

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЖОРДАНОВОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ОПЕРАТОРА И ЖОРДАНОВА БАЗИСА.

Будем считать, что мы имеем дело с линейным пространством над \mathbb{C} , чтобы характеристический многочлен нашего оператора раскладывался на линейные множители, и было выполнено условие теоремы о существовании ЖНФ.

Как мы обычно задаем линейный оператор φ ? Квадратной матрицей A , только не очень хорошей. Ниже по пунктам изложим алгоритм построения ЖНФ. В лекциях можно увидеть подробности.

0. ПОИСК СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ.

Нужно посчитать $\chi_\varphi(t) = \det(A - tE)$ и найти его корни. Как это сделать? Ну, мы же умеем считать определитель!

Итак, теперь мы знаем $\text{Spec}(\varphi)$ и кратности всех собственных чисел. Дальнейшие действия проводятся отдельно для каждого собственного числа.

Пусть $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ имеет кратность m . Далее мы покажем, что делать с числом λ .

1. ПОСТРОЕНИЕ ЯДЕР W_i .

Пусть $\psi = \varphi - \lambda \text{id}$, тогда его матрица $B = A - \lambda E_n$. Введем обозначения $W_0 = \{0\}$, $W_i = \ker(\psi^i)$ для $i \in \mathbb{N}$. Мы знаем что существует такое минимальное натуральное число ℓ , что $W_\ell = V(\lambda)$, тогда $W_0 \leq W_1 \leq \dots \leq W_\ell = W_{\ell+1} = W_{\ell+2} = \dots$ (далее W_ℓ искать ядра бессмысленно).

Сначала ищем W_1 . Как? Очень просто — решаем ОСПУ $Bx = 0$: приводим к трапецевидной форме, находим базис B_1 пространства решений - именно он нам и нужен. Для этого проще всего подставить значение любой одной *главной переменной* (помните, что это такое? если нет, смотрите лекции), равное 1, а остальных главных переменных — равное 0, остальные переменные вычисляем. Для самоконтроля полезно понимать, что $|B_1| = \dim(W_1) = n - \text{rank}(B)$.

Далее ищем W_2 — решаем систему $B^2x = 0$ (кстати, матрицу B придется возвести в квадрат). Все решения из B_1 автоматом подходят. Нужно найти B_2 — дополнение B_1 до базиса W_2 . Систему решаем также, там появляются новые главные переменные, в них 1 и нужно подставлять, чтобы получить вектора из B_2 (разумеется, эти вектора неединственны!). Проверяем себя — общее количество векторов $|B_1| + |B_2| = \dim(W_2) = n - \text{rank}(B^2)$.

И так далее — ищем B_3, \dots, B_ℓ . Как понять, что дальше искать не нужно? Очень просто — когда мы получим очередное пространство W_ℓ с $\dim(W_\ell) = m$.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЛЕСТНИЦЫ.

Для этого вычисляем $r_i = \dim(W_i) - \dim(W_{i-1})$ и лестница готова — см. лекцию и картинку. На верхнем этаже лестницы расставляем вектора из B_ℓ . Далее заполняем лестницу — это подробно описано в пункте 2 билета 21 лекции. На всякий случай — все вектора полученного базиса должны быть ЛНЗ (если это не так, Вы ошиблись с выбором одного из векторов на каком-то шаге заполнения лестницы, нужно выбрать другой вектор).

3. ЖНФ И ЖОРДАНОВ БАЗИС.

Итак, все лестницы построены. Теперь берем лестницу для каждого числа и выписываем вектора каждого ее столбца снизу вверх. В ЖНФ на диагонали каждому столбцу лестницы для λ (скажем, высоты q) будет соответствовать блок в виде жордановой клетки $q \times q$ с λ на диагонали.

В ответе должна быть ЖНФ и правильный порядок векторов жорданова базиса (соответствующий выписанной ЖНФ). Однако, меня интересуют все шаги алгоритма, скажем базисы ядер W_i ! Не нужно использовать программы, считающие ЖНФ и Жорданов базис. Вы должны показать знание алгоритма. Калькулятор и даже компьютер для перемножения матриц использовать можно, хотя я выдам такие, что и в уме легко перемножаются, если знать, как это делается.

Каждый находит свое личное задание дальше, и решает именно его. Решения нужно высылать мне. С указанием фамилии и номера варианта.

УДАЧИ!