Алгебра. Глава 7. Матрицы и определители

Д. В. Карпов

Определение

• Пусть K — коммутативное кольцо, $m, n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $M_{m,n}(K)$ множество матриц с m строками и n столбцами, коэффициенты которых принадлежат кольцу K.

• При $m = n$ (для квадратных матриц $n \times n$) используют обозначение $M_n(K)$ вместо $M_{n,n}(K)$.

• Матрица $A \in M_{m,n}(K)$ имеет вид $\{a_{i,j}\}_{i\in\{1,\dots,m\},j\in\{1,\dots,n\}}$, где все $a_{i,j} \in K$.

Сложение матриц. Для $A, B \in M_{m,n}(K)$ зададим матрицу $A + B \in M_{m,n}(K)$ формулой
$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (a + b)_{i,j} := a_{i,j} + b_{i,j}$.

Умножение матриц. Для $A \in M_{m,n}(K)$ и $B \in M_{n,\ell}(K)$ зададим матрицу $A \cdot B \in M_{m,\ell}(K)$ формулой

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, \ell\} \quad (a \cdot b)_{i,j} := \sum_{s=1}^{n} a_{i,s} b_{s,j}.$$

• Очевидно, сложение матриц ассоциативно и коммутативно (так как сложение поэлементное, свойства наследуются из K).

0-матрица имеет все коэффициенты, равные 0.

Обратная по сложению матрица $-A$ задается формулой
$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (-a)_{i,j} := -a_{i,j}$.

Свойство 1

Умножение матриц ассоциативно.

Доказательство. • Пусть $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,\ell}(K)$, $C \in M_{\ell,k}(K)$.

• Так как умножение в K ассоциативно, имеем:

$$((ab)c)_{s,t} = \sum_{j=1}^{\ell}(ab)_{s,j}c_{j,t} = \sum_{j=1}^{\ell}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{s,i}b_{i,j}\Big)\cdot c_{j,t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell} a_{s,i}b_{i,j}c_{j,t} = \sum_{i=1}^{n} a_{s,i}\cdot\Big(\sum_{j=1}^{\ell} b_{i,j}\cdot c_{j,t}\Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{s,i}\cdot(bc)_{i,t} = (a(bc))_{s,t}.$$

• Таким образом, соответствующие коэффициенты матриц $(AB)C$ и $A(BC)$ одинаковы. $\square$

Определение

Пусть K — кольцо с 1. Определим матрицу $E_n \in M_n(K)$ формулами $a_{i,i} = 1$, $a_{i,j} = 0$ при $i \neq j$.

Свойство 2

Для любой матрицы $B \in M_{n,\ell}(K)$ выполнено $E_n \cdot B = B$.

Для любой матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ выполнено $A \cdot E_n = A$.

• Оба равенства легко проверяются.

Теорема 1

Пусть K — коммутативное кольцо, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $M_n(K)$ — кольцо. Если K — кольцо с 1, то и $M_n(K)$ тоже.

Доказательство. • Сложение коммутативно и ассоциативно, нейтральный элемент (0-матрица) и обратный элемент по сложению определены.

• Умножение ассоциативно (Свойство 1).

• Если K — кольцо с 1, то $E_n \in M_n(K)$ — нейтральный элемент по умножению (Свойство 2).

• Осталось проверить дистрибутивность. Пусть $A, B, C \in M_n(K)$.

$$((a+b)c)_{s,t} = \sum_{i=1}^{n}(a+b)_{s,i}c_{i,t} = \sum_{i=1}^{n}\big(a_{s,i}c_{i,t} + b_{s,i}c_{i,t}\big) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{s,i}c_{i,t} + \sum_{i=1}^{n} b_{s,i}c_{i,t} = (ac)_{s,t} + (bc)_{s,t}.$$

• Таким образом, соответствующие коэффициенты матриц $(A+B)C$ и $AC+BC$ одинаковы, а значит, $(A+B)C = AC+BC$.

• Дистрибутивность $C(A+B) = CA+CB$ проверяется аналогично. $\square$

Определитель

Определение

Пусть K — коммутативное кольцо, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(K)$. Тогда определитель матрицы A — это

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)},$$

где $\mathrm{sign}(\sigma) := (-1)^{I(\sigma)}$ — знак подстановки σ.

• Строки матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ обозначаются $A_1, \dots, A_m$, а столбцы — $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$.

• Столбцы и строки удобно рассматривать как вектора из линейных пространств K^n и K^m соответственно.

• Определитель квадратной матрицы $A \in M_n(K)$ удобно рассматривать как функцию от от n аргументов — строк этой матрицы: $\det(A_1, \dots, A_n)$.

• Можно рассматривать определитель и как функцию от столбцов матрицы: $\det(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$.

Элементарные преобразования матриц

(I) Поменять местами две строки.

(II) К одной строке прибавить другую, умноженную на $\lambda \in K$.

(III) Умножить строку на $\lambda \in K$, отличное от 0.

• Аналогичные элементарные преобразования можно выполнять и со столбцами матриц.

Лемма 1

Все три элементарных типа преобразования обратимы, то есть имеют обратные элементарные преобразования.

Доказательство. • Элементарное преобразование типа (I) само себе обратно.

• Рассмотрим элементарное преобразование типа (II), пусть мы к i-й строке прибавили j-ю, умноженную на λ.

• Тогда обратное преобразование — прибавить к i-й строке j-ю, умноженную на $-\lambda$.

• Наконец, обратное преобразование к умножению строки на $\lambda \neq 0$ — умножить ее же на λ^{-1}. $\square$

Свойства определителя

Свойство 1

При элементарном преобразовании типа I определитель меняет знак.

Доказательство. • Пусть $A, A' \in M_n(K)$, причем A' получена из A перестановкой i и j строк ($A'_i = A_j$, $A'_j = A_i$, остальные строки у матриц совпадают).

• Для $\sigma \in S_n$ положим $\sigma' := \sigma \cdot (ij)$. Понятно, что σ пробегает все значения из S_n, если и только если σ' пробегает все значения из S_n. По Лемме 6.8, $\mathrm{sign}(\sigma') = -\mathrm{sign}(\sigma)$. Тогда

$$\det(A') = \sum_{\sigma' \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma') \cdot a'_{1,\sigma'(1)} \dots a'_{i,\sigma'(i)} \dots a'_{j,\sigma'(j)} \dots a'_{n,\sigma'(n)} =$$

$$\sum_{\sigma' \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma') \cdot a_{1,\sigma'(1)} \dots a_{j,\sigma'(i)} \dots a_{i,\sigma'(j)} \dots a_{n,\sigma'(n)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma') \cdot a_{1,\sigma(1)} \dots a_{i,\sigma(i)} \dots a_{j,\sigma(j)} \dots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$-\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \dots a_{i,\sigma(i)} \dots a_{j,\sigma(j)} \dots a_{n,\sigma(n)} = -\det(A). \quad \square$$

Свойство 2

Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен 0.

Доказательство. Пусть $A_i = A_j$. Тогда перемена местами этих двух строк не меняет матрицу, но должна по Свойству 1 менять знак определителя. $\square$

Свойство 3

Пусть $A, A' \in M_n(K)$, причем A' получена из A умножением i строки на $\lambda \in K$ ($A'_i = \lambda A_i$, остальные строки у матриц совпадают). Тогда $\det(A') = \lambda \det(A)$.

Доказательство.

$$\det(A') = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a'_{1,\sigma(1)} \dots a'_{i,\sigma(i)} \dots a'_{n,\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \dots (\lambda \cdot a_{i,\sigma(i)}) \dots a_{n,\sigma(n)} = \lambda \det(A). \quad \square$$

Свойство 4

Определитель матрицы с нулевой строкой равен 0.

Свойство 5

(Разложение определителя по строке.) Пусть $A, A', A'' \in M_n(K)$, причем эти матрицы совпадают во всех строках, кроме i-й, а $A_i = A'_i + A''_i$. Тогда $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$.

Доказательство.

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)}\dots a_{i,\sigma(i)}\dots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)}\dots (a'_{i,\sigma(i)} + a''_{i,\sigma(i)})\dots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\big(a'_{1,\sigma(1)}\dots a'_{i,\sigma(i)}a'_{n,\sigma(n)} + a''_{1,\sigma(1)}\dots a''_{i,\sigma(i)}a''_{n,\sigma(n)}\big) =$$

$$\det(A') + \det(A'') \qquad \square$$

Свойство 6

При элементарном преобразовании типа II определитель сохраняется.

Доказательство. • Пусть $\lambda \in K$, $A, A' \in M_n(K)$, причем A' получена из A преобразованием i строки: $A'_i = A_i + \lambda A_j$ (остальные строки у матриц совпадают, $j \neq i$).

• Пусть матрица A^* совпадает с A во всех строках, кроме i, а $A^*_i = \lambda A_j$.

• По Свойствам 3 и 2

$$\det(A^*) = \det(A^*_1, \dots, A^*_i, \dots, A^*_j, \dots, A^*_n) = \det(A_1, \dots, \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) = 0.$$

• По Свойству 5

$$det(A') = \det(A'_1, \dots, A'_i, \dots, A'_j, \dots, A'_n) = \det(A_1, \dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) =$$
$$\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) = \det(A) + \det(A^*) = \det(A). \qquad \square$$

Определение

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$. Транспонированная матрица $A^T \in M_{n,m}(K)$ — это матрица с элементами $a^T_{i,j} := a_{j,i}$ (для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$

Теорема 2

Пусть $A \in M_n(K)$. *Тогда* $\det(A^T) = \det(A)$.

Доказательство. • По определению

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a^T_{1,\sigma(1)} \dots a^T_{n,\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \qquad (*)$$

• Чтобы посчитать $\det(A)$, нужно сложить те же произведения, что в $(*)$, вот только с какими знаками?

• Нужно переупорядочить $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$ так, чтобы первые индексы шли в порядке $1, 2, \dots, n$ (а не $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$).

• Это означает, что к первым индексам нужно применить подстановку σ^{-1}, она же применится ко вторым индексам, и мы получим $a_{1,\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$.

• Понятно, что σ пробегает все значения из S_n, если и только если σ^{-1} пробегает все значения из S_n.

• Так как по Теореме 6.3, $\mathrm{sign}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sign}(\sigma)$, мы можем продолжить $(*)$:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\cdot a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)}\dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} =$$

$$\sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma^{-1})\cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)}\dots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \det(A). \qquad \square$$

• Можно определить аналоги элементарных преобразований строк для столбцов.

• По Теореме 2 понятно, что аналоги всех свойств $1-6$ определителя верны и для столбцов вместо строк.

Минор и алгебраическое дополнение

Определение

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$ и $k \leq \min(m, n)$.

• Выделим строки с номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и столбцы с номерами $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

• На их пересечении находится k^2 элементов, составим из них матрицу, не меняя порядка строк и столбцов. Определитель этой матрицы Δ называется *минором порядка k*.

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$, $k < n$, а Δ — минор со строками $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и столбцами $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

• Вычеркнем указанные строки и столбцы, после чего в остальных $n - k$ строках и $n - k$ столбцах аналогично определим минор Δ' порядка $n - k$ — это *дополнительный минор* для Δ.

• Алгебраическое дополнение минора Δ — это $A_\Delta = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\Delta'$.

Теорема Лапласа

Теорема 3

Пусть $A \in M_n(K)$, $k < n$, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$. *Тогда* $\det(A)$ *равен сумме* $\Delta \cdot A_\Delta$ *по всем минорам* Δ *в строках* $i_1, i_2, \dots, i_k$ *(при всех возможных выборах* k *столбцов).*

Доказательство.

Утверждение 1

Сумма $\Delta \cdot A_\Delta$ *по всем минорам* Δ *в строках* $i_1, \dots, i_k$ *— это в точности сумма (с некоторыми знаками) произведений, входящих в* $\det(A)$.

Доказательство. • Рассмотрим $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}$ и конкретное произведение $a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}$, входящее в определитель.

• Для каждой из строк i_1, i_2, ..., i_k отметим столбец с номером $\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_k)$ соответственно.

• Мы получили k столбцов, в которых расположены перемножаемые элементы, упорядочим их по возрастанию — пусть получится $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

• Обозначим через Δ минор со строками $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцами $j_1, j_2, \dots, j_k$. Тогда произведение $a_{i_1,\sigma(i_1)} \cdot \dots \cdot a_{i_k,\sigma(i_k)}$ входит в минор Δ (с некоторым знаком).

• Элементы вида $a_{s,\sigma(s)}$ при $1 \le s \le n$, $s \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ попадут не в столбцы с номерами $j_1, \dots, j_k$, следовательно, произведение этих $n-k$ элементов войдет в дополнительный минор Δ', а значит, и в алгебраическое дополнение A_Δ (опять же, с некоторым знаком).

• Таким образом, $a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}$ входит в произведение $\Delta \cdot A_\Delta$ для столбцов $j_1, j_2, \dots, j_k$ и не входит в другие аналогичные слагаемые.

• Наоборот, рассмотрим минор Δ в столбцах $j_1, \dots, j_k$ и любое произведение из $\Delta \cdot A_\Delta$.

• В этом произведении в каждой строке взято ровно по одному элементу матрицы (для строк $i_1, \dots, i_k$ — в миноре Δ, для остальных строк — в A_Δ), в каждом столбце взято тоже ровно по одному элементу матрицы (для столбцов $j_1, \dots, j_k$ — в миноре Δ, для остальных столбцов — в A_Δ).

• Значит, это произведение с некоторым знаком входит в $\det(A)$ и мы получаем обратное соответствие. $\square$

• Таким образом, достаточно доказать:

Утверждение 2

Для каждого минора Δ *в строках* $i_1, \dots, i_k$ *все произведения из* $\Delta \cdot A_\Delta$ *имеют такой же знак, какой они имеют в* $\det(A)$.

Доказательство. • Рассмотрим конкретный минор Δ в строках $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и столбцах $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

• Для удобства мы переделаем элементарными преобразованиями матрицу A в матрицу B так, чтобы минор Δ попал в верхний левый угол, и при этом порядок строк и порядок столбцов из Δ не поменялся, а также порядок остальных строк и порядок остальных столбцов не поменялся.

• Сначала займемся строками: строка i_1 всплывает наверх (на место строки 1), меняясь местами последовательно со строками $i_1 - 1, \dots, 2, 1$ — всего $i_1 - 1$ обмен.

• Потом аналогично строка i_2 всплывает на 2 место, делая $i_2 - 2$ обмена, и так далее, строка i_k всплывает на k место за $i_k - k$ обменов.

• Аналогично, столбцы $j_1, \dots, j_k$ двигаются налево, делая $j_1 - 1, \dots, j_k - k$ обменов.

• В итоге получилась матрица B, а каждое из выполненных элементарных преобразований меняло знак определителя, поэтому,

$\det(B) = (-1)^{(i_1-1)+\dots+(i_k-k)+(j_1-1)+\dots+(j_k-k)}\det(A) = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\det(A)$.

• В этой матрице минор Δ занимает левый верхний угол, а его дополнительный минор — по построению, это по-прежнему Δ' — в правом нижнем углу.

• Поэтому, алгебраическое дополнение Δ в матрице B считается как

$B_\Delta = (-1)^{1+\dots+k+1+\dots+k}\Delta' = \Delta' = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}A_\Delta$.

• Итак, $\det B = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\det(A)$ и $\Delta \cdot B_\Delta = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\Delta \cdot A_\Delta$.

• Поэтому, нам достаточно доказать Утверждение 2 для матрицы B.

- Итак, рассмотрим $\Delta \cdot B_\Delta = \Delta \cdot \Delta'$.
- Как мы знаем, $\Delta = \sum_{\tau \in S_k} (-1)^{I(\tau)} b_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot b_{k,\tau(k)}$.
- С учетом того, что строки и столбцы в Δ' имеют в B номера $k+1, \ldots, n = k + (n-k)$, этот определитель можно переписать как

$\Delta' = \sum_{\tau' \in S_{n-k}} (-1)^{I(\tau')} b_{k+1,k+\tau'(1)} \cdot \ldots \cdot b_{k+(n-k),k+\tau'(n-k)}$.

- Для конкретных τ и τ' произведение

$b_{1,\tau(1)} \cdot \ldots \cdot b_{k,\tau(k)} b_{k+1,k+\tau'(1)} \cdot \ldots \cdot b_{k+(n-k),k+\tau'(n-k)}$

входит в $\det(B)$ со знаком $(-1)^{I(\sigma)}$, где σ — подстановка, переставляющая $1, \ldots, k$ как τ и переставляющая $k+1, \ldots, n = k + (n-k)$ как $k + \tau'$.

- Но инверсий между блоками из первых k чисел и последних $n-k$ чисел в σ нет (первые k чисел не превосходят k, а все следующие больше k), поэтому, $I(\sigma) = I(\tau) + I(\tau')$, что нам и нужно:

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} b_{1,\sigma(1)} \ldots b_{k,\sigma(k)} b_{k+1,\sigma(k+1)} \ldots b_{n,k+\sigma(n)}. \quad \square$$

- Из Утверждения 1 и Утверждения 2 следует Теорема. $\square$

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$. Для $i, j \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через $A_{i,j}$ алгебраическое дополнение элемента $a_{i,j}$ (как минора порядка 1). Это минор, поученный из A вычеркиванием i строки и j столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Следствие 1

Пусть $A \in M_n(K)$, $s, t \in \{1, \dots, n\}$, $s \neq t$. Тогда

1) $$\sum_{i=1}^{n} a_{s,i} A_{s,i} = \det(A);$$

2) $$\sum_{i=1}^{n} a_{t,i} A_{s,i} = 0.$$

Доказательство. 1) Теорема 3 для разложения по s строке.

2) • Пусть A' получена из A заменой s строки на t (то есть $A'_s = A_t$ и $A'_j = A_j$ при $j \neq s$).

• Тогда $A'_{s,i} = A_{s,i}$ и $a'_{s,i} = a_{t,i}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

• Так как матрица A' имеет две одинаковые строки и по пункту 1 имеем

$$0 = \det(A') = \sum_{i=1}^{n} a'_{s,i} A'_{s,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{t,i} A_{s,i}.$$

□

- Утверждения, аналогичные Теореме 3 и Следствию 1, верны и для столбцов вместо строк (транспонирование матрицы меняет местами строки и столбцы, но не меняет определитель).
- Таким образом, определитель можно раскладывать как по строкам, так и по столбцам.

Ступенчатые матрицы

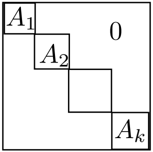
Определение

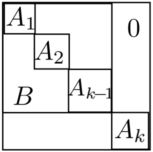
Пусть $A_1, \dots, A_k$ — квадратные матрицы, $A_i \in M_{n_i}(K)$, $n = n_1 + \dots + n_k$, $A \in M_n(K)$.

• Будем говорить, что $A \in M^+(A_1, \dots, A_k)$, если в матрице A по диагонали расположены квадратные блоки $A_1, \dots, A_k$, а все коэффициенты сверху от них равны 0.

• Будем говорить, что $A \in M^-(A_1, \dots, A_k)$, если в матрице A по диагонали расположены квадратные блоки $A_1, \dots, A_k$, а все коэффициенты снизу от них равны 0.

• Матрицы из
$M(A_1, \dots, A_k) := M^+(A_1, \dots, A_k) \cup M^-(A_1, \dots, A_k)$
называются ступечатыми.





Теорема 4

Пусть $A \in M(A_1, \dots, A_k)$*. Тогда* $\det(A) = \prod\limits_{i=1}^{k} \det(A_i)$.

Доказательство. • Индукция по k. База для $k = 1$ очевидна.

Переход $k-1 \to k$. Пусть $k \geq 2$, а матрица $B \in M(A_1, \dots, A_{k-1})$ — как на рис. справа. Тогда $A \in M(B, A_k)$.

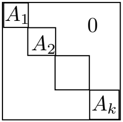
• Пусть $m = n_1 + \dots + n_{k-1}$. Тогда применим теорему Лапласа для разложения матрицы A по строкам $1, \dots, m$.

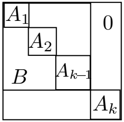
• Так как определитель матрицы с нулевым столбцом равен 0, в этих строках есть только один ненулевой минор порядка m — это $\det(B)$.

• Тогда по Теореме 3 и индукционному предположению

$$\det(A) = \det(B)\det(A_k) = \Big(\prod_{i=1}^{k-1} \det(A_i)\Big) \cdot \det(A_k) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_i).$$

□





Определитель произведения матриц

Теорема 5

Пусть $A, B \in M_n(K)$. *Тогда* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Доказательство. • Рассмотрим ступенчатую матрицу $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E_n & B \end{pmatrix}$. (Здесь $-E_n$ — матрица с -1 по главной диагонали и остальными 0.)

• Тогда $C \in M^+(A, B)$ и $\det(C) = \det(A)\det(B)$ по Теореме 4.

• Элементарными преобразованиями столбцов типа II мы переведем C в матрицу $D \in M_{2n}(K)$ так, чтобы в правой нижней четверти B заменилась на нулевую матрицу.

• Для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ столбец $C^{(n+k)}$ имеет n нулей, а далее располагается столбец $B^{(k)}$.

• Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ столбец $C^{(i)}$ сверху содержит $A^{(i)}$, а нижние n его элементов — это -1 на позиции $n + i$ и остальные 0.

• Для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ проделаем следующие операции

• Прибавим $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,k} C^{(i)}$ к столбцу $C^{(n+k)}$ (каждое прибавление — элементарное преобразование типа 2, не меняет определитель).

• В результате из $C^{(n+k)}$ получился столбец $D^{(n+k)}$, нижние k элементов которого — нули. (элемент $c_{n+s,n+k} = b_{s,k}$ обнуляется при прибавлении $b_{s,k} C^{(s)}$ и не меняется при остальных преобразованиях.)

• Верхние k элементов столбца $C^{(n+k)}$ были нулями. В результате преобразований для каждого $s \in \{1, \dots, n\}$ получилось

$$c_{s,n+k} = \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} \cdot b_{i,k} = (ab)_{s,k}.$$

• Таким образом, $D = \begin{pmatrix} A & AB \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$.

• Применим к D n элементарных преобразований столбцов типа I: поменяем местами столбцы $D^{(k)}$ и $D^{(n+k)}$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$.

• Получится матрица
$D^* = \begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & -E_n \end{pmatrix} \in M^-(AB, E_n)$.

• Так как каждое элементарное преобразование типа I меняет знак определителя и по Теореме 4 имеем:

$$\det(D^*) = \det(AB)\det(-E_n) = (-1)^n \det(AB) \quad \text{и}$$

$$\det(D^*) = (-1)^n \det(D) = (-1)^n \det(C) = (-1)^n \det(A)\det(B),$$

откуда следует, что $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. $\square$

• Далее везде K — поле.

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$. Взаимная матрица $\tilde{A} \in M_n(K)$ задается формулой $\tilde{a}_{i,j} := A_{j,i}$ для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

• Для $\lambda \in K$ и $A \in M_n(K)$ через λA обозначается матрица, полученная из A умножением всех коэффициентов на λ.

Лемма 2

Для любой матрицы $A \in M_n(K)$ выполнено $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$.

Доказательство.

$$(a \cdot \tilde{a})_{s,t} = \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} \cdot \tilde{a}_{i,t} = \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} \cdot A_{t,i} = \begin{cases} \det(A), & \text{при } s = t \\ 0, & \text{при } s \neq t \end{cases}$$

по Следствию 1. Значит, $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot E_n$.

$$(\tilde{a} \cdot a)_{s,t} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{s,i} \cdot a_{i,t} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,t} \cdot A_{i,s} = \begin{cases} \det(A), & \text{при } s = t \\ 0, & \text{при } s \neq t \end{cases}$$

по аналогу Следствия 1 для столбцов. Значит, $\tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$.

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$.

• Матрица A — обратимая справа, если существует такая $B \in M_n(K)$, что $AB = E_n$.

• Матрица A — обратимая слева, если существует такая $C \in M_n(K)$, что $CA = E_n$.

• Обратимая и слева, и справа матрица называется обратимой, или невырожденной. Остальные матрицы — необратимые, или вырожденной.

• Если $B \in M_n(K)$ такова, что $AB = BA = E_n$, то B называется обратной к A и применяется обозначение $A^{-1} = B$.

• Если обратная матрица к A существует, то она единственна: мы знаем, что обратный элемент по умножению к обатимому элементу любого кольца ровно один.

Теорема 6

1) *Обратимые матрицы — это в точности матрицы, имеющие ненулевой определитель.*

2) *Обратимая слева (или справа) матрица обратима.*

Доказательство. 1) • Пусть $A, B \in M_n(K)$, $AB = E_n$. Тогда по Теореме 5

$$\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(E_n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} det(A) \neq 0, \\ \det(B) \neq 0. \end{cases}$$

• Таким образом, матрица с нулевым определителем не может быть обратимой ни слева, ни справа.

• Наоборот, пусть $\det(A) \neq 0$, а $B = \det(A)^{-1} \cdot \tilde{A}$.

• По Лемме 2 мы имеем $AB = BA = E_n$. Значит, A обратима.

2) Выше доказано, что обратимая слева или справа матрица имеет ненулевой определитель, а значит, она обратима. $\square$

Строчный и столбцовый ранг матрицы

Определение

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$.

• Строчный ранг матрицы A — это $r_s(A) := \dim(\mathrm{Lin}(A_1, \dots, A_m))$.

• Столбцовый ранг матрицы A — это $r^s(A) := \dim(\mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}))$.

• Наша цель — доказать, что $r_s(A) = r^s(A)$ для любой матрицы A. Это число называется рангом A и обозначается через $\mathrm{rk}(A)$.

Лемма 3

1) *Строчный ранг сохраняется при элементарных преобразованиях строк.*

2) *Столбцовый ранг сохраняется при элементарных преобразованиях столбцов.*

Доказательство. • Утверждения аналогичны, достаточно доказать первое.

• Пусть $A, A' \in M_{n,m}$ получена из A элементарным преобразованием строк. Пусть $L = \mathrm{Lin}(A_1, \dots, A_n)$ и $L' = \mathrm{Lin}(A'_1, \dots, A'_n)$.

• Достаточно доказать, что $L = L'$, тогда $r_s(A) = \dim(L) = \dim(L') = r_s(A')$.

• Если это преобразование типа I, то строки остаются теми же (просто в другом порядке), значит, $L = L'$.

• Пусть это преобразование типа III, скажем, $A'_i = \lambda A_i$ для $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ а остальные строки матриц совпадают.

• Тогда $A'_i = \lambda A_i \in L$, значит, $L' \subset L$.

• Так как элементарные преобразования обратимы, аналогично $L \subset L'$, а значит, $L = L'$.

• Пусть это преобразование типа II, скажем, $A'_i = A_i + \lambda A_j$ для $\lambda \in K$, а остальные строки матриц совпадают.

• Тогда $A'_i = A_i + \lambda A_j \in L$, значит, $L' \subset L$.

• Так как элементарные преобразования обратимы, аналогично $L \subset L'$, а значит, $L = L'$. $\square$

Лемма 4

$A, B \in M_{m,n}(K)$, причем B получена из A элементарным преобразованием строк, $1 \le s_1 < \dots < s_k \le n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$. Тогда
$\lambda_1 A^{(s_1)} + \dots + \lambda_k A^{(s_k)} = 0 \iff \lambda_1 B^{(s_1)} + \dots + \lambda_k B^{(s_k)} = 0.$

Доказательство. • Положим $c_{i,j} := a_{i,s_j}$ и $d_{i,j} := b_{i,s_j}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$. Рассмотрим ОСЛУ

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{1,1}y_1 + \dots + c_{1,k}y_k = 0 \\ \dots \\ c_{m,1}y_1 + \dots + c_{m,k}y_k = 0 \end{array} \right. \quad (*) \qquad \text{и} \qquad \left\{ \begin{array}{l} d_{1,1}y_1 + \dots + d_{1,k}y_k = 0 \\ \dots \\ d_{m,1}y_1 + \dots + d_{m,k}y_k = 0 \end{array} \right. \quad (**).$$

• Так как B получена из A элементарным преобразованием строк, ОСЛУ $(**)$ получена из $(*)$ элементарным преобразованием.

• По Лемме 5.2, решения ОСЛУ $(*)$ и $(**)$ — одни и те же.

• Для завершения доказательства достаточно отметить, что $\lambda_1 A^{(s_1)} + \dots + \lambda_k A^{(s_k)} = 0 \iff \quad y_1 = \lambda_1, \dots, y_k = \lambda_k$ — решение $(*)$ и $\lambda_1 B^{(s_1)} + \dots + \lambda_k B^{(s_k)} = 0 \iff \quad y_1 = \lambda_1, \dots, y_k = \lambda_k$ — решение $(**)$. $\square$

Лемма 5

1) *Столбцовый ранг сохраняется при элементарных преобразованиях строк.*

2) *Строчный ранг сохраняется при элементарных преобразованиях столбцов.*

Доказательство. • Утверждения аналогичны, достаточно доказать первое.

• Пусть $A, B \in M_{m,n}(K)$, причем B получена из A элементарным преобразованием строк.

• Пусть $L = \mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ и $L' = \mathrm{Lin}(B^{(1)}, \dots, B^{(n)})$.

• По Теореме 5.1 из $A^{(1)}$, …, $A^{(n)}$ можно выбрать базис L — пусть это $A^{(s_1)}$, …, $A^{(s_k)}$. Тогда $r^{(s)}(A) = k$.

• Тогда и $B^{(s_1)}$, …, $B^{(s_k)}$ ЛНЗ (если $\lambda_1 B^{(s_1)} + \dots + \lambda_k B^{(s_k)} = 0$, то по Лемме 4 и $\lambda_1 A^{(s_1)} + \dots + \lambda_k A^{(s_k)} = 0$, откуда $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$).

• Значит, $r^{(s)}(B) \ge k = r^{(s)}(A)$.

• Так как элементарные преобразования обратимы, аналогично доказывается, что $r^{(s)}(A) \ge r^{(s)}(B)$.

Определение

Для $r \leq \min(m, n)$ пусть $E^r \in M_{m,n}(K)$ — матрица, в которой $e^r_{i,i} = 1$ для всех $i \in \{1, \dots, r\}$, а все остальные коэффициенты матрицы равны 0.

Лемма 6

Любую матрицу $A \in M_{m,n}(K)$ можно привести элементарными преобразованиями к матрице E^r для некоторого $r \leq \min(m, n)$.

Доказательство. • Мы будем менять матрицу, не переименовывая ее.

• Если все элементы матрицы равны 0, то $A = E^0$.

• Если в матрице есть ненулевой элемент, то можно считать, что $a_{1,1} \neq 0$ (иначе поменяем местами строки и столбцы так, чтобы ненулевой элемент оказался на этой позиции).

• Далее поделим 1 строку на $a_{1,1}$, получим новую матрицу, в которой $a_{1,1} = 1$.

• Для всех $i \in \{2, \dots, m\}$ заменим строку A_i на $A_i - a_{i,1}A_1$. В результате этих элементарных преобразований в левом столбце все элементы, кроме $a_{1,1} = 1$ будут равны 0.

• Теперь для всех $j \in \{2, \dots, n\}$ заменим столбец $A^{(j)}$ на $A^{(j)} - a_{1,j}A^{(1)}$. В результате этих элементарных преобразований в первой строке все элементы, кроме $a_{1,1} = 1$ будут равны 0. Элементы левого столбца не изменятся.

• Теперь рассмотрим подматрицу A', полученную удалением 1 строки и 1 столбца. Аналогичными действиями меньшую матрицу A' можно привести к виду $E^{r'}$.

• Выполним те же преобразования, что в матрице A', со столбцами $2 - n$ и строками $2 - m$ матрицы A. В результате 1 строка и 1 столбец не изменятся, и мы получим матрицу $E^{r'+1}$. $\square$

Теорема 7

Для любой матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ выполнено $r_s(A) = r^s(A)$.

Доказательство. • По Лемме 6 для некоторого $r \le \min(m, n)$ можно элементарными преобразованиями привести A к E^r.

• Очевидно, $r_s(E^r) = r^s(E^r) = r$.

• По Леммам 3 и 5 мы имеем $r_s(A) = r_s(E^r) = r = r^s(E^r) = r^s(A)$. □

• Теперь мы знаем, что ранг матрицы определен корректно, и его можно вычислять как размерность пространства строк этой матрицы, так и как размерность пространства ее столбцов.

• Если $A \in M_{m,n}(K)$, то $\mathrm{rk}(A) \le m$ и $\mathrm{rk}(A) \le n$.

Лемма 7

При элементарных преобразованиях наибольший порядок ненулевого минора матрицы не изменяется.

Доказательство. • Пусть $A, A' \in M_{m,n}(K)$, причем A' получена из A элементарным преобразованием.

• Можно считать, что это преобразование строк (иначе транспонируем матрицу, те же самые миноры останутся ненулевыми по Теореме 2, а строки поменяются местами со столбцами).

Утверждение

Если у матрицы A нет ненулевых миноров порядка k, то и у матрицы A' нет ненулевых миноров порядка k.

Доказательство. • Пусть Δ' — ненулевой минор порядка k матрицы A', а Δ — минор A в тех же строках и столбцах. По условию $\Delta = 0$.

• Тогда $\Delta' \neq \Delta$ не является минором A, значит, содержит хотя бы одну из строк над которыми произведено элементарное преобразование.

• Рассмотрим три случая.

Случай 1: элементарное преобразование имеет тип III.

• Пусть строка матрицы A умножена на $\lambda \in K$. Тогда $\Delta' = \lambda\Delta = 0$ по Свойству 3 определителя, противоречие.

Случай 2: элементарное преобразование имеет тип I.

• Пусть, скажем, $A'_i = A_j$ и $A'_j = A_i$.

• Если минор Δ' содержит части обеих строк A'_i и A'_j, то в миноре Δ они просто стоят в обратном порядке и $\Delta' = \Delta = 0$ по Свойству 1 определителя, противоречие.

• Пусть Δ' содержит часть A'_i, но не содержит часть A'_j.

• Так как часть A'_i — это аналогичная часть A_j, в этом случае матрица A также имеет минор Δ^* с точно такими же строками и столбцами (нужно вместо строки A_i взять A_j), возможно, расставленными в другом порядке.

• Тогда $\Delta' = \pm\Delta^* = 0$, противоречие.

Случай 3: элементарное преобразование имеет тип II.

• Пусть, скажем, $A'_i = A_i + \lambda A_j$.

• Пусть $\Delta' = \det(B')$, $\Delta = \det(B)$, где $B, B' \in M_k(K)$ — соответствующие матрицы. Тогда эти матрицы содержат части строк A_i и A'_i соответственно.

• Обозначим через B^* матрицу, полученную из B заменой части A_i на соответствующую часть A_j.

• Разложим $\det(B)$ по строке A'_i (точнее, ее части). По Свойству 5 определителя

$\Delta' = \det(B') = \det(B) + \lambda \det(B^*) = \lambda \det(B^*)$.

• Если B содержит части строки A_j, то B^* содержит две одинаковые строки, тогда по Свойству 2 определителя $\det(B^*) = 0$, а значит, и $\Delta' = 0$, противоречие.

• Пусть B не содержит части строки A_j. Тогда рассмотрим подматрицу B^{**} матрицы A, в которой выбраны все строки матрицы B, кроме A_i, и строка A_j, а столбцы — те же, что в B.

• По условию, $\det(B^{**}) = 0$.

• Так как B^* получается из B^{**} перестановкой строк, $\det(B^*) = \pm \det(B^{**}) = 0$, откуда следует, что $\Delta' = 0$, противоречие. $\square$

• Вернемся к доказательству Леммы 7.

• Так как обе матрицы A и A' получены друг из друга элементарным преобразованием, наибольший порядок ненулевого минора в них — одинаковый. $\square$

Теорема 8

Для любой матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ ее ранг равен наибольшему порядку ненулевого минора в A.

Доказательство. • По Лемме 6 матрицу A можно привести элементарными преобразованиями к матрице E^r для некоторого $r \le \min(m, n)$.

• Тогда $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(E^r) = r$.

• С другой стороны, наибольший порядок ненулевого минора в E^r — это, очевидно, r. По Лемме 7, это верно и для A. □

Следствие 2

Матрица $A \in M_n(K)$ обратимая, если и только если $\mathrm{rk}(A) = n$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Если A — обратимая, то $\det(A) \ne 0$ по Теореме 6. Значит, максимальный порядок ненулевого минора равен n, тогда и $\mathrm{rk}(A) = n$ по Теореме 8.

$\Leftarrow$. Если $\mathrm{rk}(A) = n$, то по Теореме 8 матрица $A \in M_n(K)$ имеет ненулевой минор порядка n. Значит, $\det(A) \ne 0$ и по Теореме 6 матрица A обратима. □

Матрицы элементарных преобразований

- Пусть $A \in M_{m,n}(K)$.
- Элементарные преобразования матрицы A можно представить в виде умножения A на матрицы специального вида.

Элементарное преобразование I типа

- Пусть $s, t \in \{1, \dots, m\}$, $s \neq t$. Рассмотрим матрицу $E_m^{s,t} \in M_m(K)$, полученную из E_m переменой позиций двух 1:

$e^{s,t}(s,t) = e^{s,t}(t,s) = 1, \quad e^{s,t}(i,i) = 1$ при $i \notin \{s,t\}$, остальные коэффициенты равны 0.

- Нетрудно проверить, что $E_m^{s,t} \cdot A$ — это матрица, полученная из A перестановкой s и t строк.
- Наоборот, Пусть $s, t \in \{1, \dots, n\}$, определим аналогично матрицу $E_n^{s,t} \in M_n(K)$.
- Тогда $A \cdot E_n^{s,t}$ — это матрица, полученная из A перестановкой s и t столбцов.

Элементарное преобразование II типа

• Пусть $s,t \in \{1,\dots,m\}$, $s \neq t$, $\lambda \in K$. Рассмотрим матрицу $E_m^{s,t,\lambda} \in M_m(K)$, полученную из E_m изменением одного 0 на λ:

$e^{s,t,\lambda}(s,t) = \lambda$ (остальные коэффициенты как в единичной матрице E_m).

• Нетрудно проверить, что $A' = E_m^{s,t,\lambda} \cdot A$ — это матрица, полученная из A преобразованием II типа $A'_s = A_s + \lambda A_t$ (остальные строки в матрицах A и A' совпадают).

• Наоборот, Пусть $s,t \in \{1,\dots,n\}$, определим аналогично матрицу $E_n^{s,t,\lambda} \in M_n(K)$.

• Тогда $B = A \cdot E_n^{s,t,\lambda}$ — это матрица, полученная из A преобразованием II типа $B^{(s)} = A^{(s)} + \lambda A^{(t)}$ (остальные строки в матрицах A и B совпадают).

Элементарное преобразование III типа

• Пусть $s \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Рассмотрим матрицу $E_m^{s,\lambda} \in M_m(K)$, полученную из E_m изменением одной 0 на λ:

$e^{s,\lambda}(s, s) = \lambda$ (остальные коэффициенты как в единичной матрице E_m).

• Нетрудно проверить, что $A' = E_m^{s,\lambda} \cdot A$ — это матрица, полученная из A умножением s строки на λ.

• Наоборот, Пусть $s \in \{1, \dots, n\}$, определим аналогично матрицу $E_n^{s,\lambda} \in M_n(K)$.

• Тогда $A' = A \cdot E_n^{s,\lambda}$ — это матрица, полученная из A умножением s столбца на λ.

Алгоритм поиска обратной матрицы

• Пусть $A \in M_n(K)$. По Лемме 6 матрицу A можно привести элементарными преобразованиями к виду E^r, где $r \le n$.

• Если $r < n$, то $\mathrm{rk}(A) = r < n$ и матрица A по Следствию 2 необратима.

• Пусть $r = n$, произведены элементарные преобразования строк с матрицами $P_1, \dots, P_k$ (в указанном порядке) и элементарные преобразования столбцов с матрицами $Q_1, \dots, Q_\ell$ (в указанном порядке). Тогда

$$P_k \dots P_1 \cdot A \cdot Q_1 \dots Q_\ell = E_n \Rightarrow$$
$$A = P_1^{-1} \dots P_k^{-1} \cdot E_n \cdot Q_\ell^{-1} \dots Q_1^{-1} \Rightarrow A^{-1} = Q_1 \dots Q_\ell \cdot P_k \dots P_1.$$

• Каждую матрицу можно элементарными преобразованиями строк привести к ступенчатому виду: пусть $s_1 < s_2 < \dots < s_k$, тогда i строка матрицы для $i \in \{1, \dots, k\}$ будет иметь вид:

$a_{i,j} = 0$ при $j < s_i$, $\quad a_{i,s_i} = 1$, далее произвольные коэффициенты;

строки с номерами более k будут нулевыми. (Алгоритм для СЛУ из Леммы 5.3 легко применяется для матриц.)

• Если $A \in M_n(K)$ — невырожденная матрица, то $k = n$ и $s_i = i$ для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ (иначе A имеет нулевую строку, а значит, $\det(A) = 0$, что не так).

• Значит, A приводится элементарными преобразованиями строк к *верхне-треугольному* виду: на главной диагонали 1, под ней 0.

• Теперь элементарными преобразованиями строк несложно обнулить верхний треугольник (все элементы над главной диагональю).

• Таким образом, мы приведем A к единичной матрице элементарными преобразованиями только строк, что бывает удобно.

• Соответственно, формула обратной матрицы будет иметь вид $\quad A^{-1} = P_k \dots P_1$.

Матричная запись СЛУ

• Пусть K — поле, $a_{i,j} \in K$ (где $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$) Рассмотрим СЛУ с неизвестными $x_1, \dots, x_m$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2, \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n. \end{cases} \quad (*)$$

Определение

• Матрица системы $(*)$ — это матрица $A \in M_{n,m}(K)$ с коэффициентами $a_{i,j}$. Положим $X = (x_1, \dots, x_m)^T$ — столбец неизвестных, $B = (b_1, \dots, b_n)^T$.

• $AX = B$ — матричная запись системы $(*)$.

• $(A|B)$ — Расширенная матрица системы $(*)$ (справа добавлен столбец B).

• Система $(*)$ называется совместной, если она имеет решение.

• ОСЛУ всегда совместна, так как имеет нулевое решение.

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 9

СЛУ $AX = B$ *совместна, если и только если* $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|B)$.

Доказательство. • $AX = B$ совместна $\iff \exists X \in K^m: \ AX = B \iff$

$$\exists x_1, \dots, x_m \in K \ : \ x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \dots + x_mA^{(m)} = B$$
$$\iff B \in \mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \iff$$
$$\mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) = \mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}, B) \iff$$
$$\dim(\mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})) = \dim(\mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}, B))$$
$$\iff \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|B).$$

• Равенство двух линейных оболочек эквивалентно равенству их размерностей (предпоследний переход), так как одна из них является линейным подпространством другой.

Пространство решений однородной системы линейных уравнений.

• Как нам известно из Леммы 5.3, любую ОСЛУ можно привести к ступенчатому виду, от этого множество решений не меняется.

• Итак, мы имеем ОСЛУ в ступенчатом виде: пусть $1 \le s_1 < s_2 \dots < s_k \le m$,

$$\begin{cases} x_{s_1} + a_{1,s_1+1}x_{s_1+1} + \dots \qquad + a_{1,m}x_m = 0, \\ \quad x_{s_2} + a_{1,s_2+1}x_{s_2+1} + \dots \quad + a_{1,m}x_m = 0, \\ \dots \\ \qquad x_{s_k} + a_{1,s_k+1}x_{s_k+1} + \dots + a_{1,m}x_m = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

• Назовем главными все переменные, кроме $x_{s_1}, \dots, x_{s_k}$.

Лемма 8

Пусть A — матрица системы $(*)$. Тогда $\mathrm{rk}(A) = k$.

Доказательство. • $\mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{Lin}(A_1, \dots, A_k))$. Таким образом, нам нужно доказать, что все строки матрицы A ЛНЗ.

• Сделаем это индукцией по k. База $k = 1$ очевидна. Докажем переход.

• Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ таковы, что $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k = 0$.

• В столбце s_1 есть 1 в строчке A_1, остальные коэффициенты равны 0. Значит, $\lambda_1 = 0$.

• Теперь $\lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k = 0$ и по индукционному предположению имеем $\lambda_2 = \lambda_k = 0$, то есть, строки A ЛНЗ. $\square$

Лемма 9

Решения ОСЛУ $AX = 0$ $(*)$ с $A \in M_{n,m}(K)$ образуют линейное подпространство K^m.

Доказательство. • Пусть $U \subset K^m$ — множество всех решений. Тогда $X \in U \iff AX = 0$.

• Пусть $X^1, X^2 \in U$, $\lambda \in K$.

• Тогда $A(X^1 + X^2) = A(X^1) + A(X^2) = 0 + 0 = 0$, значит, $X^1 + X^2 \in U$.

• Тогда $A(\lambda X^1) = \lambda A(X^1) = \lambda 0 = 0$, значит, $\lambda X^1 \in U$.

• По Лемме 5.1 получаем, что U — линейное подпространство K^m. $\square$

Определение

U называется пространством решений системы $(*)$.

- Напомним: пусть $1 \le s_1 < s_2 \dots < s_k \le m$,

$$\begin{cases} x_{s_1} + a_{1,s_1+1}x_2 + \dots \qquad + a_{1,m}x_m = 0, \\ \quad x_{s_2} + a_{2,s_2+1}x_2 + \dots \quad + a_{2,m}x_m = 0, \\ \dots \\ \qquad x_{s_k} + a_{k,s_k+1}x_2 + \dots + a_{k,m}x_m = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

- Главные переменные — все, кроме $x_{s_1}, \dots, x_{s_k}$.

Лемма 10

Для любого набора значений главных переменных существует единственное решение системы $(*)$ с такими значениями.

Доказательство. • Из k уравнения однозначно вычисляется x_{s_k} (все переменные с большими номерами нам известны).

- Потом из $k-1$ уравнения однозначно вычисляется x_{k-1}, и так далее, однозначно находятся значения всех неглавных переменных. □

- Если в решении $(*)$ все главные переменные равны 0, то и все остальные тоже равны 0 (это следует из Леммы 10, а кроме того, несложно проверить напрямую).

Теорема 10

Пусть U — пространство решений ОСЛУ $AX = 0$ $(*)$ с m неизвестными. Тогда $\dim(U) = m - \mathrm{rk}(A)$.

Доказательство. • Так как $\mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{Lin}(A_1, \dots, A_k)) = k$, достаточно доказать, что $\dim(U)$ равняется количеству главных переменных.

• Пронумеруем главные переменные: $x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-k}}$.

• Определим решение $r^s \in U$: Положим $r^s_{i_s} = 1$ и $r^s_{i_j} = 0$ при $j \in \{1, \dots, m-k\}$, $j \neq s$. После чего по Лемме 10 однозначно определим значения неглавных переменных.

• Докажем, что $r^1, \dots, r^{m-k}$ — базис U.

Порождающая система. • Пусть $x \in U$. Рассмотрим $x' = x_{i_1} r^1 + \dots + x_{i_{m-k}} r^{m-k}$.

• По Лемме 9, $x' \in U$.

• Заметим, что $x'_{i_s} = \sum\limits_{j=1}^{m-k} x_{i_j} r^j_{i_s} = x_{i_s} r^s_{i_s} = x_{i_s}$ для всех $s \in \{1, \dots, m-k\}$.

• Таким образом, $x, x' \in U$ — два решения $(*)$, в которых совпадают все значения главных переменных.

• По Лемме 10 тогда $x = x'$. Значит, $x \in \mathrm{Lin}(r_1, \dots, r_{m-k})$.

Вектора $r^1, \dots, r^{m-k}$ — ЛНЗ.

- Пусть $\alpha_1 r^1 + \dots + \alpha_{m-k} r^{m-k} = 0$.
- Тогда для любого $s \in \{1, \dots, m-k\}$ $\alpha_1 r^1_{i_s} + \dots + \alpha_{m-k} r^{m-k}_{i_s} = 0$.
- Так как $r^j_{i_s} = 0$ при $j \neq s$ и $r^s_{i_s} = 1$, отсюда следует, что $\alpha_s = 0$.
- Таким образом, $r^1, \dots, r^{m-k}$ — ЛНЗ, а следовательно — базис пространства решений системы $(*)$.
- Следовательно, $\dim(U) = m - k = m - \mathrm{rk}(A)$. $\square$

Определение

Фундаментальная система решений ОСЛУ $AX = 0$ — это любой базис ее пространства решений.

Решения неоднородной СЛУ

• Рассмотрим совместную СЛУ $AX = B$ $(*)$ с m неизвестными и соответствующую ей ОСЛУ $AX = 0$ $(**)$.

• Как мы знаем, решения ОСЛУ $(**)$ образуют линейное пространство — пространство решений U.

Лемма 11

Множество решений W системы $(*)$ — аффинное подпространство K^m. Если U — пространство решений системы $(**)$, а X^0 — решение $(*)$, то $W = U + X^0$.

Доказательство. • Достаточно доказать второе утверждение.

• Пусть $X' \in W$. Тогда $A(X' - X^0) = AX' - AX^0 = B - B = 0$, значит, $X' - X^0 \in U$.

• Наоборот, пусть $X' \in U + X^0$.

• Тогда $X' - X^0 \in U$, значит, $AX' = AX^0 + A(X' - X^0) = B + 0 = B$, следовательно, $X' \in W$.

• Таким образом, $W = U + X^0$. $\square$