

# Алгебра. Глава 1. Комплексные числа.

Д. В. Карпов

2022

## Определение

- Множество **комплексных чисел** состоит из упорядоченных пар вещественных чисел:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- Сложение:  $(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$ .
- Умножение:  $(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$ .

## Определение

- Пусть  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ .
- Вещественная часть**  $z$  — это  $\operatorname{Re}(z) := a$ .
- Мнимая часть**  $z$  — это  $\operatorname{Im}(z) := b$ .
- Комплексное сопряжение**:  $\bar{z} := (a, -b)$ .
- Норма**  $z$  — это  $N(z) := a^2 + b^2$ .
- Модуль**  $z$  — это  $|z| := \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
- Очевидно,  $\overline{\bar{z}} = z$ .

# Теорема 1

$\mathbb{C}$  — поле.

**Доказательство.** • 1) и 2) Так как сложение в  $\mathbb{C}$  — покомпонентное, **ассоциативность** и **коммутативность** наследуются из  $\mathbb{R}$ .

- 3) **Ноль** в  $\mathbb{C}$  — это  $0 := (0, 0)$ .
- 4) **Обратный элемент по +**. Для  $z = (a, b)$  положим  $-z := (-a, -b)$ .
- 7) **Коммутативность умножения**:

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba') = \\ (a'a - b'b, a'b + b'a) = (a', b') \cdot (a, b).$$

- 5) Достаточно проверить одну **дистрибутивность** (так как умножение коммутативно):

$$(a, b) \cdot ((c_1, d_1) + (c_2, d_2)) = (a, b) \cdot (c_1 + c_2, d_1 + d_2) = \\ (ac_1 + ac_2 - bd_1 - bd_2, ad_1 + ad_2 + bc_1 + bc_2) = \\ (ac_1 - bd_1, ad_1 + bc_1) + (ac_2 - bd_2, ad_2 + bc_2) = (a, b) \cdot (c_1, d_1) + (a, b) \cdot (c_2, d_2).$$

- 6) **ассоциативность умножения:**

$$\begin{aligned}((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \cdot (a_3, b_3) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot (a_3, b_3) = \\(a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3, a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3).\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что при другом порядке получится то же самое (в вещественную часть попадают сомножители с четным числом  $b$ , в мнимую — с нечетным, знак — получается там, где более одной  $b$ ).

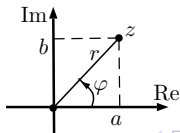
- 8) **Единица:** это  $1 := (1, 0)$ .
- 9) **Обратный элемент по  $\cdot$ .** Для  $z = (a, b)$  положим  $z^{-1} := (\frac{a}{N(z)}, \frac{-b}{N(z)})$ . Проверяем:

$$zz^{-1} = (a, b) \cdot \left(\frac{a}{N(z)}, \frac{-b}{N(z)}\right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{N(z)}, \frac{-ab + ba}{N(z)}\right) = (1, 0).$$



## Геометрическая интерпретация $\mathbb{C}$ и тригонометрическая запись

- Рассмотрим декартову систему координат в  $\mathbb{R}^2$ , по оси абсцисс будем откладывать вещественную часть, а по оси ординат — мнимую. Тогда комплексное сопряжение — симметрия относительно оси абсцисс.
- Для числа  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$  тогда  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  — расстояние от начала координат до  $z$ .
- **Аргумент**  $z$  — это направленный угол  $\arg(z) = \varphi$  от оси абсцисс до луча  $Oz$  против часовой стрелки. Вычисляется с точностью до прибавления  $2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Пара  $(r, \varphi)$  однозначно задает точку  $z$ .
- $a = r \cos(\varphi)$ ,  $b = r \sin(\varphi)$ .
- **Тригонометрическая форма записи** комплексного числа:  
 $z = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ .
- Если  $z = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ , то  $|z| = r$ ,  $\arg(z) = \varphi$ .



## Теорема 2

Пусть  $x, y \in \mathbb{C}$ . Тогда  $|xy| = |x||y|$  и  $\arg(xy) = \arg(x) + \arg(y)$ .

**Доказательство.** • Пусть  $x = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ , а  
 $y = (p \cos(\psi), p \sin(\psi))$ . Тогда

$$\begin{aligned} xy = & \\ & (rp(\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)), rp(\cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi))) = \\ & (rp \cos(\varphi + \psi), rp \sin(\varphi + \psi)). \end{aligned}$$

• Следовательно,  $|xy| = rp$  и  $\arg(xy) = \varphi + \psi$ . □

## Теорема 3

**Формула Муавра.** Пусть  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $|z^n| = |z|^n$  и  
 $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$ .

**Доказательство.** Индукция по  $n$ . База  $n = 1$  очевидна.

**Переход**  $n \rightarrow n + 1$ .

• Пусть  $|z| = r$ ,  $\arg(z) = \varphi$  и утверждение доказано для  $n$ , то  
есть,  $|z^n| = r^n$  и  $\arg(z^n) = n\varphi$ .

• По Теореме 2  $|z^{n+1}| = |z||z^n| = r \cdot r^n = r^{n+1}$  и  
 $\arg(z^{n+1}) = \arg(z) + \arg(z^n) = \varphi + n\varphi = (n+1)\varphi$ . □

## Лемма 1

Отображение  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , заданное формулой  $f(a) = (a, 0)$  — мономорфизм.

**Доказательство.** • Очевидно,  $f$  — инъекция.

• Нужно проверить, что это гомоморфизм. Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$\bullet f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b).$$

$$\bullet f(ab) = (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a)f(b). \quad \square$$

• Очевидно,  $\text{Im}(f) \simeq \mathbb{R}$ . Таким образом,  $\mathbb{C}$  имеет подполе  $\text{Im}(f)$ , изоморфное  $\mathbb{R}$ . В дальнейшем мы будем отождествлять каждое вещественное число  $a$  с комплексным  $(a, 0)$ .

• Теперь можно сказать, что для любого  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$  выполнено:

$$z \cdot \bar{z} = N(z) = N(\bar{z}) \text{ (все это равно по } a^2 + b^2) \text{ и}$$

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) = 2\text{Re}(\bar{z}) \text{ (все это равно по } 2a).$$

• Сопряженные комплексные числа  $z, \bar{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  — корни квадратного уравнения с вещественными коэффициентами  $t^2 - 2\text{Re}(z) \cdot t + N(z) = 0$ .

## Извлечение корня из комплексного числа

- Пусть  $a \in \mathbb{C}$  и  $n \in \mathbb{N}$  фиксированы,  $a \neq 0$ . Решим уравнение  $z^n = a$ .
- Будем использовать представление комплексных чисел через модуль и аргумент. Тогда  $a = (r, \varphi)$  (параметры даны) и  $z = (p, \psi)$  (эти параметры мы ищем).
- По формуле Муавра,  $p = \sqrt[n]{r}$ .
- С аргументом сложнее. По формуле Муавра,  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$  (напомним, что аргумент вычисляется с точностью до  $2\pi k$ ). Поделив на  $n$ , получаем

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}. \quad (1)$$

- При  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  в (1) получается  $n$  разных аргументов.
- Каждое число  $k \in \mathbb{Z}$  можно представить в виде  $k = qn + r$ , где  $0 \leq r < n$  (это теорема о делении с остатком). Тогда  $\frac{2\pi k}{n} = \frac{2\pi r}{n} + 2\pi q$ , а это тот же аргумент, что и  $\frac{2\pi r}{n}$ .
- Таким образом, корень  $n$  степени извлекается из  $a \neq 0$  извлекается ровно  $n$  способами.

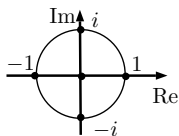
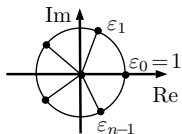


## Корни из 1

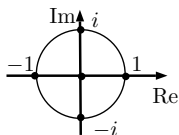
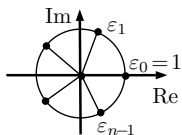
- Отдельно рассмотрим **корни  $n$  степени из 1** — решения уравнения  $z^n = 1$ .
- Из сказанного выше следует, что модуль всех корней из 1 равен 1. Так как  $\arg(1) = 0$ , все различные аргументы считаются по формуле

$$\psi_k = \frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где } k \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (1)$$

- Обозначим их  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$  (корень  $\varepsilon_k$  имеет аргумент  $\psi_k$ ).
- Корни из 1 степени  $n$  лежат на окружности радиуса 1 в вершинах правильного  $n$ -угольника, одна из которых — в 1.
- По формуле Муавра  $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ . Значит, все корни из 1 — это степени  $\varepsilon_1$ .



- На рисунке справа изображены корни степени 4 из 1. Один из них — это  $i = (0, 1)$  ( $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ ).
- Остальные корни из 1 степени 4 — это  $-1 = i^2$ ,  $-i = i^3$  и  $1 = i^4$ .
- Комплексное число  $z = (a, b)$  может быть записано в виде  $z = a + bi$ , который многим из вас более привычен.
- Еще одно часто встречающееся обозначение — комплексное число  $z$  с  $|z| = 1$  и  $\arg(z) = \alpha$  часто записывают в виде  $z = e^{\alpha i}$ .
- Таким образом,  $e^{\alpha i} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ .



Материалы курса можно найти вот здесь:

`logic.pdmi.ras.ru/~dvk/ITMO/Algebra`