполнив шаг $S1$. Получим

$$p(S8.2.2.2) \geq p(S8.2.2) + p(S1) \geq \frac{1}{6}.$$

S8.2.2.3. *Вершина $z_1 \in T$ несмежна с лесом F.*

Так как $d_G(z_1) \geq 4$, вершина z_1 смежна хотя бы с двумя еще не добавленными в F вершинами. Добавим их в F (см. рисунок 6.28e), фактически выполнив шаг $S3$ и получим

$$p(S8.2.2.3) \geq p(S8.2.2) + p(S3) \geq 0.$$

6.2.3 Окончание доказательства теоремы 6.2

Достаточно рассмотреть случай, когда к графу невозможно применить ни одно из редукционных правил. По лемме 6.10 построим лес F^* — подграф графа G — с $\alpha(F^*) \geq \frac{3}{2}$. Если F^* не является остовным деревом графа G, то продолжим построение с помощью описанных выше шагов.

Предположим, что в результате действия описанного выше алгоритма построено дерево F, с которым невозможно выполнить ни один из шагов.

Если не все вершины графа G вошли в F, то существует не вошедшая в F вершина, смежная с F. По построению, ее степень хотя бы 3, а значит, можно выполнить один из шагов, противоречие. Следовательно, F — остовный лес графа G.

Предположим, что граф F несвязен. Тогда какие-то две его компоненты связности соединены ребром в графе G и можно выполнить шаг $S1$. Значит, F связен, то есть, это остовное дерево. Тогда все висячие вершины дерева F — мёртвые, в дереве F ровно одна компонента связности и

$$u(F) = \frac{5}{6}u(F) + \frac{1}{6}b(F) \ge c_G(F) + \alpha(F) \ge c_G(F) + \alpha(F^*) \ge c_G(F) + \frac{3}{2},$$

так как все выполненные шаги имели неотрицательный доход.

Таким образом, доказательство теоремы 6.2 закончено.

6.2.4 Экстремальные примеры

Следующая лемма поможет нам склеивать большие экстремальные примеры к оценке из теоремы 6.2 из маленьких. Главное требование к объектам склейки — наличие висячих вершин.

Лемма 6.11. *Пусть G_1 и G_2 — связные графы с $v(G_1) > 2$, $v(G_2) > 2$, $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$ и висячими вершинами x_1 и x_2. Пусть G — граф, полученный из G_1 и G_2 склеиванием по вершинам x_1 и x_2 (пусть в результате из x_1 и x_2 получилась вершина x) и последующим стягиванием одного инцидентного x моста. Предположим, что*

$$u(G_1) = c(G_1) + \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad u(G_2) = c(G_2) + \frac{3}{2}.$$

Тогда

$$u(G) = c(G) + \frac{3}{2}.$$

Доказательство. Отметим, что $v(G) = v(G_1)+v(G_2)-2$. Действительно, две вершины x_1 и x_2 мы склеили в одну вершину x, после чего стягивание одного ребра уменьшило число вершин еще на одну (в результате стягивания исчезла вершина x степени 2). Таким образом, все вершины графа G — это все отличные от x_1 и x_2 вершины графов G_1 и G_2, причем ровно с такими же степенями, как в G_1 и G_2. Как мы знаем, вершины $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$ не принадлежат $V(G)$ и $c_{G_1}(x_1) = c_{G_2}(x_2) = \frac{1}{4}$, следовательно, $c(G) = c(G_1) + c(G_2) - 2 \cdot \frac{1}{4}$.

Напишем цепочку равенств (в первом равенстве воспользуемся леммой 6.5):

$$u(G) = u(G_1) + u(G_2) - 2 = c(G_1) + c(G_2) + 1 = c(G) + \frac{3}{2}.$$

□

Остается привести экстремальный пример к теореме 6.2, в котором хотя бы две висячих вершины и есть вершины степени не менее 4, чтобы оценка из теоремы была осмысленной.

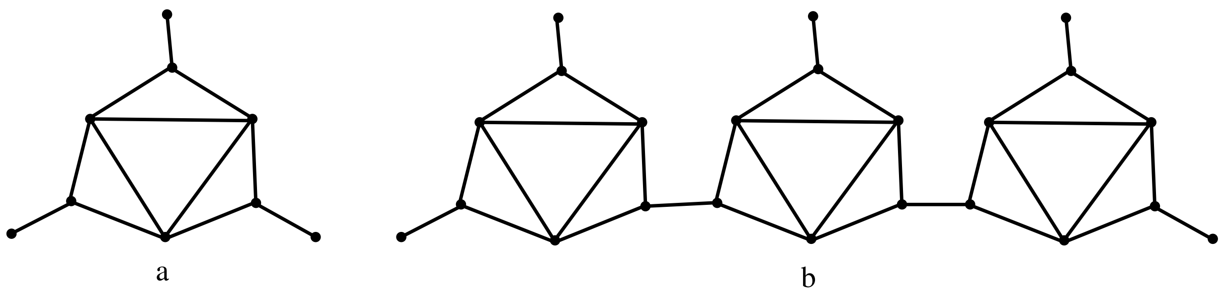


Рис. 6.29: Экстремальные примеры.

Такой граф мы видим на рисунке 6.29a. В этом графе G по три вершины степеней 1, 3 и 4, а значит,

$$t = 3, \quad s = 6, \quad \text{и} \quad c(G) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}.$$

Нетрудно понять, что $u(G) = 4$ (в остовном дереве могут быть висячими вершинами три висячих вершины графа G и не более чем одна из вершин степени 4). Таким образом,

$$u(G) = 4 = c(G) + \frac{3}{2}.$$

Мы можем склеить из таких графов сколь угодно длинные цепочки (см. рисунок 6.29b). По лемме 6.11, на этих графах будет достигаться оценка на количество висячих вершин в остовном дереве из теоремы 6.2.

6.3 Нижняя оценка на $u(G)$, учитывающая вершины степени 2

Теорема 6.3. *Пусть G — связный граф, $v(G) \geq 2$, $\ell(G) \leq k$, $k \geq 1$. Тогда*

$$u(G) \geq \frac{1}{2k+4}v(G) + \frac{3}{2}.$$

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 6.3. Перед доказательством основной теоремы раздела мы докажем две леммы.

Мы будем использовать блоки и точки сочленения. В этом разделе граф G — связный. Напомним, что вершина $a \in V(G)$ называется *точкой сочленения*, если граф $G - a$ несвязен. *Блоком* называется любой максимальный по включению подграф графа G, не имеющий точек сочленения.

Замечание 6.26. Если $v(G) \geq 2$, то любой блок графа G содержит хотя бы две вершины и является либо двусвязным графом, либо полным графом на двух вершинах.

Определение 6.7. Пусть B — блок графа G.

1) *Границей* блока B (обозначение: $\mathrm{Bound}(B)$) назовем множество всех входящих в него точек сочленения. Множество $\mathrm{Int}(B) = V(B) \setminus \mathrm{Bound}(B)$ назовем *внутренностью* блока B, а все входящие в него вершины блока — *внутренними.*

2) Блок B называется *крайним*, если он содержит ровно одну точку сочленения (то есть $|\mathrm{Bound}(B)| = 1$).

3) Блок называется *пустым*, если у него нет внутренних вершин (то есть, $\mathrm{Int}(B) = \varnothing$.) Иначе блок называется *непустым.*

4) Блок B называется *большим*, если $|\mathrm{Int}(B)| > |\mathrm{Bound}(B)|$.

Лемма 6.12. *Пусть B — большой блок графа G, $v(G) > 2$. Тогда существует непустой набор рёбер $F \subset E(B)$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1° *граф $B - F$ связен;*

2° *для любой вершины $x \in \mathrm{Bound}(B)$ выполняется $d_{B-F}(x) \geq 2$;*

3° *если вершины $y, z \in \mathrm{Int}(B)$ смежны в $B - F$ и*

$$d_{B-F}(y) = d_{B-F}(z) = 2, \quad \textit{то} \quad d_B(y) = d_B(z) = 2.$$

Доказательство. Предположим, что $v(B) = 2$. Тогда, так как блок B — большой, обе его вершины должны быть внутренними, то есть, B не содержит ни одной точки сочленения. Из связности графа G тогда следует, что $B = G$. Противоречие с $v(G) > 2$.

Таким образом, $v(B) > 2$ и в виду двусвязности графа B мы имеем $d_B(x) \geq 2$ для любой вершины $x \in V(B)$. Рассмотрим несколько случаев.

1. *Пусть в блоке B существуют смежные вершины $u, w \in \mathrm{Int}(B)$, причём $d_G(u) = 2$.*

Очевидно, граф $B - uw$ связен, в графе $B - uw$ степени вершин из $\mathrm{Bound}(B)$ такие же, как в B, то есть, не менее двух. Если для набора $F = \{uw\}$ выполняется условие 3°, то этот набор рёбер нам подходит.

Пусть для набора $F = \{uw\}$ не выполняется условие 3°. Тогда в графе $B - uw$ есть пара смежных вершин y, v степени 2 из $\mathrm{Int}(B)$, причём $d_B(y) > 2$. Тогда не умаляя общности можно считать, что $y = w$, причём

$$d_B(w) = 3, \quad d_B(v) = 2 \quad \text{и} \quad vw \in E(B).$$

Рассмотрим набор $F = \{uw, vw\}$. Все вершины из $\mathrm{Bound}(B)$ имеют в графе $B - F$ такую же степень, как и в B, то есть, не менее двух. Новых вершин степени 2 при удалении F, очевидно, не появилось, так как

$$d_{B-F}(u) = d_{B-F}(v) = d_{B-F}(w) = 1.$$

Остаётся проверить связность графа $B - F$. Пусть w' — третья вершина графа B, смежная с w. Отметим, что граф $B - w$ связен (в виду двусвязности B). Тогда вершины из $V(B) \setminus \{w\}$ связаны в $B - F$, а, поскольку $ww' \in E(B - F)$, то граф $B - F$ связен. Таким образом, набор рёбер $F = \{uw, vw\}$ нам подходит.

2. *Пусть в блоке B существуют смежные вершины $u, w \in \mathrm{Int}(B)$, но степень каждой входящей в такую пару вершины не менее трёх.*
Тогда рассмотрим набор $F = \{uw\}$. Очевидно, граф $B - uw$ связен, в графе $B - uw$ степени вершин из $\mathrm{Bound}(B)$ такие же, как в B, то есть, не менее двух. Пусть $x, y \in \mathrm{Int}(B)$, $xy \in E(B - uw)$. Тогда хотя бы одна из вершин x и y (пусть это x) отлична от u и w, следовательно, $d_{B-uw}(x) \geq 3$. Таким образом, набор рёбер $F = \{uw\}$ нам подходит.

3. *Пусть в блоке B нет смежных вершин из $\mathrm{Int}(B)$.*
Поскольку $|\mathrm{Int}(B)| > |\mathrm{Bound}(B)|$ и $d_B(x) \geq 2$ для любой вершины $x \in \mathrm{Int}(B)$, то существует вершина $u \in \mathrm{Bound}(B)$, смежная хотя бы с тремя вершинами из $\mathrm{Int}(B)$. Пусть $w \in \mathrm{Int}(B)$, $uw \in E(B)$. Тогда граф $B - uw$ связен, $d_{B-uw}(y) \geq 2$ для любой вершины $y \in \mathrm{Bound}(B)$. Так как никакие две вершины из $\mathrm{Int}(B)$ не смежны в $B - uw$, набор рёбер $F = \{uw\}$ нам подходит. □

Лемма 6.13. *Пусть G — граф с более чем двумя вершинами. Тогда существует набор рёбер $F \subset E(G)$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1° *граф $G - F$ связен;*

2° *у графа $G - F$ нет больших блоков;*

3° *если вершины x и y смежны в $G - F$ и $d_{G-F}(x) = d_{G-F}(y) = 2$, то $d_G(x) = d_G(y) = 2$.*

Доказательство. Пусть B — большой блок графа G. Тогда существует набор рёбер $F_1 \subset E(B)$, удовлетворяющий условиям $1° - 3°$ леммы 6.12. Так как граф $B - F_1$ связен, то связен и граф $G - F_1$. Пусть

$$xy \in E(G - F_1), \quad d_{G-F_1}(y) = d_{G-F_1}(x) = 2 \quad \text{и} \quad d_G(y) > 2.$$

Тогда вершина y инцидентна ребру из F_1, следовательно, $y \in V(B)$.

Пусть $y \in \mathrm{Bound}(B)$. Тогда по лемме 6.12 мы имеем $d_{B-F_1}(y) \geq 2$ и, так как y — точка сочленения графа G, она смежна хотя бы с одной вершиной из $V(G) \setminus V(B)$. Следовательно, $d_{G-F_1}(y) \geq 3$, противоречие.

Значит, $y \in \mathrm{Int}(B)$. Из $xy \in E(G)$ следует, что $x \in V(B)$. Теперь аналогично получается, что $x \in \mathrm{Int}(B)$. Но тогда по лемме 6.12 мы имеем $d_G(x) = d_G(y) = 2$, противоречие.

Если в графе $G_1 = G - F_1$ есть большие блоки, повторим операцию. Понятно, что через несколько таких операций больших блоков не останется и объединение всех наборов удалённых из графа G рёбер будет искомым набором F. □

Доказательство теоремы 6.3. Можно считать, что $v(G) > 2$, иначе утверждение теоремы очевидно.

1. *Предположим, что граф G имеет большие блоки.*
По лемме 6.13 мы можем выбрать такой набор рёбер $F \subset E(G)$, что граф $G' = G - F$ связен, не имеет больших блоков и для любых двух смежных в G' вершин x и y из $d_{G'}(x) = d_{G'}(y) = 2$ следует $d_G(x) = d_G(y) = 2$. Тогда

$$\ell(G') = \max(\ell(G), 1) \leq k.$$

Так как любое остовное дерево графа G' является остовным деревом графа G, то $u(G) \geq u(G')$. Поэтому, достаточно рассмотреть случай, когда граф G не имеет больших блоков. Далее мы рассмотрим этот случай.

2. *Преобразование графа G в граф H.*
Пусть a — точка сочленения графа G, входящая в блоки $B_1, \dots, B_m$, где $m \geq 3$. Заменим вершину a на цикл $a_1 a_2 \dots a_m$ и соединим вершину a_i с теми же вершинами блока B_i, с которыми была соединена вершина a. В результате точка сочленения заменена на блок с пустой внутренностью (см. рисунок 6.30).

Выполним такие замены для всех точек сочленения, входящих хотя бы

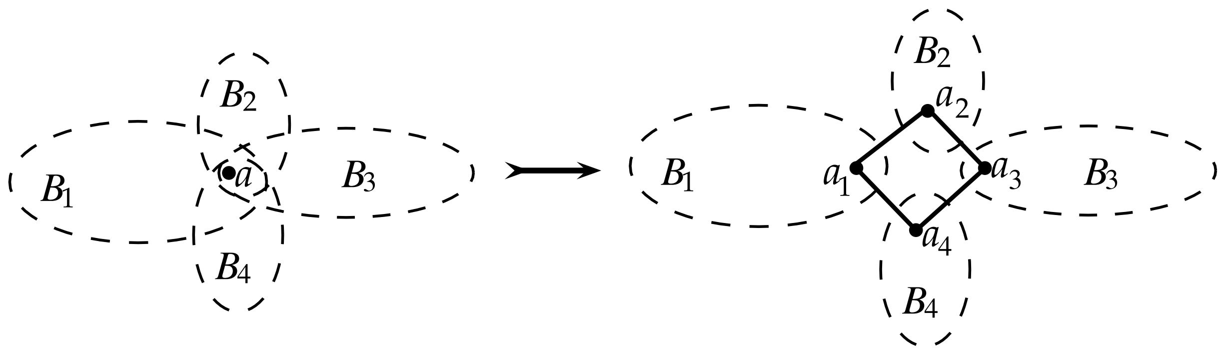


Рис. 6.30: Замена точки сочленения на цикл.

в три блока и получим новый граф H, в котором каждая точка сочленения входит ровно в два блока. Отметим, что

$$v(H) \leq v(G), \quad \ell(H) = \ell(G) \leq k,$$

так как на каждом шаге мы меняли одну вершину степени более 2 на несколько вершин степени более 2.

3. *Докажем, что* $u(H) \geq u(G)$.

Рассмотрим остовное дерево T графа H с $u(T) = u(H)$. Пусть A — множество новых вершин графа H, на которые была заменена точка сочленения a графа G. Точки сочленения графа не могут быть висячими вершинами в его остовном дереве, следовательно, все вершины из A — невисячие в дереве T. Из построения графа H и несвязности графа $G - a$ следует, что граф $H - A$ также несвязен. Поэтому, подграф $T(A)$ связен, то есть, является простым путём (напомним, что граф $H(A)$ по построению — простой цикл). Последовательно стянув в дереве T все рёбра пути $T(A)$, мы получим вместо множества A вершину a и новое дерево с тем же множеством висячих вершин, что и T. Выполнив такие операции для всех замененных точек сочленения графа G, мы получим остовное дерево T' графа G с тем же множеством висячих вершин, что и T. Таким образом, $u(H) \geq u(T') = u(G)$.

4. *Построим граф* $\mathcal{D}$*, вершинами которого будут блоки графа* H*, а два* *блока смежны если и только если они имеют общую точку сочленения.* Так как каждая точка сочленения графа H входит ровно в два блока, граф $\mathcal{D}$ получается из дерева блоков и точек сочленения графа H заменой каждой точки сочленения a и двух инцидентных ей рёбер на ребро, соединяющее два блока, в которые входит a. Следовательно, $\mathcal{D}$ — дерево, в котором каждая висячая вершина — крайний блок графа H.

Пусть $\mathcal{V} = V(\mathcal{D})$ — множество всех блоков графа H, $v = |\mathcal{V}|$. *Степенью блока* $B \in \mathcal{V}$ мы будем называть величину $d_{\mathcal{D}}(B) = |\mathrm{Bound}(B)|$ — количество входящих в B точек сочленения. Введём обозначения:

$\mathcal{V}_i$ — множество всех блоков степени i;

$\mathcal{W}_i$ — множество непустых блоков степени i;

$\mathcal{W}$ — множество всех непустых блоков;

$\mathcal{U}_i$ — множество пустых блоков степени i.

Положим

$$v_i = |\mathcal{V}_i|, \quad w_i = |\mathcal{W}_i|, \quad w = |\mathcal{W}|, \quad u_i = |\mathcal{U}_i|.$$

Отметим, что $w_i + u_i = v_i$.

Очевидно, существует остовное дерево графа H с w висячими вершинами (по одной внутренней вершине каждого непустого блока). Таким образом,

$$u(G) \geq u(H) \geq w. \tag{6.18}$$

5. *Пусть* $\mathcal{P} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{U}_2$, $\mathcal{Q} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{P}$. *Докажем, что блоки из* $\mathcal{P}$ *содержат ровно по две вершины, а блоки из* $\mathcal{Q}$, *содержат не менее трёх вершин.*

Если $B \in \mathcal{U}_2$, то блок B содержит две точки сочленения и ни одной внутренней вершины, то есть, $v(B) = 2$.

Пусть $B \in \mathcal{W}_1$. Тогда блок B содержит одну точку сочленения и является непустым, следовательно, $|\mathrm{Int}(B)| \geq 1$. Однако, блок B не является большим, следовательно, $|\mathrm{Int}(B)| \leq |\mathrm{Bound}(B)| = 1$. Таким образом, $v(B) = 2$.

Пусть $B \in \mathcal{W}_2$. Тогда блок B содержит две точки сочленения и хотя бы одну внутреннюю вершину. Следовательно, $v(B) \geq 3$. Если $B \in \mathcal{V}_i$ и $i \geq 3$, то очевидно, что $v(B) \geq 3$.

6. *Нашей целью будет оценка сверху количества вершин графа H через w.*

Начнём с двух несложных неравенств. Так как внутренность крайнего блока непуста,

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{V}_1, \quad \mathcal{U}_1 = \varnothing.$$

Следовательно, пустые блоки либо входят в $\mathcal{U}_2$, либо имеют степень хотя бы 3, откуда получается неравенство

$$\sum_{i=1}^{v} iu_i \geq 3\sum_{i=2}^{v} u_i - u_2 = 3(v-w) - u_2. \tag{6.19}$$

Просуммировав степени вершин дерева $\mathcal{D}$ и воспользовавшись равенством $e(\mathcal{D}) = v(\mathcal{D}) - 1$, мы получим

$$\sum_{i=1}^{v}(i-2)v_i = 2, \quad \text{откуда следует, что} \quad v_1 - 2 = \sum_{i=3}^{v}(i-2)v_i.$$

Отметим, что $\frac{i}{i-2} \leq 3$ при $i \geq 3$. Поэтому

$$\sum_{i=3}^{v} iv_i \leq 3\sum_{i=3}^{v}(i-2)v_i = 3v_1 - 6 = 3w_1 - 6. \tag{6.20}$$

7. *Оценим u_2 через количество непустых блоков.*

Рассмотрим любую максимальную по включению цепочку $\mathcal{L} = B_1B_2\dots B_n$ последовательно соединённых в дереве $\mathcal{D}$ блоков из $\mathcal{P}$. По доказанному выше, $v(B_i) = 2$ для всех $i \in \{1,\dots,n\}$. Поскольку блоки из $\mathcal{W}_1$ — висячие в дереве $\mathcal{D}$, то $B_2,\dots,B_{n-1} \in \mathcal{U}_2$. Так как блоки B_i и B_{i+1} имеют общую точку сочленения, мы можем положить $V(B_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$ (для $i \in \{1,\dots,n\}$).

Отметим, что две вершины каждого из блоков B_i смежны. Поэтому при $i \in \{2,\dots,n-1\}$ вершина x_i смежна в графе H с x_{i-1} и x_{i+1}. Таким образом, мы имеем цепочку последовательно соединённых вершин $x_1 \dots x_{n+1}$ в графе H, причём $d_H(x_2) = \dots = d_H(x_n) = 2$. Следовательно, $n \le k+1$.

Разрежем цепочку $\mathcal{L}$ на две половины по $\frac{n}{2}$ блоков: *левую*, от B_1 до середины и *правую*, от середины до B_n (в случае, когда n нечетно, мысленно разделим средний блок $\mathcal{L}$ на две половинки). Если $B_1 \in \mathcal{U}_2$, то левую половину цепочки поставим в соответствие блоку из $\mathcal{Q}$, смежному с B_1. Если же $B_1 \in \mathcal{W}_1$, то левая половина цепочки за вычетом самого блока B_1 будет поставлена в соответствие как раз блоку B_1. Аналогично, в зависимости от типа блока B_n, поступим с правой половиной цепочки. Так же сделаем со всеми остальными максимальными цепочками блоков из $\mathcal{P}$. Отметим, что такие цепочки не пересекаются.

Таким образом, каждому блоку из $\mathcal{W}_1$ соответствует не более чем

$$\frac{n}{2} - 1 \le \frac{k-1}{2}$$

блоков из $\mathcal{U}_2$. Каждый блок степени i из $\mathcal{Q}$ смежен не более, чем с i блоками из $\mathcal{U}_2$, а значит, ему соответствует не более чем

$$i \cdot \frac{n}{2} \le i \cdot \frac{k+1}{2}$$

блоков из $\mathcal{U}_2$. Теперь, используя неравенство (6.20), напишем цепочку неравенств:

$$u_2 \le \frac{k-1}{2} w_1 + \frac{k+1}{2}\left(2w_2 + \sum_{i=3}^{v} i v_i\right) \le \frac{k-1}{2} w_1 + (k+1) w_2 + \frac{k+1}{2}(3w_1 - 6) = (k+1)w_2 + (2k+1)w_1 - 3k - 3. \quad (6.21)$$

8. *Оценим $v(G)$ через параметр w.*

По построению графа $\mathcal{D}$, количество точек сочленения графа H равно $e(\mathcal{D}) = v - 1$. Все остальные вершины графа H (обозначим их количество через s) — это внутренние вершины непустых блоков графа H. Из отсутствия больших блоков следует, что

$$|\mathrm{Int}(B)| \le |\mathrm{Bound}(B)| = d_{\mathcal{D}}(B)$$

для любого непустого блока B графа H. Следовательно,

$$s \le \sum_{B\in\mathcal{W}} d_{\mathcal{D}}(B) = \sum_{i=1}^{v} iw_i = \sum_{i=1}^{v} iv_i - \sum_{i=1}^{v} iu_i = 2v-2-\sum_{i=1}^{v} iu_i \qquad (6.22)$$

(в последнем переходе мы использовали то, что $\mathcal{D}$ — дерево). Воспользовавшись неравенствами (6.18) – (6.22) и тем, что $w_1 + w_2 \le w$, напишем цепочку неравенств:

$$v(G) \le v(H) = v-1+s \le v-1+\Big(2v-2-\sum_{i=1}^{v} iu_i\Big) =$$

$$3v-3-\sum_{i=1}^{v} iu_i \le 3v-3-\big(3(v-w)-u_2\big) = 3w-3+u_2 \le$$

$$3w-3+\big((k+1)w_2+(2k+1)w_1-3k-3\big) \le$$

$$(2k+4)w-(3k+6) \le (2k+4)u(G)-(3k+6),$$

откуда немедленно следует утверждение теоремы. □

6.3.1 Экстремальные примеры

Мы приведем бесконечную серию примеров графов, в которых максимальная цепочка последовательно соединённых вершин степени 2 состоит из $k > 0$ вершин и оценка из теоремы 6.3 обращается в равенство.

Рассмотрим дерево T, в котором есть только вершины степеней 1 и 3, причём вершин степени 3 ровно n. Легко видеть, что количество вершин степени 1 тогда равно $n + 2$, а $e(T) = 2n + 1$. Заменим каждое ребро дерева T цепочкой длины $k + 1$ (то есть, добавим на каждом ребре по k новых последовательно соединённых вершин степени 2), после чего каждую вершину x степени 3 заменим на треугольник, три вершины которого соединим с тремя добавленными вершинами степени 2, с которыми была соединена вершина x (каждую вершину треугольника — ровно с одной вершиной). Пример такого графа для $k = 2$ и $n = 5$ изображен на рисунке 6.31.

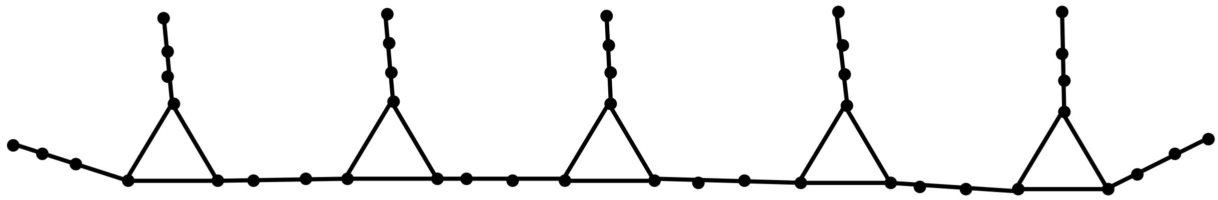


Рис. 6.31: Экстремальный пример.

В полученном графе G будет $n+2$ висячих вершин, $(2n+1)k$ вершин степени 2 и n треугольников, итого

$$v(G) = n + 2 + k(2n+1) + 3n = (2k+4)n + k + 2.$$

Все невисячие вершины графа G являются точками сочленения и потому не могут быть висячими вершинами остовного дерева. Таким образом легко видеть, что

$$u(G) = n + 2 = \frac{1}{2k+4}v(G) + \frac{3}{2}.$$

Заключение

В первой главе диссертации построены деревья, описывающие структуру разбиения k-связного графа наборами из попарно независимых k-вершинных разделяющих множеств или k-элементных разрезов для произвольного k. Доказаны свойства построенных деревьев, показывающие их аналогию с деревом блоков и точек сочленения связного графа. Эти деревья представляют собой аппарат, позволяющий упорядочить структуру k-связного графа. Кроме того, в диссертации описывается и применяется гипердерево разбиения, обобщающее все построенные структурные деревья. Отметим, что все эти объекты удалось построить с помощью придуманного диссертантом понятия части разбиения графа набором разделяющих множеств, которое, фактически, является основным методом изучения структуры связности графа в диссертации.

Наиболее важным итогом диссертационной работы автору представляется именно построение структурных деревьев, обобщающих дерево блоков и точек сочленения для графов большей связности. Классическое дерево блоков и точек сочленения имеет множество применений, причем не только в теории связности. Можно ожидать, что в будущем найдут свое применение и построенные в диссертации структурные деревья.

Ряд применений построенных конструкций приведен в диссертации. Показано, что частным случаем дерева разбиения k-связного графа набором из попарно независимых k-вершинных разделяющих множеств является дерево разбиения двусвязного графа. С помощью этого дерева изучена структура минимальных и критических двусвязных графов, доказаны оценки на хроматическое число двусвязного графа. С помощью дерева разбиения графа множеством независимых разрезов доказан ряд результатов о структуре минимальных k-связных графов с малым числом вершин степени k для произвольного k. В частности, показано, что все такие графы с наименьшим возможным числом вершин — это графы вида $G_{k,T}$, построенные на k копиях произвольного дерева T, степени вершин которого не превосходят $k+1$.

С помощью разработанных методов также исследованы множества вершин k-связного графа, одновременное удаление которых не нарушает k-связности.

В конце диссертации доказан ряд нижних оценок на количество листьев в остовном дереве связного графа. Для каждой оценки построена бесконечная серия графов, на которых эта оценка достигается. Для оценки наибольшего количества листьев в остовном дереве связного графа применяются модификации классических методов и новые методы, основанные на использовании дерева блоков и точек сочленения. Именно эти методы позволяют получить новые нижние оценки на количество листьев в остовном дереве, учитывающие вершины степеней 1 и 2 исходного связного графа. Эти методы могут быть применены для получения новых оценок в будущем.

Методы, связанные с применением дерева блоков и точек сочленения и его обобщений, разработанные в диссертации, уже позволили получить ряд результатов. В заключении выскажем надежду, что эти методы найдут применение в дальнейшем и, в частности, позволят понять много нового о структуре связности графа.

Литература

[1] N. Alon. *Transversal numbers of uniform hypergraphs.*// Graphs and Combinatorics v. 6 (1990), p. 1-4.

[2] P. S. Bonsma *Spanning trees with many leaves in graphs with minimum degree three.* // SIAM J. Discrete Math. v. 22, no. 3 (2008), p. 920-937.

[3] P. S. Bonsma, F. Zickfeld *Spanning trees with many leaves in graphs without diamonds and blossoms.* // LATIN 2008: Theoretical informatics, p. 531-543, Lecture Notes in Comput. Sci., 4957, Springer, Berlin, 2008.

[4] Y. Caro, D. B. West, R. Yuster. *Connected domination and spanning trees with many leaves.* // SIAM J. Discrete Math. v. 13, no. 2 (2000), p. 202-211.

[5] G. Chartrand, A. Kaugars, D. R. Lick. *Critically n-connected graphs.* // Proc. of the Amer. Math. Soc., v. 32 (1972), p. 63-68.

[6] G. Ding, T. Johnson, P. Seymour *Spanning trees with many leaves.* // J. Graph Theory v. 37 (2001), no. 4, p. 189-197.

[7] G. A. Dirac. *Minimally 2-connected graphs.* // J. Reine and Angew. Math. v. 268 (1967), p.204-216.

[8] J. R. Griggs, D. J. Kleitman, A. Shastri. *Spanning trees with many leaves in cubic graphs.* // J. Graph Theory v. 13, no. 6 (1989), p. 669-695.

[9] J. R. Griggs, M. Wu. *Spanning trees in graphs of minimum degree* 4 *or* 5. // Discrete Math. v. 104 (1992), p. 167–183.

[10] R. Halin. *A theorem on n-connected graphs.* // Journal of Combinatorial Theory, v. 7 (1969), p. 150-154.

[11] R. Halin. *On the structure of n-connected graphs.* // Recent Progress in Combinatorics (ed: W. T. Tutte), Academic Press, London – New York, 1969, p. 91-102.

[12] R. Halin. *Zur Theorie der n-fach zusammenhängenden Graphen.* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, v. 7 (1969), p. 133-164.

[13] R. Halin. *Studies on minimally n-connected graphs.* // Combinatorial Mathematics and its Applications (ed: D. J. A. Welsh), Academic Press, London – New York, 1971, p. 129-136.

[14] Y. O. Hamidoune. *On critically h-connected simple graphs.* // Discrete Mathematics, v. 32 (1980), p. 257-262.

[15] F. Harary, Y. Kodama. *On the genus of an n-connected graph.* // Fund. Math., v. 54 (1964), p. 7-13.

[16] S. Hedetniemi. *Characterizations and constructions of minimally* 2-*connected graphs and minimally strong digraphs.* // Proceedings of the Second Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, 1971, p. 257-282.

[17] W. Hohberg. *The decomposition of graphs into k-connected components.* // Discrete Mathematics, v. 109 (1992), p. 133-145.

[18] J. E. Hopcroft, R. E. Tarjan. *Dividing a graph into triconnected components* // SIAM J. Comput., v. 2 (1973), p. 135-158.

[19] D. J. Kleitman, D. B. West. *Spanning trees with many leaves.*// SIAM J. Discrete Math. v. 4 (1991), no. 1, p. 99-106.

[20] S. MacLane. *A structural characterizations of planar combinatorial graphs.* // Duke Math. J., v. 3 (1937), p. 460-472.

[21] W. Mader. *Eine Eigenschaft der Atome endlicher Graphen.* // Arch. Math., v. 22 (1971), p. 333-336.

[22] W. Mader. *Ecken vom Grad n in minimalen n-fach zusammenhängenden Graphen.* // Arch. Math., v. 23 (1972), p. 219-224.

[23] W. Mader. *Endlichkeitssätze für k-kritische Graphen.* // Math. Ann., v. 229 (1977), p. 143-153.

[24] W. Mader. *Zur Struktur minimal n-fach zusammenhängender Graphen.* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, v. 49 (1979), p. 49-69.

[25] W. Mader. *On vertices of degree n in minimally n-connected graphs and digraphs* // Combinatorics, Paul Erdös is eighty (Volume 2) Keszthely (Hungray), 1993. Budapest: Janos Bolyai Mathematical Society, 1996, p. 423-449.

[26] D. W. Matula. *k-Blocks and Ultrablocks in Graphs.* // Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1978, v. 24, p. 1-13.

[27] N. Martinov. *A recursive characterization of the* 4*-connected graphs.* // Discrete Math. v. 84, no. 1 (1990), p. 105-108.

[28] K. Menger. *Zur allgemeinen Kurventheory.* // Fund. Math., 1927, p. 10, p. 96-115.

[29] L.Nebesky. *On induced subgraphs of a block.* // J. Graph Theory v. 1 (1977), 69-74.

[30] J. G. Oxley. *On some extremal connectivity results for graphs and matroids.* Discrete Math.,v. 41 (1982), p. 181-198.

[31] M. D. Plummer. *On minimal blocks* // Trans. Amer. Math. Soc., v. 134 (1968), p. 85-94.

[32] P. J. Slater. *A classification of* 4*-connected graphs.* // Journal of Combinatorial Theory, v. 17 (1974), p. 257-282.

[33] P. J. Slater. *Soldering and Point Splitting.* // Journal of Combinatorial Theory, Ser. B, v. 24 (1974), p. 338-343.

[34] J. A. Storer. *Constructing full spanning trees for cubic graphs.*// Inform. Process. Lett. v. 13 (1981), no. 1, p. 8-11.

[35] W. T. Tutte. *A theory of* 3*-connected graphs.* // Indag. Math. v. 23 (1961), p. 441-455.

[36] W. T. Tutte. *Connectivity in graphs.* // Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.

[37] H. J. Veldman. *Non-κ-critical vertices in graphs.* // Diskrete Mathematics, 1983, vol. 44, p. 105-110.

[38] А. В. Банкевич. *Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях в графах без треугольников.* // Записки научных семинаров ПОМИ т. 391 (2011) стр. 5-17.

[39] А. В. Банкевич, Д. В. Карпов. *Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях.* // Записки научных семинаров ПОМИ т. 391 (2011) стр. 18-34.

[40] К. Берж. *Теория графов и ее применения.* // Москва, Иностранная литература, 1962. (Перевод с французского. C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications.* Dunod, Paris, 1958.)

[41] Н. В. Гравин. *Построение остовного дерева графа с большим количеством листьев.* // Записки научных семинаров ПОМИ, т. 381 (2010), стр. 31-46.

[42] Д. В. Карпов. *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* // Дискретная математика, т. 13, в .1 (2001), стр. 63-72.

[43] Д. В. Карпов. *Блоки в k-связных графах.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 293 (2002), стр. 59-93.

[44] Д. В. Карпов. *Разделяющие множества в k-связном графе.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 340 (2006), стр. 33-60.

[45] Д. В. Карпов. *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* Записки научных семинаров ПОМИ т. 381 (2010) стр. 78-87.

[46] Д. В. Карпов. *Остовные деревья с большим количеством висячих вершин: новые нижние оценки через количество вершин степеней* 3 *и не менее* 4*.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 406 (2012), стр. 31-66.

[47] Д. В. Карпов. *Остовные деревья с большим количеством висячих вершин: нижние оценки через количество вершин степеней* 1*,* 3 *и не менее* 4*.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 406 (2012), стр. 67-94.

[48] Д. В. Карпов. *Дерево разбиения двусвязного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 417 (2013), стр. 86-105.

[49] Д. В. Карпов. *Минимальные двусвязные графы.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 417 (2013), стр. 106-127.

[50] Д. В. Карпов. *Дерево разрезов и минимальный k-связный граф.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 427 (2014), стр. 22-40.

[51] Д. В. Карпов. *Минимальные k-связные графы с минимальным числом вершин степени k.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 427 (2014), стр. 41-65.

[52] Д. В. Карпов. *Удаление вершин из двусвязного графа с сохранением двусвязности.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 427 (2014), стр. 66-73.

[53] Д. В. Карпов, А. В. Пастор. *О структуре k-связного графа.* // Записки научных семинаров ПОМИ, т. 266 (2000), стр. 76-106.

[54] Д. В. Карпов, А. В. Пастор. *Структура разбиения трехсвязного графа.* // Записки научных семинаров ПОМИ, т. 391 (2011), стр. 90-148.

[55] О. Оре. *Теория графов.* // Москва, “Наука”, 1968. (Перевод с английского. O.Ore, *Theory of graphs,* 1962.)

[56] У. Татт. *Теория графов.* // Москва, Мир, 1988. (Перевод с английского. W. T. Tutte, *Graph theory.* Enciclopedia of Mathematics and its Applications, v. 21, 1984.)

[57] Ф. Харари. *Теория графов.* // Москва, “Мир”, 1973. (Перевод с английского. F.Harary, *Graph theory,* 1969.)

[58] А. С. Чухнов. *Удаление вершин из k-связных графов без потери k-связности.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 340 (2006), стр. 103-116.