Алгебра. Глава 8. Линейные отображения

Д. В. Карпов

2023

• Далее везде U и V — линейные пространства над одним и тем же полем K.

Определение

1) Отображение $\varphi : U \to V$ называется *линейным отображением*, если оно является гомоморфизмом линейных пространств, то есть, $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ для всех $\alpha, \beta \in K$ и $x, y \in U$.

2) *Ядро* линейного отображения φ — это $\ker(\varphi) = \{x \in U \ : \ \varphi(x) = 0\}$.

3) *Образ* линейного отображения φ — это $\mathrm{Im}(\varphi) = \{y \in V \ : \ \exists x \in U \ \varphi(x) = y\}$.

Лемма 1

Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение. Тогда:

1) $\ker(\varphi)$ — *линейное подпространство* U*;*

2) $\mathrm{Im}(\varphi)$ — *линейное подпространство* V*.*

Доказательство. 1) • Достаточно доказать, что $\ker(\varphi)$ замкнуто по взятию линейной комбинации.

• Пусть $x, x' \in \ker(\varphi)$ и $\alpha, \beta \in K$.

• Тогда $\varphi(\alpha x + \beta x') = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x') = 0$, а значит, $\alpha x + \beta x' \in \ker(\varphi)$.

2) • Достаточно доказать, что $\mathrm{Im}(\varphi)$ замкнут по взятию линейной комбинации.

• Пусть $y, y' \in \mathrm{Im}(\varphi)$ и $\alpha, \beta \in K$.

• Тогда существуют такие $x, x' \in U$, что $y = \varphi(x)$ и $y' = \varphi(x')$.

• Следовательно,

$$\varphi(\alpha x + \beta x') = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x') = \alpha y + \beta y',$$

а значит, $\alpha y + \beta y' \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

Соответствие линейных отображений и матриц

• Пусть U и V — линейные пространства над полем K, в которых зафиксированы базисы $u_1, \dots, u_m$ и $v_1, \dots, v_n$ соответственно.

• Тогда любой $x \in U$ представляется как столбец $x = x_1u_1 + \dots + x_mu_m = (x_1, \dots, x_m)^T$ (столбец координат в разложении по базису, здесь $x_1, \dots, x_m \in K$).

• Аналогично $y \in V$ представляется в виде $y = y_1v_1 + \dots + y_nv_n = (y_1, \dots, y_n)^T$.

• Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение.

• Подставим в φ базисные вектора пространства U и разложим результаты по базису V:

$$\varphi(u_1) = (a_{1,1}, \dots, a_{n,1})^T = A^{(1)}, \dots, \varphi(u_i) = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})^T = A^{(i)},$$
$$\dots, \varphi(u_m) = (a_{1,m}, \dots, a_{n,m})^T = A^{(m)}.$$

• Тогда $A = (A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \in M_{n,m}(k)$ (матрица с указанными столбцами) — *матрица* отображения φ в фиксированных нами базисах.

• Смысл этой матрицы в том, что если $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in U$ (координаты в базисе $u_1, \dots, u_m$), то $\varphi(x) = A \cdot (x_1, \dots, x_m)^T = (y_1, \dots, y_n)^T$ — координаты $\varphi(x)$ в базисе $v_1, \dots, v_n$.

• Проверим это:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 u_1 + \dots x_m u_m) = x_1\varphi(u_1) + \dots + x_m\varphi(u_m) = \\ A^{(1)}x_1 + \dots + A^{(m)}x_m = A \cdot (x_1, \dots, x_m)^T.$$

• Таким образом, при фиксированных базисах линейное отображение — это просто умножение на матрицу.

• Как правило, оно записывается в виде $Ax = y$, где вектора $x \in U$ и $y \in V$ — столбцы коэффициентов в разложении по фиксированным нами базисам.

• Наоборот, представим вектора из U и V как столбцы координат, пусть $A \in M_{m,n}(K)$.

• Несложно понять, что отображение $\varphi : U \to V$, заданное формулой $\varphi(x) = Ax$, является линейным и в данных базисах будет иметь как раз матрицу A.

• Линейность проверяется тривиально, а, подставив $x = u_i$ — столбец из нулей и одной единицы на i месте, мы получим, что i столбец матрицы отображения должен быть как раз $A^{(i)}$.

• Таким образом, при фиксации базисов U и V существует биекция между линейными отображениями из U в V и матрицами из $M_{m,n}(K)$ (каждому отображению соответствует его матрица).

Композиция линейных отображений. Связь с умножением матриц

Теорема 1

Пусть U, V, W — конечномерные линейные пространства над полем K, а $\varphi : U \to V$ и $\psi : V \to W$ — линейные отображения, имеющие в фиксированных базисах пространств матрицы A_φ и A_ψ соответственно. Тогда композиция $\psi \cdot \varphi$ имеет в этих же базисах матрицу $A_\psi \cdot A_\varphi$.

• Пусть $\dim U = m$, $\dim(V) = n$, $\dim W = \ell$. Тогда $A_\psi \in M_{\ell,n}(K)$ и $A_\varphi \in M_{n,m}(K)$, то есть, произведение матриц $A_\psi \cdot A_\varphi$ определено корректно.

Доказательство Теоремы 1. • Все вектора в нашем доказательстве записаны как столбцы координат в соответствующем фиксированном базисе.

• Тогда для $x \in U$ имеем

$$(\psi \cdot \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(A_\varphi x) = (A_\psi \cdot A_\varphi)x,$$

откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Размерности ядра и образа линейного отображения.

Теорема 2

Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение, U — конечномерное линейное пространство. Тогда $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(U)$.

Доказательство. • Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис $\ker(\varphi)$.

• Дополним его до базиса U: $e_1, \dots, e_k, u_1, \dots, u_m$.

• Тогда любой вектор $x \in U$ единственным образом представляется в виде
$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_k e_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m$, а значит,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(e_i) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi(u_i).$$

• Таким образом, $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$ — порождающая система векторов в $\mathrm{Im}(\varphi)$.

- Докажем, что вектора $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$ ЛНЗ.
- Пусть $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi(u_i) = 0$.
- Пусть $x = \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i$. Тогда $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \varphi(u_i) = 0$.
- Следовательно, $x \in \ker(\varphi)$, а значит, вектор x можно разложить по базису $\ker(\varphi)$: пусть $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$.
- Таким образом, мы имеем два разложения вектора x по базису $e_1, \dots, e_k, u_1, \dots, u_m$ пространства U: $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i$.
- Но эти два разложения должны совпадать! Следовательно, $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$.
- Таким образом, вектора $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$ ЛНЗ, то есть, это базис $\mathrm{Im}(\varphi)$.
- Следовательно, $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = k + m = \dim(U)$. $\square$

Теорема 3

Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над полем K, в которых фиксированы базисы, а $\varphi : U \to V$ — линейное отображение с матрицей A. Тогда $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{rk}(A)$.

Доказательство. • Как обычно, пусть $\dim(U) = m$, а $u_1, \dots, u_m$ — базис U. Тогда
$\mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})) = \dim(\mathrm{Lin}(\varphi(u_1), \dots, (\varphi(u_m)))$.

• А теперь заметим, что

$$\mathrm{Lin}(\varphi(u_1), \dots, (\varphi(u_m)) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi(u_i) \ : \ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \right\} =$$

$$\left\{ \varphi\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i\Big) \ : \ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \right\} = \{\varphi(x) \ : \ x \in U\} = \mathrm{Im}(\varphi),$$

так как U — множество всевозможных линейных комбинаций векторов своего базиса. $\square$

• Непосредственно из Теорем 2 и 3 можно сделать следующее заключение.

Следствие 1

Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над полем K, в которых фиксированы базисы, $\dim(U) = m$, а $\varphi : U \to V$ — линейное отображение с матрицей A. Тогда $\dim(\mathrm{ker}(\varphi)) = m - \mathrm{rk}(A)$.

• Покажем, как применять соответствие матриц и линейных отображений для доказательства утверждения “чисто про матрицы”.

Определение

Пусть $\varphi : U \to V$ — линейное отображение, а W — линейное подпространство U. Тогда $\varphi|_W : W \to V$ — *сужение* φ на подпространство W (то же самое отображение, применяемое только для элементов W).

• Очевидно, $\varphi|_W$ — линейное отображение и $\mathrm{Im}(\varphi|_W) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$.

Теорема 4

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,\ell}(K)$. *Тогда* $\mathrm{rk}(AB) \le \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$.

Доказательство. • Рассмотрим линейное отображения $\varphi : K^n \to K^m$, заданное формулой $\varphi(x) = Ax$ и линейное отображения $\psi : K^\ell \to K^n$, заданное формулой $\psi(y) = By$.

• Как мы знаем, эти отображения имеют в стандартных базисах пространств матрицы A и B соответственно.

• По Теореме 1 композиция $\varphi \cdot \psi : K^\ell \to K^m$ — линейное отображение с матрицей AB.

• По Теореме 3 мы имеем

$$\mathrm{rk}(B) = \dim(\mathrm{Im}(\psi)), \quad \mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \quad \text{и}$$

$$\mathrm{rk}(AB) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi \cdot \psi)).$$

• Нам достаточно доказать два неравенства: $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(A)$ и $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(B)$.

Утверждение 1

$\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(A)$.

Доказательство. • Отметим, что $\varphi \cdot \psi = \varphi|_{\mathrm{Im}(\psi)}$.

• Поэтому, $\mathrm{Im}(\varphi \cdot \psi) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$, а значит, и
$\dim(\mathrm{Im}(\varphi \cdot \psi)) \le \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$. □

Утверждение 2

$\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(B)$.

Доказательство. • Так как $\varphi \cdot \psi = \varphi|_{\mathrm{Im}(\psi)} : \mathrm{Im}(\psi) \to K^m$, мы по Теореме 2 имеем

$\dim(\mathrm{Im}(\varphi \cdot \psi)) + \dim(\mathrm{ker}(\varphi \cdot \psi)) = \dim(\mathrm{Im}(\psi))$, откуда
$\mathrm{rk}(AB) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi \cdot \psi)) \le \dim(\mathrm{Im}(\psi)) = \mathrm{rk}(B)$. □

• Теорема 4 доказана. □

Кольцо линейных операторов $\mathrm{End}(V)$, связь с кольцом матриц

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем K. Тогда $\mathrm{End}(V)$ — множество всех линейных отображений из V в себя, которые мы будем называть *линейными операторами* на V.

- В $\mathrm{End}(V)$ мы определим сложение (поэлементное: $(\varphi+\psi)(x) := \varphi(x)+\psi(x)$) и умножение — композицию.
- Пусть $\dim(V) = n$. Зафиксируем базис V, каждому линейному оператору $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, как мы знаем, соответствует матрица $A_\varphi \in M_n(K)$ в этом базисе.
- Далее мы не будем говорить про базис, все матрицы в этом разделе именно в нем.

• Опишем несколько свойств биекции оператор — матрица. Первые два свойства очевидны.

Свойство 1

Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ *и* $k \in K$. *Тогда* $k\varphi \in \mathrm{End}(V)$ *(это отображение, заданное формулой* $(k\varphi)(x) := k\varphi(x)$*) и* $A_{k\varphi} = k \cdot A_\varphi$ *(все элементы матрицы* A_φ *умножаются на* k*).*

Свойство 2

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$. *Тогда* $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.

• Третье свойство следует из Теоремы 1 (о матрице композиции линейных отображений).

Свойство 3

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$. *Тогда* $A_{\varphi\cdot\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

Теорема 5

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$. Тогда $\mathrm{End}(V)$ — кольцо с единицей, причем $\mathrm{End}(V) \simeq M_n(K)$.

Доказательство. • Мы знаем, что отображение $f : \mathrm{End}(V) \to M_n(k)$, заданное формулой $f(\varphi) := A_\varphi$, является биекцией и согласовано с операциями $+$ и $\cdot$ в кольцах.

• Очевидно, f^{-1} также согласовано с операциями в кольцах.

• Следовательно, все нужные нам свойства сложения (коммутативность, ассоциативность, 0 и обратный элемент) в $\mathrm{End}(V)$ следуют из аналогичных свойств в $M_n(k)$.

• Так, 0 в $\mathrm{End}(V)$ — это отображение с нулевой матрицей, которое отображает все элементы V в 0, а $-\varphi$ задается в каждой точке формулой $(-\varphi)(x) := -(\varphi(x))$.

• Аналогично, дистрибутивность и все нужные нам свойства умножения в $\mathrm{End}(V)$ следуют из аналогичных свойств в $M_n(K)$.

• Отметим, что единицей в $\mathrm{End}(V)$ будет, как и положено, тождественное отображение id с матрицей $A_{\mathrm{id}} = E_n$.

• Теперь понятно, что f — изоморфизм колец $\mathrm{End}(V)$ и $M_n(k)$.

Обратимые линейные операторы и их свойства

• В этом разделе пусть V — конечномерное линейное пространство над полем K, в котором зафиксирован базис.

• Таким образом, каждому линейному оператору $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ соответствует матрица $A_\varphi \in M_n(K)$ и это соответствие — биекция.

Определение

Линейный оператор $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ — обратимый, если существует φ^{-1} (то есть, если φ — биекция).

Лемма 2

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ таковы, что $A_\psi = (A_\varphi)^{-1}$. Тогда φ — обратимый и $\psi = (\varphi)^{-1}$.

Доказательство. • По Теореме 1 оператор $\varphi \cdot \psi \in \mathrm{End}(V)$ имеет матрицу $A_{\varphi \cdot \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi = E_n$.

• Следовательно, $\varphi \cdot \psi = \mathrm{id}$. Аналогично, $\psi \cdot \varphi = \mathrm{id}$.

• Значит, $\psi = (\varphi)^{-1}$. $\square$

Теорема 6

Если $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ *— обратимый, то* $\varphi^{-1} \in \mathrm{End}(V)$ *и* $A_{\varphi^{-1}} = (A_\varphi)^{-1}$.

Доказательство. • Для доказательства линейности φ^{-1} достаточно проверить, что для любых $a, b \in K$ и $x, y \in V$

$$\varphi^{-1}(ax + by) = a\varphi^{-1}(x) + b\varphi^{-1}(y) \qquad (*)$$

• Так как φ — биекция, для этого достаточно доказать, что, применив к левой и правой частям $(*)$ оператор φ, мы получим одно и то же:

$$\varphi(\varphi^{-1}(ax + by)) = ax + by \qquad \text{и}$$

$$\varphi(a\varphi^{-1}(x) + b\varphi^{-1}(y)) = a\varphi(\varphi^{-1}(x)) + b\varphi(\varphi^{-1}(y)) = ax + by.$$

• Остается заметить, что $A_\varphi \cdot A_{\varphi^{-1}} = A_{\varphi\cdot\varphi^{-1}} = A_{\mathrm{id}} = E_n$ и, аналогично, $A_{\varphi^{-1}} \cdot A_\varphi = E_n$, откуда следует, что $A_{\varphi^{-1}} = (A_\varphi)^{-1}$. □

Координаты вектора в разных базисах

• Пусть V — линейное пространство над полем K, а $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ — два его базиса.

• Каждый вектор $x \in V$ единственным образом представляется в виде столбцов координат по каждому из базисов — скажем, $(x_1, \dots, x_n)^T$ и $(x'_1, \dots, x'_n)^T$.

• Мы покажем, как из столбца координат вектора по одному базису получить столбец координат по другому базису.

• Разложим базисные векторы второго базиса по первому:

$e'_1 = c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + \dots + c_{n,1}e_n, \dots,$

$e'_i = c_{1,i}e_1 + c_{2,i}e_2 + \dots + c_{n,i}e_n, \dots,$

$e'_n = c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + \dots + c_{n,n}e_n.$

• Напишем цепочку преобразований:

$$x_1e_1 + \dots + x_ne_n = x = x'_1e'_1 + \dots + x'_ne'_n =$$
$$x'_1(c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + \dots + c_{n,1}e_n) + \dots + x'_n(c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + \dots + c_{n,n}e_n) =$$
$$(x'_1c_{1,1} + \dots + x'_nc_{1,n})e_1 + \dots + (x'_1c_{n,1} + \dots + x'_nc_{n,n})e_n,$$

откуда, ввиду единственности разложения по базису, делаем вывод $x_i = (c_{i,1}x'_1 + \dots + c_{i,n}x'_n)$.

• Вспомнив про правила умножения матриц, получаем формулу
$(x_1,\dots,x_n)^T = C(x'_1,\dots,x'_n)^T$, где $C = (c_{i,j})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n}$.
• Матрица C называется *матрицей перехода* от базиса $e'_1,\dots,e'_n$ к базису $e_1,\dots,e_n$. Докажем ряд свойств матриц перехода.

Свойство 1

Матрица перехода невырождена. Если C — матрица перехода от базиса $e'_1,\dots,e'_n$ к базису $e_1,\dots,e_n$, то матрица перехода от базиса $e_1,\dots,e_n$ к базису $e'_1,\dots,e'_n$ — это C^{-1}.

Доказательство. • Обозначим матрицу матрица перехода от базиса $e_1,\dots,e_n$ к базису $e'_1,\dots,e'_n$ через D.

• Тогда для любого $x\in V$ мы можем записать его координаты в этих базисах, как выше и заметить, что
$(x_1,\dots,x_n)^T = C(x'_1,\dots,x'_n)^T$ и $(x'_1,\dots,x'_n)^T = D(x_1,\dots,x_n)^T$, откуда
$(x_1,\dots,x_n)^T = C(x'_1,\dots,x'_n)^T = CD(x_1,\dots,x_n)^T$ и
$(x'_1,\dots,x'_n)^T = D(x_1,\dots,x_n)^T = DC(x'_1,\dots,x'_n)^T$.
• Так как это верно для любых столбцов координат, $DC = CD = E^n$ (умножение на CD или DC — это id), откуда следует, что $D = C^{-1}$.

Свойство 2

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$. Тогда, для любого фиксированного базиса $e_1, \dots, e_n$, любая невырожденная матрица $C \in M_n(K)$ является матрицей перехода от какого-то базиса к $e_1, \dots, e_n$.

Доказательство. • Рассмотрим базис $e'_1, \dots, e'_n$, координаты векторов которого в исходном базисе $e_1, \dots, e_n$ — столбцы матрицы C (то есть, $e'_1 = C^{(1)}, \dots, e'_n = C^{(n)}$).

• Эти вектора линейно независимы: так как C — невырожденная матрица, то

$$\dim(V) = n = \mathrm{rk}(C) = \dim(\mathrm{Lin}(C^{(1)}, \dots, C^{(n)}).$$

• Любые n ЛНЗ векторов в n-мерном пространстве V образуют его базис, в частности, $e'_1, \dots, e'_n$ — базис V.

• По построению матрицы перехода понятно, что матрица перехода от базиса $e'_1, \dots, e'_n$ к базису $e_1, \dots, e_n$ будет в точности C.

Матрицы оператора в разных базисах

• Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, где V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$.

• Мы знаем, что при каждом фиксированном базисе оператору φ соответствует его матрица. Как связаны матрицы одного оператора в разных базисах?

• Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ — два базиса V, а векторам соответствуют столбцы координат (без штрихов — по первому базису, со штрихами — по второму).

• Пусть A и A' — матрицы φ в этих базисах. Тогда равенство $y = \varphi(x)$ можно переписать в двух видах:
$(y_1, \dots, y_n)^T = A \cdot (x_1, \dots, x_n)^T$ и
$(y'_1, \dots, y'_n)^T = A' \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T$.

• Пусть C — матрица перехода от $e'_1, \dots, e'_n$ к $e_1, \dots, e_n$.

• Тогда C^{-1} — матрица перехода от $e_1, \dots, e_n$ к $e'_1, \dots, e'_n$. Поэтому
$(y'_1, \dots, y'_n)^T = A' \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T = A'C^{-1}(x_1, \dots, x_n)^T$ и
$(y_1, \dots, y_n)^T = C(y'_1, \dots, y'_n)^T = CA' \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T = CA'C^{-1}(x_1, \dots, x_n)^T$.

• Ввиду единственности матрицы отображения φ в базисе $e_1, \dots, e_n$ следует, что $A = CA'C^{-1}$ и $A' = C^{-1}AC$.

Определение

Матрицы $A, A' \in M_n(K)$ называются *подобными*, если существует такая невырожденная матрица $C \in M_n(K)$, что $A = CA'C^{-1}$.

• Несложно понять, что подобие матриц — отношение эквивалентности. Таким образом, все матрицы из $M_n(K)$ разбиваются на классы эквивалентности, состоящие из попарно подобных матриц.

Теорема 7

Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, где V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$. Тогда матрицы φ во всех возможных базисах образуют класс попарно подобных матриц из $M_n(K)$.

Доказательство. • Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ и матрицу A отображения φ в этом базисе.

• Уже доказано, что матрицы φ в других базисах подобны A.

• Рассмотрим произвольную матрицу, подобную A — скажем, $C^{-1}AC$, где $C \in M_n(K)$ — невырожденная матрица.

• Тогда C — это матрица перехода от нашего фиксированного базиса к другому, и в этом базисе φ имеет матрицу как раз $C^{-1}AC$.

Многочлен от оператора и от матрицы

• Пусть V — линейное пространство над полем K, $\mathrm{dim}(V) = n$, базис считаем фиксированным.

• Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, а $A \in M_n(K)$ — матрица φ.

• Рассмотрим многочлен $f(t) \in K[t]$, пусть $f(t) = c_m t^m + \dots + c_0$.

• Мы научимся подставлять в многочлен f матрицу A и линейный оператор φ:

$f(A) := c_m A^m + \dots + c_1 A + c_0 E_n,$

$f(\varphi) := c_m \varphi^m + \dots + c_1 \varphi + c_0 \mathrm{id}.$

• $f(A)$ — матрица из $M_n(K)$. Умножение матрицы на число (выражение типа $c_1 A$) — это умножение всех ее коэффициентов на это число.

• $f(\varphi)$ — это линейный оператор из $\mathrm{End}(V)$. Результат умножения оператора на число (выражение типа $c_1\varphi$) — это оператор, значения которого во всех точках умножены на это число.

Лемма 3

Оператор $f(\varphi)$ в нашем фиксированном базисе имеет матрицу $f(A)$.

Доказательство. • При сложении линейных отображений матрицы складываются, при композиции — перемножаются.

• При умножении линейного отображения на число $c \in K$ все его значения умножаются на это число, а значит, и значения на базисных векторах, но тогда и матрица отображения умножится на c. □

• Умножение в $M_n(K)$ и в $\mathrm{End}(V)$ не коммутативно. Но многочлены от одного и того же оператора (матрицы) — коммутируют.

Лемма 4

Пусть $f, g \in K[t]$.

1) *Для любого $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ выполнено $f(\varphi) \cdot g(\varphi) = g(\varphi) \cdot f(\varphi)$.*

2) *Для любой $A \in M_n(K)$ выполнено $f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A)$.*

Доказательство. • Ввиду Леммы 3 достаточно доказать пункт 2.

- Пусть $f(t) = c_m t^m + \dots + c_0$ и $g(t) = d_k t^k + \dots + d_0$.
- Так как

$(c_i A^i) \cdot (d_j A^j) = c_i d_j A^{i+j} = d_j c_i A^{i+j} = (d_j A^j) \cdot (c_i A^i)$,
можно написать цепочку преобразований (везде считаем, что $A^0 = E_n$):

$$f(A)g(A) = \left(\sum_{i=0}^{m} c_i A^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} d_j A^j\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} (c_i A^i)(d_j A^j) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{m} (d_j A^j)(c_i A^i) =$$

$$\left(\sum_{j=0}^{k} d_j A^j\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{m} c_i A^i\right) = g(A)f(A). \qquad \square$$

Инвариантные подпространства и их свойства

• Пусть V — линейное пространство над полем K, а $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

Определение

Подпространство $W < V$ называется φ-инвариантным, если

$\varphi(W) = \{\varphi(x) \,:\, x \in W\} \subset W$.

• Вскоре мы увидим много примеров инвариантных подпространств и поймем, насколько это важное понятие. Начнем с простого свойства.

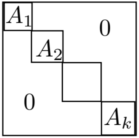
Свойство

Если W — φ-инвариантное подпространство, то $\varphi|_W \in \mathrm{End}(W)$.

Доказательство. По определению φ-инвариантного подпространства, $\varphi|_W : W \to W$. Условие линейности наследуется от φ. $\square$

Определение

Пусть K – поле $A_1, \dots, A_m$ — квадратные матрицы, $A_i \in M_{n_i}(K)$. Обозначим через $\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_m)$ квадратную матрицу из $M_{n_1+\dots+n_m}(K)$, в которой по главной диагонали последовательно стоят квадратные блоки $A_1, \dots, A_m$, а все остальные элементы равны 0.



Лемма 5

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, а $V_1, \dots, V_m$ — φ-инвариантные подпространства V, причем $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$.

Зафиксируем в каждом подпространстве V_i базис $e_1^i, \dots, e_{k_i}^i$, пусть A_i — матрица отображения $\varphi_i = \varphi|_{V_i}$ в этом базисе.

Тогда в базисе $e_1^1, \dots, e_{k_1}^1, \dots, e_1^m, \dots, e_{k_m}^m$ отображение φ имеет матрицу $\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_m)$.

Доказательство. • Как строится матрица A отображения φ в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$? Ее j столбцом будет $A^{(j)} = \varphi(e_j)$.

• Пусть j^i — номер базисного вектора e^i_j, входящего в базис φ-инвариантного подпространства V_i. Подставим его и получим:

$A^{(j^i)} = \varphi(e^i_j) \in V_i$.

• Элемент из V_i раскладывается по его базису $e^i_1, \dots, e^i_{k_i}$, а значит, в разложении по объединенному базису пространства V, мы получим коэффициенты 0 при всех векторах, кроме этих (так как разложение по базису единственно!).

• Следовательно, $A^{(j^i)} = \varphi(e^i_j) = \sum\limits_{s=1}^{k_i} a_{s^i, j^i} e_{s^i} =$

$(0, \dots, 0, a_{1^i, j^i}, \dots a_{k^i_i, j^i}, 0, \dots, 0)^T$.

• Так как $\varphi(e^i_j) = \varphi_i(e^i_j)$, на места столбцов, соответствующих векторам из базиса $e^i_1, \dots, e^i_{k_i}$, будут вписаны соответствующие столбцы матрицы A_i (эти столбцы как раз и образованы коэффициентами в разложении векторов $\varphi(e^i_j)$ по указанному базису пространства V_i), а все остальные коэффициенты матрицы A в указанных столбцах — нули. $\square$

Характеристический многочлен оператора

- V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, а $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

Определение

Пусть A — любая матрица оператора φ.

Характеристический многочлен оператора φ — это $\chi_\varphi(t) := \det(A - tE_n)$ (переменная из поля K, $\chi_\varphi \in K[t]$).

Свойство 1

Определение характеристического многочлена оператора корректно, то есть, не зависит от выбора матрицы оператора.

Доказательство. • Пусть A' — другая матрица оператора φ.

- Тогда $A' = C^{-1}AC$ для некоторой невырожденной матрицы $C \in M_n(k)$, следовательно,

$$\det(A' - tE_n) = \det(C^{-1}AC - tE_n) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}(tE_n)C) =$$
$$\det(C^{-1}(A - tE_n)C) = \det(C^{-1})\det(A - tE_n)\det(C) = \det(A - tE_n). \quad \square$$

Свойство 2

$\deg(\chi_\varphi) = n$, *старший коэффициент равен* $(-1)^n$, *а свободный член равен* $\det(A)$.

Доказательство. • По диагонали матрицы $A - tE_n$ стоят коэффициенты $a_{i,i} - t$, остальные коэффициенты t не содержат.

• Следовательно, t может быть максимум в степени n, и в такой степени получается ровно в одном случае — в произведении диагональных элементов, с коэффициентом $(-1)^n$.

• Для вычисления свободного члена подставим $t = 0$ и получим $\det(A)$. □

• Итак, $\chi_\varphi(t) = (-1)^n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1 t + \det(A)$.

• Коэффициент c_{n-1} также имеет смысл.

Определение

След матрицы $A \in M_n(K)$ — это $\mathrm{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$ (сумма элементов на главной диагонали).

Свойство 3

$c_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$.

Доказательство. • Пусть $B = A - tE_n$, а элементы этой матрицы обозначим через $b_{i,j}$.

• Рассмотрим любое произведение $b_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot b_{n,\sigma(n)}$, входящее в $\det(B) = \chi_\varphi(t)$ (здесь $\sigma \in S_n$).

• В этом произведении не может быть ровно один элемент, не лежащий на главной диагонали, так как σ не может оставлять на месте все числа от 1 до n, кроме одного.

• Следовательно, если $\sigma \neq \mathrm{id}$, то произведение содержит переменную t в степени не более $n-2$.

• Значит, вклад в $c_{n-1}t^{n-1}$ дает только произведение диагональных элементов, равное $(a_{1,1} - t)(a_{2,2} - t)\dots(a_{n,n} - t)$, откуда ясно, что $c_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$. □

Свойство 4

Если матрицы A и A' подобны, то $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$.

Доказательство. • Выше доказано (см. Свойство 1), что тогда $\det(A - tE_n) = \det(A' - tE_n)$, откуда ввиду Свойства 3 следует, что $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$. □

Теорема Гамильтона-Кэли.

Теорема 8

Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Тогда $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.

Неверное доказательство. • Пусть $\dim(V) = n$, а $A \in M_n(K)$ — матрица отображения φ.

• Тогда $\chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n)$.

• Имеем $\chi_\varphi(A) = \det(A - AE_n) = \det(0_n) = 0$.

• Таким образом, оператор $\chi_\varphi(\varphi)$ имеет нулевую матрицу, а значит, $\chi_\varphi(\varphi) = 0$. □

• Найдите ошибку и не повторяйте ее на экзамене!

Доказательство Теоремы 8. • Обозначим через $B(t)$ взаимную матрицу к $A - tE_n$ (здесь t — переменная, принимающая значения из поля K).

• Тогда $b(t)_{i,j} = (A - tE_n)_{j,i}$ — минор порядка $n - 1$ матрицы $A - tE_n$, который, очевидно, является многочленом от t степени не более чем $n - 1$ (в подматрице $A - tE_n$, полученной вычеркиванием i строки и j столбца остается не более чем $n - 1$ элемент вида $a_{l,l} - t$, остальные не содержат переменную t).

• Поэтому существуют такие матрицы $B_0, \dots, B_{n-1} \in M_n(K)$, что $B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + \dots + B_1 t + B_0$.

• Пусть $\chi_\varphi(t) = c_n t^n + \dots + c_1 t + c_0$ (нам известно, что $\deg(\chi_\varphi) = \dim(V) = n$). Тогда

$$(c_n t^n + \dots + c_1 t + c_0)E_n = \chi_\varphi(t) \cdot E_n = \det(A - tE_n) \cdot E_n =$$
$$B(t) \cdot (A - tE_n) = (B_{n-1}t^{n-1} + \dots + B_1 + B_0) \cdot (A - tE_n)$$

(третий переход следует из Леммы 7.2 и Теоремы 7.6).

• В левой и правой частях равенства $(c_n t^n + \dots + c_1 t + c_0)E_n = (B_{n-1}t^{n-1} + \dots + B_1(t) + B_0) \cdot (A - tE_n)$ коэффициенты при каждой степени t должны совпадать:

$c_n E_n = -B_{n-1} \Rightarrow c_n A^n = -B_{n-1}A^n$,

$c_{n-1}E_n = B_{n-1}A - B_{n-2} \Rightarrow c_{n-1}A^{n-1} = B_{n-1}A^n - B_{n-2}A^{n-1}$,

$\dots$

$c_1 E_n = B_1 A - B_0 \Rightarrow c_1 A^1 = B_1 A^2 - B_0 A$,

$c_0 E_n = B_0 A$.

• Сложив синие равенства, получим:

$$\chi_\varphi(A) = c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 E_n = -B_{n-1}A^n + (B_{n-1}A^n - B_{n-2}A^{n-1}) + \dots + (B_1 A^2 - B_0 A) + B_0 A = 0.$$

• Таким образом, оператор $\chi_\varphi(\varphi)$ имеет нулевую матрицу, а значит, $\chi_\varphi(\varphi) = 0$. $\square$

Минимальный многочлен оператора.

• Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\psi \in \mathrm{End}(V)$.

• Пусть $I(\psi)$ — множество всех таких многочленов $f \in K[t]$, что $f(\psi) = 0$.

Свойство 1

$I(\psi)$ — идеал в $K[t]$.

Доказательство. • Достаточно проверить замкнутость $I(\psi)$ по сложению и умножению на многочлены из $K[t]$.

• Пусть $f, g \in I(\psi)$. Тогда $(f+g)(\psi) = f(\psi) + g(\psi) = 0 + 0 = 0$, а значит, $f + g \in I(\psi)$.

• Пусть $f \in I(\psi)$, $h \in K[t]$. Тогда $(fh)(\psi) = f(\psi) \cdot h(\psi) = 0 \cdot h(\psi) = 0$, а значит, $fh \in I(\psi)$. □

• Как мы знаем, любой идеал в $K[t]$ — главный. Рассмотрим любой многочлен f такой, что $I(\psi) = f \cdot K[t]$ (то есть, порождающий $I(\psi)$).

• Тогда для любого другого многочлена $g \in K[t]$, порождающего $I(\psi)$, очевидно, выполнено $f \vdots g$ и $g \vdots f$, то есть, эти два многочлена ассоциированы (отличаются умножением на константу).

• Следовательно, многочлены, порождающие $I(\psi)$ — это в точности многочлены вида cf. Ровно один из них имеет единичный старший коэффициент, мы обозначим его через Irr_ψ и будем называть *минимальным многочленом* оператора ψ.

Свойство 2

$\chi_\psi \,\vdots\, \mathrm{Irr}_\psi$.

Доказательство. • По теореме Гамильтона-Кэли мы знаем, что $\chi_\psi(\psi) = 0$, то есть, $\chi_\psi \in I(\psi)$.

• Все многочлены из идеала $I(\psi)$ делятся на Irr_ψ. $\square$

Собственные числа, векторы и подпространства

• Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\psi \in \mathrm{End}(V)$.

Определение

1) Число $\lambda \in K$ называется *собственным числом* оператора ψ, если существует такой ненулевой вектор $x \in V$, что $\psi(x) = \lambda \cdot x$. В этом случае говорят, что x — *собственный вектор* числа λ.

2) Пусть λ — собственное число оператора ψ. Множество V_λ, состоящее из всех собственных векторов числа λ и вектора 0, называется *собственным подпространством* числа λ.

3) Множество всех собственных чисел оператора ψ называется его *спектром* и обозначается через $\mathrm{Spec}(\psi)$.

Лемма 6

V_λ — линейное подпространство V.

Доказательство. • Пусть $x, y \in V_\lambda$, $\alpha, \beta \in K$.

• Нам достаточно проверить, что $\alpha x + \beta y \in V_\lambda$. Сделаем это:
$\psi(\alpha x + \beta y) = \alpha\psi(x) + \beta\psi(y) = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$. $\square$

Теорема 9

$\mathrm{Spec}(\psi)$ *состоит в точности из корней характеристического многочлена* $\chi_\psi(t)$.

Доказательство. • Зафиксируем базис V, пусть A — матрица ψ в этом базисе.

• Пусть $\lambda \in \mathrm{Spec}(\psi)$, $x \in V_\lambda$, $x \neq 0$. Тогда $\psi(x) = \lambda x = \lambda \cdot \mathrm{id}(x)$.

• Следовательно, $(\psi - \lambda \mathrm{id})(x) = 0$, то есть $x \in \mathrm{ker}(\psi - \lambda \mathrm{id})$.

• Значит, $\mathrm{ker}(\psi - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$ и $\dim \mathrm{ker}(\psi - \lambda \mathrm{id}) \neq 0$.

• Оператор $\psi - \lambda \mathrm{id}$ имеет матрицу $A - \lambda E_n$ и по Следствию 1 $\mathrm{rk}(A - \lambda E_n) = n - \dim(\mathrm{ker}(\psi - \lambda \mathrm{id})) < n$.

• Тогда по Следствию 7.2 имеем $\chi_\psi(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0$.

• Наоборот, пусть $0 = \chi_\psi(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$.

• Тогда по Следствию 7.2 $n > \mathrm{rk}(A - \lambda E_n) = n - \dim(\mathrm{ker}(\psi - \lambda \mathrm{id})) \Rightarrow \dim(\mathrm{ker}(\psi - \lambda \mathrm{id})) > 0$.

• Следовательно, существует ненулевой вектор $x \in \mathrm{ker}(\psi - \lambda \mathrm{id})$.

• Это означает, что $\psi(x) = \lambda x$, то есть $\lambda \in \mathrm{Spec}(\psi)$. $\square$

Теорема 10

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\psi \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathrm{Spec}(\psi)$ — различные собственные числа, а x_i — собственный вектор λ_i. Тогда $x_1, \dots, x_k$ линейно независимы.

Доказательство. • Предположим противное и найдем из этих векторов нетривиальную нулевую линейную комбинацию с минимальным количеством ненулевых коэффициентов:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s = 0. \qquad (*)$$

• Подействуем на левую и правую часть $(*)$ оператором ψ:

$$0 = \psi(0) = \psi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s) = \alpha_1 \psi(x_1) + \dots + \alpha_s \psi(x_s) = \lambda_1 \alpha_1 x_1 + \dots + \lambda_s \alpha_s x_s. \qquad (**)$$

• Вычтем из $(**)$ умноженное на λ_s равенство $(*)$ и получим:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s)x_1 + \dots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s)x_{s-1} = 0.$$

• Так как собственные числа различны, все коэффициенты в этой линейной комбинации отличны от 0, но тогда ее существование противоречит выбору $(*)$. $\square$

Следствие 2

Пусть V *— линейное пространство над полем* K*,* $\psi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. *Тогда* $\sum\limits_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$ *— прямая сумма.*

Доказательство. • На этот раз нам понадобится определение прямой сумма: нужно доказать, что равенство $0 = \sum_{i=1}^{k} x_i$, где $x_i \in V_{\lambda_i}$ возможно только при $x_1 = \dots = x_k = 0$.

• Это очевидно следует из Теоремы 10: в противном случае, несколько ненулевых векторов из разных собственных пространств были бы линейно зависимы. □

Диагонализируемые операторы и матрицы

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\psi \in \mathrm{End}(V)$.

• Оператор ψ — *диагонализируемый*, если в некотором базисе имеет *диагональную* матрицу (то есть матрицу, в которой все элементы не на главной диагонали равны 0).

• Матрица $A \in M_n(K)$ называется *диагонализируемой*, если она имеет подобную диагональную матрицу.

• Матрица $A \in M_n(K)$ является диагонализируемой, если и только если оператор умножения на A в каком-либо базисе является диагонализируемым.

Теорема 11

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\psi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Тогда следующие три утверждения равносильны.

1° *Оператор ψ — диагонализируемый.*

2° $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$.

3° *V имеет базис, состоящий из собственных векторов ψ.*

Доказательство. $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. • Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V, причем e_i — собственный вектор числа λ_i (возможно, не все эти собственные числа различны).

• Тогда $\psi(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$, поэтому, матрица ψ в этом базисе имеет вид $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$. • Пусть матрица ψ в базисе $e_1, \dots, e_n$ — это $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

• Тогда $\psi(e_i) = \lambda_i e_i$, причем, очевидно, $e_i \neq 0$. Следовательно, λ_i — собственное число, а e_i — его собственный вектор.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. • Пусть $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$.

• Выделим базис в каждом из пространств $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$, тогда каждый из этих базисов состоит из собственных векторов ψ, а объединение всех этих k базисов по свойствам прямой суммы дает базис V.

$3^\circ \Rightarrow 2^\circ$. • Мы знаем, что $W = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$ — линейное подпространство V (эта сумма прямая по Следствию 2).

• Пусть $m_i = \dim(V_{\lambda_i})$. Тогда

$$\dim(V) \ge \dim(W) = \sum_{i=1}^{k} \dim(V_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

• С другой стороны, пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V, состоящий из собственных векторов.

• Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ в V_{λ_i} лежит не более чем m_i векторов из базиса (так как они линейно независимы).

• Значит, $\dim(V) \le \sum_{i=1}^{k} m_i$, откуда следует, что $\dim(V) = \dim(W)$, а значит, $V = W$. $\square$

Корневые подпространства

• Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$.

• Если прямая сумма собственных пространств оператора φ равна V, в некотором базисе этот оператор имеет диагональную матрицу, с которой очень удобно иметь дело.

• А что же делать, когда эта сумма меньше V? Нам придется определить понятие, расширяющее собственное пространство.

Определение

Пусть $\lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)$. Тогда

$$V(\lambda) = \{x \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (\varphi - \lambda \mathrm{id})^k(x) = 0\} \quad -$$

корневое пространство собственного числа λ оператора φ.

• В этом определении много сложного и неудобного — например, есть квантор существования, от которого мы вскоре избавимся.

Свойство 1

Собственное пространство V_λ — подпространство корневого пространства $V(\lambda)$.

Доказательство. • Достаточно доказать, что $V_\lambda \subset V(\lambda)$.

• Пусть $x \in V_\lambda$. Тогда $\varphi(x) = \lambda x$, откуда следует, что $(\varphi - \lambda \mathrm{id})(x) = 0$, то есть, подходит $k = 1$. □

Лемма 7

Пусть $\psi \in \mathrm{End}(V)$, $x \in V$. Пусть $k \in \mathbb{N}$ — минимальное такое число, что $\psi^k(x) = 0$. Тогда $x, \psi(x), \dots, \psi^{k-1}(x)$ — ЛНЗ векторы. В частности, $k \le n$.

Доказательство. • Пусть $x, \psi(x), \dots, \psi^{k-1}(x)$ ЛЗ, то есть,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \psi^i(x) = 0, \quad \text{не все } \alpha_i = 0 \qquad (*).$$

• Пусть ℓ — минимальный такой индекс, что $\alpha_\ell \neq 0$. Тогда сумму в $(*)$ можно начинать с индекса ℓ.

• Применим к обеим частям равенства $(*)$ оператор $\psi^{k-1-\ell}$ и получим:

$$0 = \psi^{k-1-\ell}(0) = \psi^{k-1-\ell}\left(\sum_{i=\ell}^{k-1} \alpha_i \psi^i(x)\right) =$$

$$= \alpha_\ell \psi^{k-1}(x) + \sum_{i=\ell+1}^{k-1} \alpha_i \psi^{k-1-\ell+i}(x) = \alpha_\ell \psi^{k-1}(x).$$

• Последний переход верен, так как $k-1-\ell+i \geq k$ при $i \geq \ell+1$, а значит, $\psi^{k-1-\ell+i}(x) = 0$

• Полученное равенство не может быть верным, так как $\alpha_\ell \neq 0$ и $\psi^{k-1}(x) \neq 0$.

• Поскольку в n-мерном линейном пространстве V нельзя выбрать более n ЛНЗ векторов, $k \leq n$.

• Теперь мы готовы избавиться от квантора существования в определении корневого пространства.

Свойство 2

$V(\lambda) = \{x \in V \ : \ (\varphi - \lambda \mathrm{id})^n(x) = 0\}$.

Доказательство. • Из определения следует, что $V(\lambda) \supset \{x \in V \ : \ (\varphi - \lambda \mathrm{id})^n(x) = 0\}$.

• Наоборот, пусть $x \in V(\lambda)$.

• Рассмотрим минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что $(\varphi - \lambda \mathrm{id})^k(x) = 0$ (такое k существует по определению).

• По Лемме 8 мы имеем $k \le n$.

• Значит, и $(\varphi - \lambda \mathrm{id})^n(x) = 0$. $\square$

Лемма 8

Пусть $f, g \in K[t]$ — взаимно простые многочлены. Пусть V — линейное пространство над полем K, а $x \in V$ и $\psi \in \mathrm{End}(V)$ таковы, что $(f(\psi))(x) = (g(\psi))(x) = 0$. Тогда $x = 0$.

Доказательство. • Вспомним, что НОД двух многочленов представляется в виде их линейной комбинации.

• Поэтому, существуют такие многочлены $p, q \in K[t]$, что $fp + qg = 1$.

• Подставив в это равенство оператор ψ и получим $(pf)(\psi) + (qg)(\psi) = \mathrm{id}$.

• Применим обе части последнего, операторного равенства к вектору x:

$$x = \mathrm{id}(x) = \big((pf)(\psi)\big)(x) + \big((qg)(\psi)\big)(x) = \\ (p(\psi))\big((f(\psi))(x)\big) + (q(\psi))\big((g(\psi))(x)\big) = \\ (p(\psi))(0) + (q(\psi))(0) = 0. \qquad \square$$

Теорема 12

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$ — прямая сумма.

Доказательство. • Пусть $W_i = \sum\limits_{j \neq i} V(\lambda_j)$.

• По критерию прямой суммы нам достаточно доказать, что $W_i \cap V(\lambda_i) = \{0\}$.

• Пусть $x \in W_i \cap V(\lambda_i)$. Тогда $(\varphi - \lambda_i \mathrm{id})^n(x) = 0$, так как $x \in V(\lambda_i)$.

• С другой стороны, $x = \sum\limits_{j \neq i} x_j$, где $x_j \in V(\lambda_j)$.

Следовательно, $(\varphi - \lambda_j \mathrm{id})^n(x_j) = 0$.

- Рассмотрим многочлен $f(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^n$. Тогда

$$(f(\varphi))(x) = \sum_{j \neq i} (f(\varphi))(x_j) =$$

$$\sum_{j \neq i} \Big(\prod_{s \notin \{i,j\}} (\varphi - \lambda_s \mathrm{id})^n \Big) \Big((\varphi - \lambda_j \mathrm{id})^n (x_j) \Big)$$

$$= \sum_{j \neq i} \Big(\prod_{s \notin \{i,j\}} (\varphi - \lambda_s \mathrm{id})^n \Big) (0) = 0.$$

- Мы использовали Лемму 4: операторные многочлены от одного и того же оператора коммутируют.
- Очевидно, $(t - \lambda_i)^n$ и $f(t)$ взаимно просты (мы знаем разложение f на линейные множители и среди них нет $t - \lambda_i$).
- Следовательно, по Лемме 8 мы имеем $x = 0$. $\square$

Теорема 13

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ и

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

1) $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$.

2) *Корневые пространства φ-инвариантны.*

Доказательство. • Пусть $f_i(t) = \prod\limits_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{m_j}$.

• Понятно, что $(f_1, \dots, f_k) = 1$ (мы знаем разложение каждого из этих многочленов на линейные множители, и ни один из них не является общим для всех k многочленов, значит, эти многочлены взаимно просты в совокупности).

• Тогда по теореме о линейном представлении НОД существуют такие многочлены $h_1, \dots, h_k \in K[t]$, что $h_1 f_1 + \dots + h_k f_k = 1$.

• Подставив в это равенство оператор φ, мы получим

$$(h_1 f_1)(\varphi) + \dots + (h_k f_k)(\varphi) = \mathrm{id}. \qquad (1)$$

• Для линейного отображения $\psi \in \mathrm{End}(V)$ и $X \subset V$ мы будем использовать обозначение $\psi(X) = \{\psi(x) : x \in X\}$.

• Пусть $W_i = ((h_i f_i)(\varphi))(V)$.

• Подставив в качестве аргумента в (1) пространство V, мы получим

$$V = \mathrm{id}(V) = \left(\sum_{i=1}^{k}(h_i f_i)(\varphi)\right)(V) = \sum_{i=1}^{k}\Big((h_i f_i)(\varphi)\Big)(V) = \sum_{i=1}^{k} W_i. \qquad (2)$$

Утверждение

$W_i \subset V(\lambda_i)$.

Доказательство. • Пусть $y \in W_i$. Тогда $y = ((h_i f_i)(\varphi))(x)$, где $x \in V$. Следовательно,

$$(\varphi - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}(y) = \big((\varphi - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i} \cdot h_i(\varphi) \cdot f_i(\varphi)\big)(x) =$$

$$(h_i(\varphi))\Big(((\varphi-\lambda_i \mathrm{id})^{m_i} \cdot f_i(\varphi))(x)\Big) = (h_i(\varphi))\Big(\prod_{i=1}^{k}(\varphi-\lambda_i \mathrm{id})^{m_i}(x)\Big) =$$

$$(h_i(\varphi))((-1)^n \cdot (\chi_\varphi(\varphi))(x)) = (h_i(\varphi))(0) = 0,$$

так как $\chi_\varphi(\varphi)$ — нулевой оператор по теореме Гамильтона-Кэли.

• Мы использовали тот факт, что операторные многочлены от одного и того же оператора коммутируют. □

- Докажем утверждение 1 теоремы.
- По Теореме 12 сумма корневых подпространств оператора φ — прямая. Значит $\bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i) < V$.
- С другой стороны, мы знаем, $V = \sum_{i=1}^{k} W_i$.
- Но $\sum_{i=1}^{k} W_i$ — подмножество $\bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$, так как $W_i < V(\lambda_i)$.
- Это возможно лишь при $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$.
- Следовательно, $\dim(V) = \dim(\bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i)) = \sum_{i=1}^{k} \dim(V(\lambda_i))$.
- Вместе с этим, так как $\dim(W_i) \le \dim(V(\lambda_i))$,

$$\dim(V) = \dim(\sum_{i=1}^{k} W_i) \le \sum_{i=1}^{k} \dim(W_i) \le \sum_{i=1}^{k} \dim(V(\lambda_i)).$$

- Следовательно, для всех $i \in \{1, \dots, k\}$ мы имеем $\dim(V(\lambda_i)) = \dim(W_i)$, откуда ввиду $W_i \le V(\lambda_i)$ следует, что $W_i = V(\lambda_i)$.

• Докажем утверждение 2 теоремы.

• Так как мы доказали, что $W_i = V(\lambda_i)$, нам достаточно доказать, что W_i — φ-инвариантно.

• Проверим это. Действительно, пусть $y \in W_i$, тогда $y = ((h_i f_i)(\varphi))(x)$, где $x \in V$.

• Следовательно,

$$\varphi(y) = \varphi\Big(((h_i f_i)(\varphi))(x)\Big) = ((h_i f_i)(\varphi))(\varphi(x)) \in W_i,$$

так как $\varphi(x) \in V$, а $W_i = ((h_i f_i)(\varphi))(V)$. $\square$

Теорема 14

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ и

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

1) *Пусть $\varphi_i = \varphi|_{V(\lambda_i)}$. Тогда оператор $\varphi_i \in \mathrm{End}(V(\lambda_i))$ имеет единственное собственное число — λ_i.*

2) $\dim(V(\lambda_i)) = m_i$.

Доказательство. 1) • Подчеркнем, что формулировка пункта 1 корректна, так как $V(\lambda_i)$ — это φ-инвариантное пространство по Теореме 13.

• Предположим противное, пусть $\mu \in \mathrm{Spec}(\varphi_i)$, $\mu \neq \lambda_i$, а x — собственный вектор μ.

• Тогда $(\varphi - \mu\mathrm{id})(x) = 0$.

• С другой стороны, так как $x \in V(\lambda_i)$, мы имеем $(\varphi - \lambda_i\mathrm{id})^n(x) = 0$.

• Очевидно, многочлены $t - \mu$ и $(t - \lambda_i)^n$ взаимно просты, откуда по Лемме 8 имеем $x = 0$, противоречие с определением собственного вектора.

2) • По Теореме 13 $\quad V = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} V(\lambda_i)$.

• В каждом пространстве $V(\lambda_i)$ зафиксируем свой базис, пусть A_i — матрица отображения φ_i в этом базисе.

• По Лемме 5 тогда в базисе V, полученном объединением зафиксированных выше базисов, отображение φ имеет матрицу $A = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k)$.

• Пусть $n_i = \dim(V(\lambda_i))$. Тогда

$$(-1)^n \prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{m_i} = \chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n) =$$
$$\det\bigl(\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k) - t\cdot\mathrm{diag}(E_{n_1}, \dots, E_{n_k})\bigr) =$$
$$\det\bigl(\mathrm{diag}(A_1 - tE_{n_1}, \dots, A_k - tE_{n_k})\bigr) = \prod_{i=1}^{k}\det(A_i - tE_{n_i}) =$$
$$\prod_{i=1}^{k}\chi_{\varphi_i}(t). \qquad (*)$$

• По пункту 1, $\mathrm{Spec}(\varphi_i) = \{\lambda_i\}$.

• Тогда по Теореме 9 многочлен $\chi_{\varphi_i}(t)$ имеет единственный корень λ_i.

- По формуле $(*)$

$(-1)^n \prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^{k} \chi_{\varphi_i}(t)$.

- Так как для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ $\chi_{\varphi_i}(t)$ имеет единственный корень λ_i, остается единственная возможность:

$\chi_{\varphi_i}(t) = (-1)^{m_i}(t-\lambda_i)^{m_i}$.

- Подставим это в формулу $(*)$:

$$(-1)^n \prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^{k} \chi_{\varphi_i}(t) = \prod_{i=1}^{k}(-1)^{n_i}(t-\lambda_i)^{n_i}.$$

- Следовательно, $\dim(V(\lambda_i)) = m_i$. $\square$

Относительный базис

Определение

Пусть $U < V$.

• Вектора $e_1, \dots, e_s$ из V *линейно независимы над U*, если никакая их нетривиальная линейная комбинация не лежит в U.

• *Относительный базис* V над U — это $\dim(V) - \dim(U)$ линейно независимых над U векторов.

Свойство 1

$e_1, \dots, e_r \in V$ ЛНЗ над U, если и только если $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_r}$ ЛНЗ в факторпространстве V/U.

Доказательство. Очевидно ввиду того, что равенство нулю линейной комбинации $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_r}$ в V/U равносильно принадлежности U аналогичной линейно комбинации векторов $e_1, \dots, e_r$ в V. $\square$

Свойство 2

$e_1, \dots, e_r$ — относительный базис V над U, если и только если $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_r}$ — базис V/U.

Доказательство. К Свойству 1 нужно лишь добавить, что по доказанному в главе Линейные пространства $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$. □

Свойство 3

Относительный базис V над U — максимальное множество векторов из V, ЛНЗ над U.
Если $e_1, \dots, e_s \in V$ линейно независимы над U, то эти вектора можно дополнить до относительного базиса V над U.

Доказательство. Воспользуемся Свойствами 1 и 2 а также тем, что любое ЛНЗ множество в V/U можно дополнить до базиса. □

Разбиение корневого пространства на ядра

- Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)$, а m — кратность корня λ в характеристическом многочлене $\chi_\varphi(t)$.
- Тогда $\dim(V(\lambda)) = m$ по Теореме 14.
- Пусть $\psi = \varphi - \lambda \mathrm{id}$.
- Введем обозначения

$W_0 := \{0\}, \quad W_i := \ker(\psi^i)$ для $i \in \mathbb{N}$.

- Понятно, что $W_0 \le W_1 \le \dots \le W_n = V(\lambda)$ (последнее равенство следует из свойства корневых пространств).
- Пусть ℓ — минимальное такое натуральное число, что $W_\ell = V(\lambda)$.
- Так как $W_i \le V(\lambda)$, мы имеем $V(\lambda) = W_\ell = W_{\ell+1} = \dots$, поэтому, все последующие ядра после W_ℓ не будут меняться.
- Введем обозначения

$p_i := \dim(W_i)$ (здесь $i \in \{0, \dots \ell\}$),

$r_i := p_i - p_{i-1}$ (здесь $i \in \{1, \dots \ell\}$).

• Отметим, что количество векторов в относительном базисе W_ℓ по W_{t-1} равно

$$\dim(W_\ell) - \dim(W_{t-1}) = \sum_{i=t}^{\ell}(\dim(W_i) - \dim(W_{i-1})) = \sum_{i=t}^{\ell} r_i.$$

Лемма 9

Пусть $2 \le t \le \ell$ и у нас есть таблица, строки которой занумерованы числами от t до ℓ. В строке с номером s стоят вектора $e_1^s, \dots, e_{r_s}^s \in W_s$. Предположим, что для каждого $s \in \{t, \dots, \ell\}$ вектора в s строке ЛНЗ над W_{s-1}. Тогда все записанные в таблице вектора, а также $\psi(e_1^t)$, ..., $\psi(e_{r_t}^t)$ вместе ЛНЗ над W_{t-2}. В частности, эти вектора можно дополнить до относительного базиса W_ℓ над W_{t-2}.

Доказательство. • Предположим противное. Пусть

$$\sum_{s=t}^{\ell}\sum_{i=1}^{r_s}\alpha_i^s e_i^s + \sum_{j=1}^{r_t}\beta_j\psi(e_j^t) = w, \quad \text{где } w \in W_{t-2}, \qquad (*)$$

причем не все коэффициенты α_i^s и β_j равны 0.

• Разберем два случая: не все коэффициенты α_i^s равны 0 или все они равны 0.

Случай 1: не все α_i^s равны 0.

- Пусть q — наибольшее такое число, что существует отличный от 0 индекс α_i^q.
- Тогда $\alpha_i^s = 0$ при $s > q$ и в первой сумме из $(*)$ можно вести суммирование до q вместо ℓ.
- Подействуем на обе части $(*)$ оператором ψ^{q-1} и получим:

$$0 = \psi^{q-1}(w) = \sum_{j=1}^{r_t} \beta_j \psi^q(e_j^t) + \sum_{s=t}^{q} \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_i^s \psi^{q-1}(e_i^s) =$$

$$\sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q \psi^{q-1}(e_i^q) = \psi^{q-1}\left(\sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q e_i^q\right),$$

откуда следует, что $\sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q e_i^q \in W_{q-1}$, противоречие с условием.

Случай 2: все α_i^s равны 0.

- Тогда существует $\beta_j \neq 0$, а вся первая сумма из $(*)$ — нулевая и $(*)$ превращается в

$$w = \sum_{j=1}^{r_t} \beta_j \psi(e_j^t) = \psi(\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t).$$

- Тогда $0 = \psi^{t-2}(w) = \psi^{t-1}(\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t)$.

- Следовательно, $\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t \in W_{t-1}$, противоречие с условием. $\square$

Следствие 3

Для всех $t \in \{2, \dots, \ell\}$ выполнено $r_{t-1} \geq r_t$.

Доказательство. • Из Леммы 9 следует, что

$$r_t + \sum_{j=t}^{\ell} r_j \leq \dim(W_\ell) - \dim(W_{t-2}) = \sum_{j=t-1}^{\ell} r_j,$$

откуда следует, что $r_{t-1} \geq r_t$. $\square$

Лемма 10

Пусть $2 \leq t \leq \ell$ и у нас есть таблица, строки которой занумерованы числами от t до ℓ. В строке с номером i стоят вектора $e_1^i, \dots, e_{r_i}^i \in W_i$. Предположим, что для каждого $i \in \{t, \dots, \ell\}$ вектора в строках с i по ℓ образуют относительный базис W_ℓ над W_{i-1}. Пусть T — множество, состоящее из всех векторов в таблице, а также $\psi(e_1^t)$, ..., $\psi(e_{r_t}^t)$. Тогда вектора из T можно дополнить до относительного базиса W_ℓ над W_{t-2}, дописав $r_{t-1} - r_t$ векторов из W_{t-1}.

Доказательство. • Пусть $s = r_{t-1} - r_t$. По Следствию 3, $s \geq 0$.

• По Лемме 9 вектора из T ЛНЗ над W_{t-2} и их можно дополнить до относительного базиса W_ℓ над W_{t-2} векторами $x_1, \dots, x_s \in W_\ell$. (Нужно в точности s векторов, как видно из вычислений Следствия 3.)

• Так как $e_1^t, \dots, e_{r_t}^t$, ..., $e_1^\ell, \dots, e_{r_\ell}^\ell$ — относительный базис W_ℓ по W_{t-1}.

• Поэтому, в факторпространстве W_ℓ / W_{t-1} для любого $q \in \{1, \dots, s\}$ мы имеем

$$\overline{x}_q = \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \beta_{i,q}^j \overline{e}_i^j, \quad \text{где все } \beta_{i,q}^j \in K.$$

• Положим $y_q = x_q - \sum\limits_{j=t}^{\ell} \sum\limits_{i=1}^{r_j} \beta^j_{i,q} e^j_i.$ $(*)$

• Тогда $\overline{y}_q = 0$ в W_ℓ/W_{t-1}, значит, $y_q \in W_{t-1}$.

• Докажем, что $y_1, \dots, y_s \in W_{t-1}$ также дополняют вектора из T до относительного базиса W_ℓ над W_{t-2}.

• Для этого достаточно показать, что все эти вектора ЛНЗ над W_{t-2}. Пусть это не так и

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i y_i + \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \delta^j_i e^j_i + \sum_{i=1}^{r_t} \alpha_i \psi(e^t_i) = w \in W_{t-2},$$

где все $\gamma_i, \alpha_i, \delta^j_i \in K$ и не все они равны 0.

• Из Леммы 9 следует, что не все $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ равны 0.

• Подставив для каждого y_i выражение $(*)$, после приведения подобных членов, получим

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i x_i + \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \varepsilon^j_i e^j_i + \sum_{i=1}^{r_t} \alpha_i \psi(e^t_i) = w \in W_{t-2},$$

где $\varepsilon^j_i = \delta^j_i + \sum\limits_{q=1}^{s} \gamma_q \beta^j_{i,q}$.

• Но по выбору $x_1, \dots, x_s$ тогда $\gamma_1 = \dots = \gamma_s = 0$, противоречие.

Разбиение корневого пространства собственного числа оператора на Жордановы клетки

• Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)$, а m — кратность корня λ в характеристическом многочлене $\chi_\varphi(t)$.

• Тогда $\dim(V(\lambda)) = m$.

• Мы научимся выбирать такой базис корневого пространства $V(\lambda)$, в котором матрица $\varphi|_{V(\lambda)}$ имеет достаточно простой вид — диагональ из *Жордановых клеток*.

• Пусть $\psi = \varphi - \lambda\mathrm{id}$.

• Введем обозначения $W_0 = \{0\}$, $W_i = \ker(\psi^i)$ для $i \in \mathbb{N}$.

• Мы доказали, что существует такое минимальное натуральное число ℓ, что $W_\ell = V(\lambda)$, тогда $W_0 \le W_1 \le \dots \le W_\ell = V(\lambda) = W_{\ell+1} = W_{\ell+2} = \dots$.

• Введем обозначения $p_i = \dim(W_i)$ (здесь $i \in \{0, \dots \ell\}$), а $r_i = p_i - p_{i-1}$ (здесь $i \in \{1, \dots \ell\}$).

• По Следствию 3, $1 \le r_\ell \le r_{\ell-1} \dots \le r_1$, следовательно,

$$\ell \le \sum_{i=1}^{\ell} r_i = \sum_{i=1}^{\ell}(p_i - p_{i-i}) = p_\ell - p_0 = \dim(W_\ell) = \dim(V(\lambda)) = m.$$

Шаг 1: ищем базисы ядер W_i.

• Сначала находим базис W_1 (назовем его B_1), потом дополняем его до базиса W_2 (назовем это дополнение B_2), и так далее, пока не дополним до базиса W_ℓ (последнее дополнение — это B_ℓ).

Шаг 2: построение и заполнение лестницы.

• Высота лестницы ℓ, на i ступени будут вектора из W_i, ширина i ступени равна r_i.

• Суммарное количество клеток в лестнице равно m. В строках с s по ℓ будет $r_s + \dots + r_\ell$ векторов — как раз столько, сколько должно быть в относительном базисе W_ℓ над W_{s-1}.

• Опишем процедуру заполнения лестницы. Будем делать это сверху вниз так, чтобы под каждым вектором e был выписан вектор $\psi(e)$ и для всех $s \in \{1, \dots, \ell\}$ вектора в строках с s по ℓ образовывали относительный базис W_ℓ по W_{s-1}.

W_ℓ	e_1^ℓ	e_2^ℓ	$e_{r_\ell}^\ell$					
$W_{\ell-1}$	$\psi(e_1^\ell)$	$\psi(e_2^\ell)$	$\psi(e_{r_\ell}^\ell)$	$e_{r_\ell+1}^{\ell-1}$	$e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1}$			
$W_{\ell-2}$	$\psi^2(e_1^\ell)$	$\psi^2(e_2^\ell)$	$\psi^2(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi(e_{r_\ell+1}^{\ell-1})$	$\psi(e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1})$	$e_{r_{\ell-2}}^{\ell-2}$		
			$\dots$					
W_1	$\psi^{\ell-1}(e_1^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_2^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_\ell+1}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-3}(e_{r_{\ell-2}}^{\ell-1})$	$\dots$	$e_{r_1}^1$

База: ℓ строка. В верхней строке лестницы выписываем вектора из $B_\ell = \{e_1^\ell, \dots, e_{r_\ell}^\ell\}$.

Переход $s \to s-1$. Пусть строки s, …, ℓ уже заполнены, обозначим вектора в s строке через e_1^s, …, $e_{r_s}^s$.

• В $s-1$ строке под каждым вектором e_i^s запишем вектор $\psi(e_i^s)$ (очевидно, $e_i^s \in W_s \ \Rightarrow\ \psi(e_i^s) \in W_{s-1}$).

• По Лемме 10 все выписанные вектора можно дополнить до относительного базиса W_ℓ по W_{s-2}, добавив недостающие $r_{s-1} - r_s$ векторов из W_{s-1} (на самом деле эти вектора можно выбрать даже из B_{s-1}).

W_ℓ	e_1^ℓ	e_2^ℓ	$e_{r_\ell}^\ell$					
$W_{\ell-1}$	$\psi(e_1^\ell)$	$\psi(e_2^\ell)$	$\psi(e_{r_\ell}^\ell)$	$e_{r_\ell+1}^{\ell-1}$	$e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1}$			
$W_{\ell-2}$	$\psi^2(e_1^\ell)$	$\psi^2(e_2^\ell)$	$\psi^2(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi(e_{r_\ell+1}^{\ell-1})$	$\psi(e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1})$	$e_{r_{\ell-2}}^{\ell-2}$		
			$\dots$					
W_1	$\psi^{\ell-1}(e_1^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_2^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_\ell+1}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-3}(e_{r_{\ell-2}}^{\ell-1})$	$\dots$	$e_{r_1}^1$

• Итак, пусть все клетки лестницы заполнены.

• Спустившись до первого этажа, мы получим относительный базис W_ℓ над $W_0 = \{0\}$, а это просто базис W_ℓ, который нам и будет нужен — так называемый жорданов базис.

Шаг 3: Жордановы клетки собственного числа λ.

• Рассмотрим любой столбец лестницы. Пусть $e_1, \dots, e_q$ — его вектора снизу вверх ($e_1 \in W_1$).

• По построению, тогда $\psi(e_1) = 0$ и $\psi(e_i) = e_{i-1}$ для $i \in \{2, \dots .q\}$.

• Пусть $U_q = \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_q)$. Тогда из доказанного понятно, что U_q — ψ-инвариантное подпространство и линейное отображение $\psi|_{U_q}$ имеет в базисе $e_1, \dots, e_q$ матрицу

$$J_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(над главной диагональю — диагональ из 1, все остальные 0 — вспомните, как строится матрица отображения!).

• Так как $\varphi = \psi + \lambda \mathrm{id}$, это отображение имеет в базисе $e_1, \dots, e_q$ матрицу

$$J_q(\lambda) = J_q + \lambda E_q = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

(на главной диагонали λ, над главной диагональю — диагональ из 1, все остальные 0).

• Матрица $J_q(\lambda)$ называется *жордановой клеткой размера q числа λ*, а U_q — *клеточным пространством* оператора φ.

• Таким образом, каждому столбцу лестницы для числа λ соответствует жорданова клетка, а их общее количество равно длине нижней строки лестницы — это, кстати, $\dim(V_\lambda)$ (размерность собственного пространства).

• Суммарный размер клеток с собственным числом λ — это количество клеток в лестнице, то есть, m — кратность λ.

• Размер максимальной клетки с числом λ — это высота лестницы ℓ.

Построение ЖНФ оператора φ.

Теорема 15

Пусть V — линейное пространство над полем K, $\dim(V) = n$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ и характеристический многочлен раскладывается на линейные множители:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Тогда оператор φ в некотором базисе имеет Жорданову нормальную форму — матрицу, на диагонали которой стоят жордановы клетки, а все остальные элементы равны 0.

Доказательство. • Нужно выполнить описанный алгоритм для каждого собственного числа.

• В итоге матрица оператора, суженного на каждое из корневых пространств, будет объединением нескольких жордановых клеток.

• По Теореме 13, в нашем случае V есть прямая сумма корневых пространств всех собственных чисел.

• Тогда, объединив построенные базисы для всех корневых пространств, мы получим *жорданов базис*, в котором матрица оператора и будет *Жордановой нормальной формой*.

• У ЖНФ оператора на главной диагонали стоят собственные числа, на диагонали над главной в некоторых клетках стоят 1, а во всех остальных клетках стоят 0.