Алгебра. Глава 9. Квадратичные формы и скалярное произведение

Д. В. Карпов

2024

Квадратичные формы

• Здесь и далее K — поле характеристики не 2 (то есть, $2 \neq 0$ в поле K).

• Мы будем иметь дело с линейным пространством V над K с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$.

• Элементы V будут записываться как столбцы координат в этом базисе: $X = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Определение

Функция $f : V \to K$, заданная формулой

$$f((x_1, \dots, x_n)^T) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{i,j} x_i x_j,$$

где все коэффициенты $a_{i,j} \in K$, называется *квадратичной формой*.

• Зачем в определении фигурирует $2a_{i,j}x_ix_j$ при $i \neq j$? Для того, чтобы была возможность расписать этот член как $a_{i,j}x_ix_j + a_{j,i}x_jx_i$, где $a_{i,j} = a_{j,i}$.

• Рассмотрим *симметричную* матрицу $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in M_n(K)$ (то есть, удовлетворяющую условию $a_{i,j} = a_{j,i}$ для всех пар индексов) и вектор $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

• Тогда значение квадратичной формы f на векторе X может быть переписано как $f(X) = X^T AX$.

• Матрица A называется *матрицей квадратичной формы f*.

• Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса V?

• Пусть базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ меняется на $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, в котором координаты записываются как $X' = (x'_1, \ldots, x'_n)^T$ (мы считаем, что столбец координат без штрихов в старом базисе соответствует столбцу со штрихами в новом), а матрица квадратичной формы f обозначается A'.

• Это означает, что квадратичная форма f в исходном базисе записывается как $X^T AX$ а в новом базисе — как $(X')^T A'X'$.

• Как нам известно, изменение координат при замене базиса делается умножением на матрицу перехода.

- Пусть C — матрица перехода от $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ к $\{e_1, \dots, e_n\}$.
- Тогда $X = CX'$ и $X^TAX = (CX')^TA(CX') = (X')^T(C^TAC)X'$.
- Следовательно, $A' = C^TAC$.

Определение

- Квадратичной форма имеет *диагональный вид*, если она записывается $f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, то есть, ее матрица — диагональная.
- *Привести квадратичную форму к диагональном виду* значит найти такой базис, в котором эта форма имеет диагональный вид.

Теорема 1

Любую квадратичную форму $f : V \to K$ можно привести к диагональному виду.

Доказательство. • Индукция по количеству переменных n.

• База $n = 1$ очевидна. Также утверждение очевидно в случае, когда все коэффициенты квадратичной формы равны 0 (такая форма уже имеет диагональный вид).

• Пусть $n > 1$, для меньшего числа переменных теорема доказана и мы рассматриваем в базисе $e_1, \dots, e_n$ квадратичную форму

$$f((x_1, \dots, x_n)^T) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{i,j} x_i x_j,$$

имеющую хотя бы один ненулевой коэффициент.

• Разберем два случая.

Случай 1: $a_{i,i} \neq 0$ для $i \in \{1, \dots, n\}$

- НУО $i = 1$. Рассмотрим члены f, содержащие x_1 — это $a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + \dots + 2a_{1,n}x_1x_n =$
$$a_{1,1}(x_1 + \tfrac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2 + \dots + \tfrac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n)^2 - a_{1,1}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}}x_i\right)^2. \qquad (*)$$
- Построим новый базис $e'_1 = e_1$ и $e'_i = e_i - \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}}e_1$ при $i \in \{2, \dots, n\}$. (Очевидно, вектора $e'_1, \dots e'_n$ — ЛНЗ, а значит, образуют базис n-мерного пространства.)
- Тогда вектор $(x_1, \dots, x_n)^T$ в исходном базисе в новом базисе имеет вид $(x'_1, x'_2 \dots, x'_n)^T$, где $x'_1 = x_1 + (\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2 + \dots + \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n)$ и $x'_i = x_i$ при $i \in \{2, \dots, n\}$.
- Поэтому, ввиду $(*)$ получаем
$$f(x_1, \dots, x_n) = a_{1,1}(x'_1)^2 + g(x'_2, \dots, x'_n),$$
где g — квадратичная форма, которую можно привести к диагональному виду по индукционному предположению.
- Сделаем это и оставим без изменений базисный вектор e'_1, в результате получится базис, в котором f имеет диагональный вид.

Случай 2: все коэффициенты $a_{i,i} = 0$

- Но есть ненулевой коэффициент — тогда не умаляя общности можно считать, что $a_{1,2} \neq 0$.
- Рассмотрим новый базис, в котором изменен только первый вектор: e'_1, e_2, e_3, $\dots$, e_n, причем $e'_1 = e_1 - e_2$.
- Нетрудно понять, что вектор с координатами $(x_1, \dots, x_n)^T$ в исходном базисе в новом базисе имеет вид $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$, где $x'_2 = x_2 + x_1$ и $x'_i = x_i$ при $i \neq 2$.
- Одночлен $2a_{1,2}x_1x_2 = 2a_{1,2}x'_1(x'_2 - x'_1)$ в новом базисе содержит $-2a_{1,2}(x'_1)^2$.
- В других одночленах $(x'_1)^2$ появиться не может, поэтому, мы получаем $a'_{1,1} = -2a_{1,2} \neq 0$ и попадаем в разобранный выше случай 1. $\square$

Вещественные квадратичные формы

• В этом разделе мы рассмотрим *вещественные* квадратичные формы, то есть, случай $K = \mathbb{R}$.

• Вещественные числа в первую очередь хороши тем, что на них есть отношение порядка больше-меньше.

• Следующую теорему называют *законом инерции квадратичных форм*.

Теорема 2

Пусть $f((x_1, \ldots, x_n)^T)$ — вещественная квадратичная форма, которая двумя способами приведена к диагональному виду:

$$g((y_1, \ldots, y_n)^T) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i^2 \text{ и } h((z_1, \ldots, z_n)^T) = \sum_{i=1}^{n} b_i z_i^2.$$

Тогда среди $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ поровну положительных коэффициентов. Также среди $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ поровну отрицательных коэффициентов, а значит, и поровну нулевых коэффициентов.

Доказательство. • Достаточно доказать равенство количеств положительных коэффициентов. Утверждение для отрицательных коэффициентов доказывается аналогично, после чего утверждение для нулевых выводится.

• Предположим противное, пусть, скажем, у g положительных коэффициентов меньше, чем у h.

• Можно занумеровать коэффициенты так, чтобы $a_1, \dots, a_p > 0$, $b_1, \dots, b_{p+q} > 0$, а все остальные коэффициенты не превосходили 0.

• По определению, диагональный вид квадратичной формы — это ее запись в другом базисе, то есть, существуют такие невырожденные матрицы перехода $C, D \in M_n(\mathbb{R})$, что $f((x_1., \dots x_n)^T) = a_1 y_1^2 + \dots + a_n y_n^2 = b_1 z_1^2 + \dots + b_n z_n^2$, где $(y_1, \dots, y_n)^T = C(x_1, \dots, x_n)^T$, $(z_1, \dots, z_n)^T = D(x_1, \dots, x_n)^T$.

• Попробуем подобрать такой ненулевой вектор $(x_1, \dots x_n)^T$, что для него $y_1 = \dots = y_p = z_{p+q+1} = \dots = z_n = 0$.

• Равенство нулю каждой координаты — это линейное уравнение на $x_1, \dots, x_n$, вместе получаем ОСЛУ с переменными $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} y_1 & = & c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,n}x_n = 0, \\ & & \dots \\ y_p & = & c_{p,1}x_1 + c_{p,2}x_2 + \dots + c_{p,n}x_n = 0, \\ z_{p+q+1} & = & d_{p+q+1,1}x_1 + d_{p+q+1,2}x_2 + \dots + d_{p+q+1,n}x_n = 0, \\ & & \dots \\ z_n & = & d_{n,1}x_1 + d_{n,2}x_2 + \dots + d_{n,n}x_n = 0. \end{cases}$$

• В полученной ОСЛУ n переменных и $n-q$ уравнений, а значит, существует ненулевое решение — вектор x^0, которому соответствуют

$Cx^0 = y^0 = (0,\dots,0,y_{p+1},\dots,y_n)$ и

$Dx^0 = z^0 = (z_1,\dots,z_{p+q},0,\dots,0)$.

• Тогда

$$f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i^2 = \sum_{i=p+1}^{n} a_i y_i^2 \le 0 \quad \text{и}$$

$$f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} b_i z_i^2 = \sum_{i=1}^{p+q} b_i z_i^2 \ge 0,$$

откуда следует, что $f(x^0) = 0$ и $z_1 = \dots = z_{p+q} = 0$.

• Таким образом, $z^0 = 0$, а это значит, что $D \cdot x^0 = 0$ для $x^0 \ne 0$, что для невырожденной матрицы D невозможно. Противоречие. $\square$

Положительно определенные квадратичные формы

• Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$.

Определение

Вещественная квадратичная форма $f : V \to \mathbb{R}$ называется *положительно определенной*, если для любого $x \in V$, $x \neq 0$ мы имеем $f(x) > 0$.

• На всякий случай заметим, что для квадратичной формы всегда выполнено $f(0) = f((0, \dots, 0)^T) = 0$.

Теорема 3

Пусть положительно определенная квадратичная форма $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ приведена к диагональному виду $a_1y_1^2 + \dots + a_ny_n^2$. Тогда все коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ положительны.

Доказательство. • Пусть это не так и, скажем, $a_1, \dots, a_p > 0$, $a_{p+1}, \dots, a_n \leq 0$, $p < n$.

• По определению, диагональный вид квадратичной формы — это ее запись в другом базисе.

• Это означает, что существуют такая невырожденная матрица перехода $C \in M_n(\mathbb{R})$, что

$$f((y_1., \dots y_n)^T) = a_1y_1^2 + \dots + a_ny_n^2, \quad (y_1, \dots, y_n)^T = C(x_1, \dots, x_n)^T.$$

• Попробуем подобрать такой ненулевой вектор $(x_1., \dots x_n)^T$, что для него $y_1 = \dots = y_p = 0$.

• Получаем ОСЛУ

$$\begin{cases} y_1 = c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,n}x_n = 0, \\ \dots \\ y_p = c_{p,1}x_1 + c_{p,2}x_2 + \dots + c_{p,n}x_n = 0. \end{cases}$$

• В этой ОСЛУ n переменных и $p < n$ уравнений, а значит, существует ненулевое решение — вектор x^0.

• Так как матрица C невырождена, вектор $Cx^0 = y^0 = (0, \dots, 0, y_{p+1}, \dots, y_n)$ не равен 0.

• Тогда

$$f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i^2 = \sum_{i=p+1}^{n} a_i y_i^2 \le 0,$$

что противоречит положительной определенности f. $\square$

Кривые второго порядка на плоскости

• Кривая второго порядка — это все точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, являющиеся решением уравнения $a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'x + e'y = f'$, где коэффициенты $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$, где среди кожффициентов a, b, c есть ненулевой.

• Для начала, уменьшим число ненулевых коэффицйиентов. Невырожденной заменой координат можно привести квадратичную форму $a'x^2 + b'y^2 + c'xy \quad (*)$ к диагональному виду (при этом, изменятся коэффициенты d', e', f').

• Таким образом, достаточно рассматривать уравнения вида $ax^2 + by^2 + c''x + e''y = f''$.

• Легко видеть, что хотя бы один из коэффициентов a, b не равен 0.

• При этом, вне зависимости от способа приведения квадратичной формы $(*)$ к диагональном у виду количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов среди a и b по закону инерции будет одним и тем же.

• Рассмотрим случаи.

Случай 1. Коэффициенты a, b одного знака

- НУО $a, b > 0$ (иначе умножим уравнение на -1).
- Так как $ax^2 + by^2 + e''x + d''y = f'' \iff$

$$a(x + \frac{d''}{2a})^2 + b(y + \frac{e''}{2b})^2 = f'' - \frac{(d'')^2}{4b^2} - \frac{(e'')^2}{4a^2}, \quad (\#)$$

- после замены переменных получится уравнение вида $ax^2 + by^2 = f \quad (1)$.
- При $f < 0$ уравнение (1) не имеет решений.
- При $f = 0$ единственное решение — точка $(0, 0)$.
- При $f > 0$ получаем кривую на плоскости, которая называется эллипсом.
- От исходной системы координат на плоскости мы перешли к итоговой с помощью обратимого линейного оператора (замены базиса) и *параллельного переноса* на вектор $(\frac{d''}{2a}, \frac{e''}{2b})$ (в переходе (#)).
- Оба преобразования плоскости обратимы, поэтому в случаях, когда получается точка или пустое множество, то же самое получается и в исходных координатах.

Случай 2. Коэффициенты a, b разных знаков

- НУО $a > 0$ и $b < 0$ (иначе умножим уравнение на -1).
- Аналогично случаю 1, заменой переменных уравнение приводится к виду $ax^2 + by^2 = f$.
- Поделим x на $\sqrt{a}$, а y на $\sqrt{-b}$ и получим в новых координатах уравнение

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = f. \qquad (2)$$

- При $f = 0$ решение этого уравнения — две прямые $x = y$ и $x = -y$.
- При $f \neq 0$ сделаем еще одну невырожденную замену переменных: $x' := x + y,\ y' := x - y$ и получим уравнение

$$x'y' = f \qquad (2').$$

- Такая кривая на плоскости называется гиперболой.
- От исходной системы координат на плоскости мы перешли к итоговой с помощью обратим Эти преобразования плоскости обратимы и переводят прямую в прямую.
- Поэтому в случае, когда получаются две пересекающиеся прямые, то же самое получается и в исходных координатах.

Случай 3. Один из коэффицинтов a, b равен 0

- НУО $a > 0$ и $b = 0$ (иначе переобозначим переменные и при необходимости умножим уравнение на -1).
- Мы имеем уравнение $\quad ax^2 + d'x + e'y = f'. \quad (*)$
- Аналогично случаю 1, заменой переменных уравнение приводится к виду

$$dy = ax^2 + f. \qquad (3)$$

- При $d \neq 0$ уравнение (3) задает на плоскости параболу.
- При $d = 0$ решение получаем $ax^2 = -f$. При $f > 0$ решений нет, при $f = 0$ решения — прямая $x = 0$, а при $f < 0$ — две параллельные прямые $x = \sqrt{-f}$ и $x = -\sqrt{-f}$.
- От исходной системы координат на плоскости мы перешли к итоговой с помощью обратимых линейных операторов и параллельного переноса.
- Эти преобразования плоскости обратимы и переводят прямую в прямую, а параллельные прямые – в параллельные прямые.
- Поэтому в случаях, когда нет решений, получается прямая или две параллельные прямые, то же самое получается и в исходных координатах.

Вещественное скалярное произведение

Определение

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$, а отображение $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x, y, z \in V$;

2°. $(x, y) = (y, x)$ для любых $x, y \in V$;

3°. $(x, x) > 0$ для любого $x \in V$, отличного от 0.

Тогда $(\ ,\ )$ называется *вещественным скалярным произведением*, а V — *пространством со скалярным произведением*, или *Евклидовым пространством*.

Комплексное скалярное произведение

Определение

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, а отображение $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $x, y, z \in V$;

2°. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для любых $x, y \in V$;

3°. Для любого $x \in V$, отличного от 0, число (x, x) — вещественное и положительное.

Тогда $(\ ,\ )$ называется *комплексным скалярным произведением,* а V — *пространством со скалярным произведением*, или *Эрмитовым пространством*.

Свойство 1

Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$. Тогда $(z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}(z, x) + \overline{\beta}(z, y)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $x, y, z \in V$.

Доказательство. $(z, \alpha x + \beta y) = \overline{(\alpha x + \beta y, z)} = \overline{\alpha(x, z) + \beta(y, z)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{(x, z)} + \overline{\beta} \cdot \overline{(y, z)} = \overline{\alpha}(z, x) + \overline{\beta}(z, y).$ □

• Многие свойства вещественного и комплексного скалярного произведения аналогичны, мы будем их доказывать одинаково, используя обозначение $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Свойство 2

Пусть V — пространство со скалярным произведением над K, $x \in V$. Тогда $(0, x) = (x, 0) = 0$ для любого $x \in V$.

Доказательство. Ввиду определения, нам достаточно доказать, что $(0, x) = 0$. Это очевидно следует из $(0, x) = (0 + 0, x) = (0, x) + (0, x)$. □

Определение

Пусть $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, V — пространство со скалярным произведением над K, а $e_1, \dots, e_n$ — базис V. *Матрица Грама* базиса $e_1, \dots, e_n$ — это матрица $G = (g_{i,j})_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$, где $g_{i,j} = (e_i, e_j)$.

• Непосредственно из определений можно вывести свойства матрицы Грама.

Свойство 3

Пусть V — пространство со скалярным произведением над K. Тогда на главной диагонали матрицы Грама стоят положительные вещественные коэффициенты.

Свойство 4

Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$. Тогда матрица Грама симметрична (то есть, $G^T = G$).

Свойство 5

Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$. Тогда $G^T = \overline{G}$ (то есть, $g_{i,j} = \overline{g_{j,i}}$).

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца над $\mathbb{R}$

Теорема 4

Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$, $x, y \in V$. Тогда $(x, y)^2 \le (x, x) \cdot (y, y)$.

Доказательство. • По определению вещественного скалярного произведения, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \le (\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y). \qquad (*)$$

• При фиксированных x и y мы имеем квадратный трехчлен относительно λ, у которого, очевидно, не более одного корня, а значит, его дискриминант неположителен:

$$4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \le 0,$$

откуда следует доказываемое неравенство. $\square$

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца над $\mathbb{C}$

Теорема 5

Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$, $x, y \in V$. Тогда $|(x,y)|^2 \le (x,x)\cdot(y,y)$.

Доказательство. • Пусть $(x,y) = |(x,y)|e^{i\varphi}$.

• Тогда $\overline{(x,y)} = |(x,y)|e^{-i\varphi}$.

• По определению комплексного скалярного произведения и сказанному выше, для любого $t \in \mathbb{R}$

$$0 \le (tx+e^{i\varphi}y, tx+e^{i\varphi}y) = (tx,tx)+(e^{i\varphi}y,tx)+(tx,e^{i\varphi}y)+(e^{i\varphi}y,e^{i\varphi}y) =$$
$$t^2(x,x)+t\cdot\left((e^{i\varphi}y,x)+(x,e^{i\varphi}y)\right)+e^{i\varphi}\cdot\overline{e^{i\varphi}}(y,y) =$$
$$t^2(x,x)+t\cdot\left(e^{i\varphi}\overline{(x,y)}+\overline{e^{i\varphi}}(x,y)\right)+N(e^{i\varphi})(y,y) =$$
$$t^2(x,x)+t\cdot\left(e^{i\varphi}e^{-i\varphi}|(x,y)|+e^{-i\varphi}e^{i\varphi}|(x,y)|\right)+(y,y) =$$
$$t^2(x,x)+2t|(x,y)|+(y,y).$$

• При фиксированных x и y мы имеем квадратный трехчлен относительно t, у которого, очевидно, не более одного корня, а значит, его дискриминант неположителен:

$$4|(x,y)|^2 - 4(x,x)(y,y) \le 0.$$

Длина вектора

Определение

Пусть $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, V — пространство со скалярным произведением над K, $x \in V$. Длина вектора x — это $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$.

• Длина ненулевого вектора — положительное вещественное число.

Свойство 1

Если $\lambda \in K$, *то* $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

Доказательство. (при $K = \mathbb{R}$ считаем, что $\overline{\lambda} = \lambda$)

$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \cdot \overline{\lambda} \cdot (x,x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$. $\square$

Свойство 2

Если $x, y \in V$, *то* $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Доказательство. • $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) =$
$(x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x) \quad (*)$.

• При $K = \mathbb{R}$ по Теореме 4 имеем $(x, y) = (y, x) \le \|x\| \cdot \|y\|$ и $(*)$ продолжается так:

$\|x + y\|^2 \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$,

откуда следует доказываемое неравенство.

• При $K = \mathbb{C}$ по Теореме 5 имеем
$(x, y) + (y, x) = 2\mathrm{Re}((x, y)) \le 2|(x, y)| \le 2\|x\| \cdot \|y\|$ и $(*)$
продолжается точно так же, как в вещественном случае. □

Свойство 3

(Неравенство треугольника). Если $x, y, z \in V$, *то*
$\|x - y\| \le \|x - z\| + \|z - y\|$.

Доказательство. Так как $x - y = (x - z) + (z - y)$, утверждение следует из Свойства 2. □

Ортогональный и ортонормированный базис

• В этом разделе $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а V — пространство со скалярным произведением.

Определение

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V.

1) Базис называется *ортогональным*, если его матрица Грама диагональна и *ортонормированным*, если его матрица Грама равна E_n.

2) Векторы $x, y \in V$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

• Ортогональность базиса эквивалентна тому, что $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ (то есть, любые два различных базисных вектора ортогональны).

• Базис является ортонормированным, если и только если он ортогональный и $(e_i, e_i) = 1$ для каждого базисного вектора.

Свойство 1

Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{R}$, $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис V, $x, y \in V$, причем $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ — координаты векторов в указанном базисе. Тогда $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Доказательство.

$$(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

так как $(e_i, e_i) = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. □

Свойство 2

Пусть V — пространство со скалярным произведением над $\mathbb{C}$, $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис V, $x, y \in V$, причем $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ — координаты векторов в указанном базисе. Тогда $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}$.

Доказательство.

$$(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_j} (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i},$$

так как $(e_i, e_i) = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. □

Ортогонализация Грама-Шмидта

• Это в точности алгоритм, из которого состоит доказательство следующей теоремы.

Теорема 6

Пусть V — пространство со скалярным произведением над K, а $e_1, \dots, e_m \in V$. Тогда существует такой ортогональный набор векторов $f_1, \dots, f_m \in V$, что для любого $p \in \{1, \dots, m\}$ выполнено $\mathrm{Lin}(f_1, \dots, f_p) = \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_p)$.

Доказательство. • Будем доказывать утверждение индукцией по m.

База для $m = 1$ очевидна: возьмем $f_1 = e_1$.

Переход. Пусть набор $f_1, \dots, f_k$ уже построен.

• Будем искать следующий вектор в виде
$f_{k+1} = e_{k+1} + \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_i$.

• Так как $\mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Lin}(f_1, \dots, f_k)$ и по построению f_{k+1}, мы имеем

$$\mathrm{Lin}(f_1, \dots, f_k, f_{k+1}) = \mathrm{Lin}(f_1, \dots, f_k, e_{k+1}) = \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}).$$

• Если $f_i = 0$, коэффициент α_i может быть любым. Пусть $f_i \neq 0$.

• Для того, чтобы найти коэффициент α_i (где $i \in \{1, \ldots, k\}$), заметим, что

$$0 = (f_{k+1}, f_i) = (e_{k+1}, f_i) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (f_j, f_i) = (e_{k+1}, f_i) + \alpha_i (f_i, f_i),$$

откуда $\alpha_i = \frac{-(e_{k+1}, f_i)}{(f_i, f_i)}$ (напомним, что $(f_i, f_i) \neq 0$). □

• Если вектора $e_1, \ldots, e_k$ (где $k \leq m$) попарно ортогональны, то алгоритм ортогонализации их не изменит и мы получим $f_i = e_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Следствие 2

Любое подпространство $W < V$ имеет ортогональный и ортонормированный базис.

Доказательство. • Рассмотрим базис W и подвергнем его ортогонализации — получится ортогональный базис $e_1, \ldots, e_n$.

• Базис $e'_1, \ldots, e'_n$, где $e'_i = \frac{1}{\sqrt{(e_i, e_i)}} e_i$ — ортонормированный (извлечение квадратного корня корректно, так как (e_i, e_i) — положительное вещественное число). □

Ортогональное дополнение

• В этом разделе $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а V — пространство над K со скалярным произведением.

Определение

Для $W < V$ определим *ортогональное дополнение* как $W^{\perp} = \{x \in V \ : \ \forall w \in W \ (x, w) = 0\}$.

Теорема 7

Пусть $W < V$, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$. *Тогда* $\dim(W^{\perp}) = n - m$, $W \oplus W^{\perp} = V$ *и* $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Доказательство. • Пусть $f_1, \dots, f_m$ — ортогональный базис W, который мы уже научились строить.

• Дополним его до базиса V, пусть получился базис $f_1, \dots, f_m$, $e_{m+1}, \dots, e_n$.

• Применим к этом базису ортогонализацию Грама-Шмидта, пусть в результате получились векторы $f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n$ (напомним, что первые m векторов не изменились!).

• Рассмотрим $U = \mathrm{Lin}(f_{m+1}, \dots, f_n)$.

Утверждение 1

$U \subset W^{\perp}$.

Доказательство. • Пусть $u \in U$, $w \in W$. Нам нужно доказать, что $(w,u) = 0$.

• Тогда $w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$ и $u = \sum_{j=m+1}^{n} \beta_j f_j$, где $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$.

• Так как для любых $i \in \{1,\dots,m\}$ и $j \in \{m+1,\dots,n\}$ мы имеем $(f_i, f_j) = 0$,

$$(w,u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{\beta_j} \cdot (f_i, f_j) = 0.$$

□

Утверждение 2

$U \supset W^{\perp}$.

Доказательство. • Пусть $x \in W^{\perp}$. Тогда $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$.

• Для любого $s \in \{1,\dots,m\}$ имеем

$$0 = (x, f_s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i, f_s) = \alpha_s (f_s, f_s),$$

откуда следует, что $\alpha_s = 0$. Но тогда $x \in U$.

□

- Таким образом, $W^{\perp} = U = \mathrm{Lin}(f_{m+1}, \dots, f_n)$ и $\dim(W^{\perp}) = n - m$.
- Так как $f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n$ — базис V, то 0 единственным образом представляется в виде линейной комбинации этих векторов.
- Следовательно, $V = \mathrm{Lin}(f_1, \dots, f_m) \oplus \mathrm{Lin}(f_{m+1}, \dots, f_n) = W \oplus W^{\perp}$.
- Теперь возьмем ортогональный базис $f_{m+1}, \dots, f_n$ пространства $W^{\perp}$, дополним его векторами $f_1, \dots, f_m$ до базиса V.
- Этот базис и так ортогонален, и мы аналогично сказанному выше получаем, что $(W^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Lin}(f_1, \dots, f_m) = W$. $\square$

Свойства ортогонального дополнения

Свойство 1

Пусть $W, U < V$, причем $W \subset U$. Тогда $U^\perp \subset W^\perp$.

Доказательство. Непосредственное следствие определения.

Свойство 2

Пусть $W, U < V$. Тогда $(W+U)^\perp = W^\perp \cap U^\perp$.

Доказательство. • По Свойству 1, $(W+U)^\perp \subset W^\perp$ и $(W+U)^\perp \subset U^\perp$, следовательно, $(W+U)^\perp \subset W^\perp \cap U^\perp$.

• Наоборот, пусть $a \in W^\perp \cap U^\perp$.

• Рассмотрим любой вектор $x \in W+U$. Тогда $x = y+z$, где $y \in W$ и $z \in U$.

• Так как $a \in W^\perp$, мы имеем $(a,y) = 0$. Так как $a \in U^\perp$, мы имеем $(a,z) = 0$.

• Но тогда $(a,x) = (a,y+z) = (a,y)+(a,z) = 0$. Следовательно, $W^\perp \cap U^\perp \subset (W+U)^\perp$. $\square$

Свойство 3

Пусть $W, U < V$. *Тогда* $(W \cap U)^\perp = W^\perp + U^\perp$.

Доказательство. • По Свойству 2 мы имеем

$(W^\perp + U^\perp)^\perp = (W^\perp)^\perp \cap (U^\perp)^\perp = W \cap U$.

• Следовательно,

$(W \cap U)^\perp = \big((W^\perp + U^\perp)^\perp\big)^\perp = W^\perp + U^\perp$. □

Теорема 8

Пусть V и U — два пространства со скалярным произведением над $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\dim(V) = \dim(U) = n$. Тогда существует изоморфизм (то есть, биективное линейное отображение) $\varphi : V \to U$, сохраняющий скалярное произведение (то есть, $(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$ для любых $x, y \in V$).

Доказательство. • Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис V, а $f_1, \dots, f_n$ — ортонормированный базис U.

• Зададим φ формулами $\varphi(e_i) = f_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

• Если $(x_1, \dots, x_n)^T$ — координаты $x \in V$ в базисе $e_1, \dots, e_n$, то $\varphi(x)$ имеет такие же координаты в базисе $f_1, \dots, f_n$.

• Аналогично, пусть $(y_1, \dots, y_n)^T$ — координаты $y \in V$ в базисе $e_1, \dots, e_n$ и $\varphi(y)$ в базисе $f_1, \dots, f_n$.

• Если $K = \mathbb{R}$, то $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = (\varphi(x), \varphi(y))$.

• Если $K = \mathbb{C}$, то $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i} = (\varphi(x), \varphi(y))$. $\square$