

Алгебра. Глава 1. Комплексные числа.

Д. В. Карпов

2023

Определение

- Множество **комплексных чисел** состоит из упорядоченных пар вещественных чисел:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- Сложение: $(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$.
- Умножение: $(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$.

Определение

- Пусть $z = (a, b) \in \mathbb{C}$.
- Вещественная часть** z — это $\operatorname{Re}(z) := a$.
- Мнимая часть** z — это $\operatorname{Im}(z) := b$.
- Комплексное сопряжение**: $\bar{z} := (a, -b)$.
- Норма** z — это $N(z) := a^2 + b^2$.
- Модуль** z — это $|z| := \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Очевидно, $\overline{\bar{z}} = z$.

Теорема 1

\mathbb{C} — поле.

Доказательство. • 1) и 2) Так как сложение в \mathbb{C} — покомпонентное, ассоциативность и коммутативность наследуются из \mathbb{R} .

• 3) **Ноль** в \mathbb{C} — это $0 := (0, 0)$.

• 4) **Обратный элемент по +.** Для $z = (a, b)$ положим $-z := (-a, -b)$.

• 7) **Коммутативность умножения:**

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba') = \\ (a'a - b'b, a'b + b'a) = (a', b') \cdot (a, b).$$

• 5) Достаточно проверить одну **дистрибутивность** (так как умножение коммутативно):

$$(a, b) \cdot ((c_1, d_1) + (c_2, d_2)) = (a, b) \cdot (c_1 + c_2, d_1 + d_2) = \\ (ac_1 + ac_2 - bd_1 - bd_2, ad_1 + ad_2 + bc_1 + bc_2) = \\ (ac_1 - bd_1, ad_1 + bc_1) + (ac_2 - bd_2, ad_2 + bc_2) = (a, b) \cdot (c_1, d_1) + (a, b) \cdot (c_2, d_2).$$

- 6) **ассоциативность умножения:**

$$\begin{aligned}((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \cdot (a_3, b_3) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot (a_3, b_3) = \\(a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3, a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3).\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что при другом порядке получится то же самое (в вещественную часть попадают сомножители с четным числом b , в мнимую — с нечетным, знак — получается там, где более одной b).

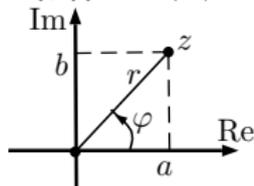
- 8) **Единица:** это $1 := (1, 0)$.
- 9) **Обратный элемент по \cdot .** Для $z = (a, b)$ положим $z^{-1} := (\frac{a}{N(z)}, \frac{-b}{N(z)})$. Проверяем:

$$zz^{-1} = (a, b) \cdot \left(\frac{a}{N(z)}, \frac{-b}{N(z)}\right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{N(z)}, \frac{-ab + ba}{N(z)}\right) = (1, 0).$$



Геометрическая интерпретация \mathbb{C} и тригонометрическая запись

- Рассмотрим декартову систему координат в \mathbb{R}^2 , по оси абсцисс будем откладывать вещественную часть, а по оси ординат — мнимую. Тогда комплексное сопряжение — симметрия относительно оси абсцисс.
- Для числа $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ тогда $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — расстояние от начала координат до z .
- **Аргумент** z — это направленный угол $\arg(z) = \varphi$ от оси абсцисс до луча Oz против часовой стрелки. Вычисляется с точностью до прибавления $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
- Пара (r, φ) однозначно задает точку z .
- $a = r \cos(\varphi)$, $b = r \sin(\varphi)$.
- **Тригонометрическая форма записи** комплексного числа:
 $z = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$.
- Если $z = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$, то $|z| = r$, $\arg(z) = \varphi$.



Теорема 2

Пусть $x, y \in \mathbb{C}$. Тогда $|xy| = |x||y|$ и $\arg(xy) = \arg(x) + \arg(y)$.

Доказательство. • Пусть $x = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$, а
 $y = (p \cos(\psi), p \sin(\psi))$. Тогда

$$\begin{aligned} xy = & \\ & (rp(\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)), rp(\cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi))) = \\ & (rp \cos(\varphi + \psi), rp \sin(\varphi + \psi)). \end{aligned}$$

• Следовательно, $|xy| = rp$ и $\arg(xy) = \varphi + \psi$. □

Теорема 3

Формула Муавра. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $|z^n| = |z|^n$ и
 $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$.

Доказательство. Индукция по n . База $n = 1$ очевидна.

Переход $n \rightarrow n + 1$.

• Пусть $|z| = r$, $\arg(z) = \varphi$ и утверждение доказано для n , то
есть, $|z^n| = r^n$ и $\arg(z^n) = n\varphi$.

• По Теореме 2 $|z^{n+1}| = |z||z^n| = r \cdot r^n = r^{n+1}$ и
 $\arg(z^{n+1}) = \arg(z) + \arg(z^n) = \varphi + n\varphi = (n+1)\varphi$. □

Лемма 1

Отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, заданное формулой $f(a) = (a, 0)$ — мономорфизм.

Доказательство. • Очевидно, f — инъекция.

• Нужно проверить, что это гомоморфизм. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b).$$

$$\bullet f(ab) = (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a)f(b). \quad \square$$

• Очевидно, $\text{Im}(f) \simeq \mathbb{R}$. Таким образом, \mathbb{C} имеет подполе $\text{Im}(f)$, изоморфное \mathbb{R} . В дальнейшем мы будем отождествлять каждое вещественное число a с комплексным $(a, 0)$.

• Теперь можно сказать, что для любого $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ выполнено:

$$z \cdot \bar{z} = N(z) = N(\bar{z}) \text{ (все это равно по } a^2 + b^2) \text{ и}$$

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) = 2\text{Re}(\bar{z}) \text{ (все это равно по } 2a).$$

• Сопряженные комплексные числа $z, \bar{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ — корни квадратного уравнения с вещественными коэффициентами $t^2 - 2\text{Re}(z) \cdot t + N(z) = 0$.

Извлечение корня из комплексного числа

- Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ фиксированы, $a \neq 0$. Решим уравнение $z^n = a$.
- Будем использовать представление комплексных чисел через модуль и аргумент. Тогда $a = (r, \varphi)$ (параметры даны) и $z = (p, \psi)$ (эти параметры мы ищем).
- По формуле Муавра, $p = \sqrt[n]{r}$.
- С аргументом сложнее. По формуле Муавра, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ (напомним, что аргумент вычисляется с точностью до $2\pi k$). Поделив на n , получаем

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}. \quad (1)$$

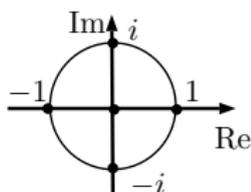
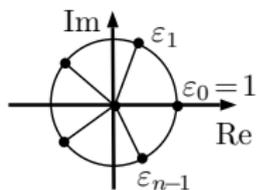
- При $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ в (1) получается n разных аргументов.
- Каждое число $k \in \mathbb{Z}$ можно представить в виде $k = qn + r$, где $0 \leq r < n$ (это теорема о делении с остатком). Тогда $\frac{2\pi k}{n} = \frac{2\pi r}{n} + 2\pi q$, а это тот же аргумент, что и $\frac{2\pi r}{n}$.
- Таким образом, корень n степени извлекается из $a \neq 0$ извлекается ровно n способами.

Корни из 1

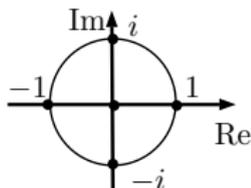
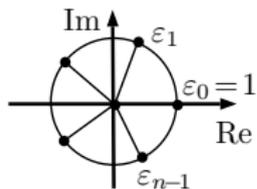
- Отдельно рассмотрим **корни n степени из 1** — решения уравнения $z^n = 1$.
- Из сказанного выше следует, что модуль всех корней из 1 равен 1. Так как $\arg(1) = 0$, все различные аргументы считаются по формуле

$$\psi_k = \frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где } k \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (1)$$

- Обозначим их $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ (корень ε_k имеет аргумент ψ_k).
- Корни из 1 степени n лежат на окружности радиуса 1 в вершинах правильного n -угольника, одна из которых — в 1.
- По формуле Муавра $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Значит, все корни из 1 — это степени ε_1 .



- На рисунке справа изображены корни степени 4 из 1. Один из них — это $i = (0, 1)$ ($\arg(i) = \frac{\pi}{2}$).
- Остальные корни из 1 степени 4 — это $-1 = i^2$, $-i = i^3$ и $1 = i^4$.
- Комплексное число $z = (a, b)$ может быть записано в виде $z = a + bi$, который многим из вас более привычен.
- Еще одно часто встречающееся обозначение — комплексное число z с $|z| = 1$ и $\arg(z) = \alpha$ часто записывают в виде $z = e^{\alpha i}$.
- Таким образом, $e^{\alpha i} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.



Материалы курса можно найти вот здесь:

`logic.pdmi.ras.ru/~dvk/ITMO/Algebra`