

Алгебра. ИТМО. 1 курс, 2023-24

Глава 0. Основные понятия

1. Кольцо, поле, типы колец.
2. Свойства 0, 1 и обратных элементов. Вычитание и деление.
3. Подкольцо и подполе.
4. Гомоморфизмы колец. Ядро и образ гомоморфизма.
5. Типы гомоморфизмов. Мономорфизм и ядро.
6. Отображение, обратное к изоморфизму — изоморфизм.
7. Изоморфные кольца.
8. Идеал. Ядро гомоморфизма является идеалом.
9. Идеал и обратимые элементы. Идеалы в поле. Гомоморфизм из поля — инъекция.
10. Идеал, порожденный множеством элементов. Главный идеал.
11. Сравнения по модулю идеала. Вычеты.
12. Факторкольцо
13. Теорема о гомоморфизме колец.
14. Дроби: эквивалентность, простейшие свойства. Сложение и умножение дробей.
15. Поле частных.
16. Вложение кольца в поле частных.
17. Характеристика поля.
18. Теорема о подполе.

1. Комплексные числа

1. Вещественная и мнимая часть, умножение, сложением, норма, модуль.
2. Поле комплексных чисел.
3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Изменение модуля и аргумента при перемножении комплексных чисел. Формула Муавра.
4. Вложение вещественных чисел в комплексные.
5. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из 1.

2. Целые числа

1. Делимость. Свойства. Теорема о делении с остатком
2. НОД. Свойства.
3. Алгоритм Евклида. Следствия из алгоритма Евклида.
4. Линейное представление НОД.
5. НОД нескольких чисел через НОД двух чисел. Линейное представление НОД нескольких чисел.
6. Взаимно простые числа. Свойства.
7. Простые числа, свойства. Бесконечность количества простых.
8. Основная теорема арифметики в \mathbb{Z} .
9. Каноническое разложение. Количество натуральных делителей числа.
10. Представление НОД чисел через их канонические разложения.
11. Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными.
12. Идеалы в \mathbb{Z}
13. Линейное представление НОД: доказательство существования с помощью идеала.
14. Сравнения по модулю натурального числа, свойства. Вычеты.
15. Полная система вычетов, свойства.
16. Приведенная система вычетов, свойства.
17. Теорема Эйлера.
18. Мультипликативность функции Эйлера.
19. Функция Эйлера: значение на степени простого числа, явный вид.

20. Сумма функции Эйлера по делителям числа.
21. Кольцо вычетов и его обратимые элементы. Поле вычетов по простому модулю.
22. Алгоритм поиска обратного вычета. Решение сравнения с одним неизвестным.
23. Делимость на попарно взаимно простые числа.
24. Китайская теорема об остатках.
25. Алгоритмы поиска решения для КТО.
26. Функция Мёбиуса. Сумма функции Мёбиуса по промежуточным делителям.
27. Формула обращения Мёбиуса, аддитивный вариант.
28. Вывод формулы для функции Эйлера из формулы обращения Мёбиуса.
29. Формула обращения Мёбиуса, мультипликативный вариант.
30. Сумма мультипликативной функции по делителям числа мультипликативна.
31. Сумма натуральных делителей числа.
32. Первообразные корни из 1 в \mathbb{C} .

3. Многочлены над полем

1. Сложение и умножение многочленов. Степень многочлена. Свойства.
2. Кольцо многочленов.
3. Вложение K в $K[t]$. Константы. Ассоциированные многочлены.
4. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов над полем.
5. Делимость многочленов. Свойства.
6. Идеалы в кольце многочленов над полем.
7. НОД в кольце многочленов над полем: теорема о линейном представлении.
8. Свойства НОДа в кольце многочленов над полем.
9. Вычисление НОДа нескольких многочленов через НОДы двух.
10. Взаимно простые многочлены. Свойства.
11. Неприводимые многочлены. Свойства.
12. Основная теорема арифметики в кольце многочленов над полем. Каноническое разложение.
13. Значение многочлена в точке. Корень многочлена. Теорема Безу.
14. Кратность корня. Теорема о сумме кратностей корней.
15. Производная многочлена. Производная суммы и произведения.
16. Производная многочлена, раскладываемого на линейные множители.
17. Определение кратности корня многочлена с помощью производной.
18. Основная теорема алгебры (формулировка). Неприводимые многочлены в $\mathbb{C}[t]$, разложение на линейные множители многочлена в $\mathbb{C}[t]$.
19. Сопряженные корни. Теорема о корнях многочлена с вещественными коэффициентами.
20. Неприводимые многочлены в $\mathbb{R}[t]$, разложение на неприводимые множители многочлена в $\mathbb{R}[t]$.
21. Теорема Виета.
22. Интерполяция: формула Лагранжа.
23. Метод интерполяции по Ньютону.
24. Рациональные функции над полем. Правильные дроби и их свойства.
25. Разложение правильной дроби в сумму правильных дробей, знаменатели которых — степени неприводимых многочленов.
26. Разложение правильной дроби в сумму простейших.
27. Связь задачи разложения правильной дроби в сумму простейших с интерполяцией. Критерий отсутствия кратных корней.
28. Поле \mathbb{C} , как факторкольцо $\mathbb{R}[x]$.
29. Многочлен деления круга. Представление $t^n - 1$ в виде произведения многочленов деления круга.
30. Многочлен деления круга: формула, целые коэффициенты.

4. Многочлены и теория чисел

1. Показатель, к которому принадлежит вычет. Свойства.
2. Количество корней многочлена $t^d - 1$ в \mathbb{Z}_p , где $p - 1 \nmid d$.
3. Количество вычетов, принадлежащих к показателю d .
4. Первообразный корень по простому модулю и их количество. Структура приведенной системы вычетов.
5. Квадратичные вычеты и невычеты в \mathbb{Z}_p , их количества.
6. Умножение квадратичных вычетов и невычетов на квадратичные вычеты и невычеты.
7. Решение квадратных уравнений в \mathbb{Z}_p .
8. Символ Лежандра. Свойства. $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$. Вычисление $\left(\frac{-1}{p}\right)$.
9. Формула $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{2ax}{p}\right]}$.
10. Формула $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{ax}{p}\right]}$ при нечетном a и вычисление $\left(\frac{2}{p}\right)$.
11. Квадратичный закон взаимности Гаусса.
12. Лемма Гаусса и следствие о содержании произведения многочленов.
13. Лемма о связи разложений многочлена с целыми коэффициентами на множители в $\mathbb{Q}[x]$ и в $\mathbb{Z}[x]$. Эквивалентность неприводимости в $\mathbb{Z}[x]$ и в $\mathbb{Q}[x]$.
14. ОТА в $\mathbb{Z}[x]$.
15. Критерий Эйзенштейна.
16. Свойства рациональных корней и значений в целых точках многочленов с целыми коэффициентами.
17. Разностный многочлен.

5. Линейные пространства

1. Линейное пространство. Свойства.
2. Линейное подпространство.
3. Линейная комбинация, линейная оболочка. Порождающая система векторов.
4. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов и их свойства.
5. Однородные системы линейных уравнений: приведение к ступенчатому виду, нетривиальное решение.
6. Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций.
7. Базис, размерность. Корректность определения размерности. Разложение по базису.
8. Существование базиса в конечно порожденном пространстве. Выделение базиса из конечной порождающей системы.
9. Дополнение до базиса линейно независимой системы. в конечномерном пространстве.
10. Три эквивалентных определения базиса.
11. Сумма и пересечение линейных пространств.
12. Размерность суммы двух линейных пространств.
13. Прямая сумма. Свойство прямой суммы.
14. Критерий прямой суммы.
15. Размерность и базис прямой суммы конечного числа пространств.
16. Аффинные подпространства. Свойства.
17. Факторпространство и его размерность.