# Алгебра. Глава 5. Линейные пространства

Д. В. Карпов

2023

## Определение

Пусть $K$ — поле, $V$ — множество, и определены операции $+: V \times V \to V$ и $\cdot : K \times V \to V$, удовлетворяющие следующим условиям.

1) *Ассоциативность сложения.* $\forall a, b, c \in V \quad (a+b)+c = a+(b+c)$.

2) *Коммутативность сложения.* $\forall a, b \in V \quad a+b = b+a$.

3) *Ноль.* $\exists 0 \in V$ такой, что $\forall a \in V \quad a+0 = a$.

4) *Обратный элемент.* $\forall a \in V \ \exists -a \in V$ такой, что $a+(-a) = 0$.

5) *Дистрибутивность.* $\forall \alpha, \beta \in K$ и $\forall a \in V$ выполнено $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$.

6) *Дистрибутивность.* $\forall \alpha \in K$ и $\forall a, b \in V$ выполнено $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$.

7) *Ассоциативность умножения.* $\forall \alpha, \beta \in K$ и $\forall a \in V$ выполнено $\alpha(\beta a) = (\alpha \cdot \beta)a$.

8) *Умножение на 1.* $\forall a \in V$ выполнено $1 \cdot a = a$.

Тогда мы будем говорить, что $V$ — *линейное пространство* над полем $K$, а элементы $V$ называть *векторами*.

• Как правило, мы будем обозначать векторы строчными латинскими буквами, а числа из поля — греческими.

• 0-вектор $(0 \in V)$ и $0 \in K$ — разные нули, хоть мы и обозначаем их одинаково.

## Свойство 1

*Ноль-вектор единственен*

Доказательство. Пусть есть два ноль-вектора: $0_1$ и $0_2$. Тогда $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. □

## Свойство 2

*Обратный вектор $-a$ всегда единственен.*

Доказательство. Пусть $a_1$ и $a_2$ — два обратных вектора к $a \in V$. Тогда $a_1 + a = a + a_2 = 0$, откуда $a_1 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = a_2$. □

## Определение

Для $a, b \in V$ определим $a - b := a + (-b)$.

## Свойство 3

*Для любого $a \in V$ выполнено $0 \cdot a = 0$ (слева 0-число, справа 0-вектор).*

Доказательство. $0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Вычтем из левой и правой части $0 \cdot a$ и получим то, что нужно. □

## Свойство 4

*Для любого $a \in V$ выполнено $-a = (-1) \cdot a$.*

Доказательство.

- $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1-1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$.
- По Свойству 2, обратный вектор единственен. Значит, $-a = (-1) \cdot a$. □

# Линейное подпространство

## Определение

Если $U, V$ — линейные пространства над полем $K$, $U \subset V$, причем операции сложения и умножения в $U$ и $V$ одинаковы. Тогда $U$ — линейное подпространство $V$, а $V$ — линейное надпространство $U$.

## Лемма 1

*Пусть $V$ — линейное пространство над полем $K$, $U \subset V$, причем $U$ замкнуто по сложению векторов и умножению на число (то есть, $\forall \alpha \in K$, $\forall a, b \in U$ выполнено $a + b \in U$ и $\alpha a \in U$). Тогда $U$ — линейное подпространство $V$ (со сложением и умножением из $V$).*

Доказательство. • При выполнении этих условий, $+ : U \times U \to U$ и $\cdot : K \times U \to U$.

• Отметим, что для любого $a \in U$ выполнено $-a \in U$ и $0 = a - a \in U$.

• Теперь несложно понять, $U$ — линейное пространство над $K$ со сложением и умножением из $V$ (6 свойств из определения наследуются из $V$, существование 0-вектора и обратного элемента обосновано выше). $\square$

# Линейная комбинация, линейная оболочка



## Определение

Пусть $V$ — линейное пространство над полем $K$.

1) Пусть $x_1, \dots, x_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ —*линейная комбинация* векторов $x_1, \dots, x_n$. Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если не все $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ нули.

2) Пусть $M \subset V$. *Линейная оболочка* множества $M$ — это множество $\mathrm{Lin}(M)$ всех линейных комбинаций векторов из $M$ (с любым количеством векторов).

## Свойство 1

*Если $M \subset V$, то и $\mathrm{Lin}(M) \subset V$.*

Доказательство. Несложно проверить, что линейная комбинация векторов линейного пространства $V$ всегда лежит в $V$. $\square$

## Свойство 2

*Для любого $M \subset V$, $\mathrm{Lin}(M)$ — линейное подпространство $V$.*

Доказательство. • Достаточно проверить замкнутость по сложению и умножению.

• Пусть $x_1, \dots, x_n \in M$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда

$$\beta(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = (\beta\alpha_1)x_1 + \dots + (\beta\alpha_n)x_n \in \mathrm{Lin}(M).$$

• Пусть, кроме того, $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$. Тогда

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)x_n \in \mathrm{Lin}(M).$$

(Здесь достаточно проверить сложение линейных комбинаций одних и тех же векторов, так как в линейную комбинацию можно добавить отсутствующие в ней вектора с нулевыми коэффициентами.) □

## Определение

1) Пусть $V$ — линейное пространство над полем $K$ и $M \subset V$. Если $\mathrm{Lin}(M) = V$, то $M$ — *порождающая система векторов* пространства $V$.

2) Пространство $V$ называется *конечно порожденным*, если оно имеет конечную порождающую систему векторов.

• В основном, мы будем изучать конечно порожденные линейные пространства.

## Определение

Пусть $V$ — линейное пространство над полем $K$.

• Вектора $x_1, \dots, x_n \in V$ называются *линейно зависимыми* (коротко: ЛЗ), если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная 0. (То есть, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ не все равны 0, а $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$.) Если такой комбинации нет, то вектора $x_1, \dots, x_n \in V$ называются *линейно независимыми* (коротко: ЛНЗ).

• Бесконечное множество векторов называется *линейно зависимым*, если из них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную 0 и *линейно независимым*, если нельзя.

## Свойства ЛЗ и ЛНЗ множеств векторов

### Свойство 0

*Пусть $V$ — линейное пространство над полем $K$, $0 \in M \subset V$. Тогда множество векторов $M$ ЛЗ.*

Доказательство. Есть нетривиальная линейная комбинация $1 \cdot 0 = 0$. $\square$

### Свойство 1

*Если множество векторов ЛЗ, то любое его надмножество тоже ЛЗ.*

Доказательство. Можно не использовать добавленные вектора в линейных комбинациях. $\square$

### Свойство 2

*Если множество векторов ЛНЗ, то любое его подмножество тоже ЛНЗ.*

Доказательство. Убрав некоторые вектора из множества, мы не добавим новых линейных комбинаций. $\square$

## Свойство 3

*Если $x_1, \dots, x_n \in V$ ЛЗ, то среди них есть вектор, который является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. • Пусть $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, НУО $\alpha_n \neq 0$.

• Тогда

$$x_n = \frac{-\alpha_1}{\alpha_n} x_1 + \dots + \frac{-\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1} \in \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_{n-1}). \qquad \square$$

## Свойство 4

*Если $x_1, \dots, x_n \in V$ ЛНЗ и $y \notin \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n)$, то $x_1, \dots, x_n, y$ — ЛНЗ.*

Доказательство. • Пусть $x_1, \dots, x_n, y$ — ЛЗ. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta y = 0$.

• Если $\beta = 0$, то не все $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ равны 0 и $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, а значит, $x_1, \dots, x_n$ ЛЗ, противоречие.

• Значит, $\beta \neq 0$. Тогда

$$y = \frac{-\alpha_1}{\beta} x_1 + \dots + \frac{-\alpha_n}{\beta} x_n \in \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n),$$

противоречие. $\square$

### Свойство 5

*Если* $x_1, \ldots, x_n \in V$ *ЛНЗ, а* $y \in V$ *таков, что* $x_1, \ldots, x_n, y$ *— ЛЗ, то* $y \in \mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Прямое следствие Свойства 4. □

## Системы линейных уравнений

### Определение

Пусть $K$ — поле, $a_{i,j} \in K$ (где $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$), $b_1, \ldots, b_n \in K$. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — неизвестные. Тогда система линейных уравнений (далее СЛУ) — это

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2, \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_n. \end{cases}$$

СЛУ называется однородной (далее ОСЛУ), если $b_1 = \cdots = b_n = 0$.

## Элементарные преобразования СЛУ

(I) Поменять местами два уравнения.

(II) К одному уравнению прибавить другое, умноженное на $\lambda \in K$.

(III) Умножить уравнение на $\lambda \in K$, отличное от 0.

• Везде умножение уравнения на число происходит вместе с правой частью.

### Лемма 2

1) *Элементарные преобразования всех трех типов обратимы, то есть имеют обратные элементарные преобразования.*
2) *Элементарные преобразования не меняют решений СЛУ.*

Доказательство. 1) • Элементарное преобразование типа (I) само себе обратно.

• Рассмотрим элементарное преобразование типа (II), пусть мы к $i$-му уравнению прибавили $j$-е, умноженное на $\lambda$.

• Тогда обратное преобразование — прибавить к $i$-му уравнению $j$-е уравнение, умноженное на $-\lambda$.

• Наконец, обратное преобразование к умножению уравнения на $\lambda \neq 0$ — умножить его же на $\lambda^{-1}$.

2) • Очевидно, элементарное преобразование системы оставляет все ее решения (все уравнения останутся верными).

• Так как такое преобразование обратимо, добавиться новые решения не могут — иначе проведем обратное преобразование, и все новые решения сохранятся. □

## Определение

ОСЛУ приведена к ступенчатому виду, если каждое уравнение, имеющее ненулевые коэффициенты, имеет вид

$$x_{s_i} + c_{i,s_i+1}x_{s_i+1} + \dots + c_{m,k}x_m = 0,$$

причем $s_1 < s_2 < \dots < s_k$ (где $k$ — наибольший номер уравнения, имеющего ненулевые коэффициенты).

## Лемма 3

*ОСЛУ можно привести элементарными преобразованиями к ступенчатому виду.*

Доказательство. • Индукция по количеству неизвестных.

*База* для одного неизвестного очевидна — наша система имеет вид $ax_1 = 0$.

• Если $a \neq 0$, то на $a$ можно поделить и получить $x_1 = 0$. Если же $a = 0$, система уже имеет ступенчатый вид.

*Переход.*

• Если все коэффициенты при $x_1$ равны 0, то достаточно привести к ступенчатому виду систему без $x_1$, что можно сделать по индукционному предположению.

• Если не все коэффициенты $a_{i,1}$ равны 0, то переставим уравнения (с помощью элементарных преобразований типа (I)) так, чтобы $a_{1,1} \neq 0$, после чего поделим первое уравнение на $a_{1,1}$ — оно примет нужный нам вид $x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,m}x_m = 0$.

• Теперь для всех $k \in \{2, \dots, n\}$ вычтем из $k$ уравнения новое первое уравнение, умноженное на $a_{k,1}$ — во всех уравнениях, кроме первого, исчезнет переменная $x_1$.

• Далее останется применить к системе из всех уравнений, кроме первого, индукционное предположение.

$\square$

## Лемма 4

*ОСЛУ, в которой неизвестных больше, чем уравнений, имеет нетривиальное решение (не все $x_i$ равны 0).*

Доказательство. • Приведем систему к ступенчатому виду.

• Будем считать, что обозначения как в определении. Пусть осталось $k$ уравнений с ненулевыми коэффициентами. Тогда $s_1 < s_2 < \dots < s_k$ — не более чем $n < m$ номеров переменных.

• Остались переменные с номерами не из $\{s_1, \dots, s_k\}$. Положим все их равными 1.

• После чего последовательно вычислим: сначала $x_{s_k}$, потом $x_{s_{k-1}}$, и так далее, $x_{s_1}$.

• Переменную $x_{s_i}$ мы вычисляем из $i$ уравнения:

$$x_{s_i} = -(c_{i,s_i+1}x_{s_i+1} + \dots + c_{i,m}x_m),$$

все значения в правой части уже известны. $\square$

## Лемма 5

*Пусть $V$ — линейное пространство над полем $K$, $n < m$, $a_1, \dots, a_n \in V$ и $y_1, \dots, y_m \in \mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_n)$. Тогда $y_1, \dots, y_m$ ЛЗ.*

Доказательство. • Пусть $y_1 = \beta_{1,1}a_1 + \dots + \beta_{n,1}a_n$, ..., $y_m = \beta_{1,m}a_1 + \dots + \beta_{n,m}a_n$.

• Мы хотим найти такие $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ (не все равные 0), что $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m = 0$. Это означает, что

$$0 = \lambda_1(\beta_{1,1}a_1 + \dots + \beta_{n,1}a_n) + \dots + \lambda_m(\beta_{1,m}a_1 + \dots + \beta_{n,m}a_n) = (\beta_{1,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{1,m}\lambda_m)a_1 + \dots + (\beta_{n,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{n,m}\lambda_m)a_n.$$

• Для равенства нулю этого выражения достаточно, чтобы были равны 0 коэффициенты при $a_1$, ..., $a_n$. Это дает нам ОСЛУ (относительно неизвестных $\lambda_1, \dots, \lambda_m$):

$$\begin{cases} \beta_{1,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{1,m}\lambda_m = 0, \\ \dots \\ \beta_{n,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{n,m}\lambda_m = 0. \end{cases}$$

• В этой ОСЛУ неизвестных больше, чем уравнений. Значит, она имеет нетривиальное решение — соответствующие $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ дают линейную зависимость $y_1, \dots, y_m$.

# Базис и размерность



## Определение

1) *Базис* линейного пространства — это линейно независимая порождающая система векторов.

2) *Размерность* линейного пространства $V$ (обозначение: $\dim(V)$) — это количество элементов в базисе.

Если пространство $V$ имеет бесконечный базис, то $\dim(V) = \infty$.)

Отдельно скажем о размерности пространства, состоящего из 0: $\dim(\{0\}) = 0$.

• Позже мы докажем существование базиса в конечно порожденном пространстве. А сейчас докажем корректность определения размерности.

## Лемма 6

*Размерность определена корректно, то есть, любые два базиса пространства $V$ имеют одно и то же число элементов (любые два бесконечных базиса мы считаем равными по количеству элементов.)*

Доказательство. • Пусть $V$ имеет два базиса с разным числом векторов. Рассмотрим меньший из них — скажем, $e_1, \dots, e_n$.

• Тогда все вектора большего базиса принадлежат $V = \mathrm{Lin}(e_1, \dots, e_n)$, а значит, больший базис ЛЗ по Лемме 5, противоречие. □

## Лемма 7

*Пусть* $e_1, \dots, e_n$ *— базис линейного пространства* $V$*. Тогда для любого* $x \in V$ *существует единственное представление в виде линейной комбинации* $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$*, где* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$*.*

Доказательство. • Так как базис является порождающей системой векторов, такое представление существует.

• Пусть есть два представления:
$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$.

• Тогда $(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0$.

• Так как базис ЛНЗ, отсюда следует, что $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$, то есть два наших представления одинаковы. $\square$

## Теорема 1

*Пусть $V$ — конечно порожденное линейное пространство над полем $K$. Тогда $V$ имеет базис. Более того, из любой конечной порождающей системы векторов $V$ можно выделить базис.*

Доказательство. • Пусть $a_1, \dots, a_n$ — любая конечная порождающая система $V$ (есть у конечно порожденного пространства).

• Если эти вектора ЛНЗ, то они — базис. Если же они ЛЗ, то по Свойству 3 ЛЗ векторов, один из них является линейной комбинацией остальных. Пусть, скажем, $a_n = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{n-1} a_{n-1}$.

• Докажем, что $a_1, \dots, a_{n-1}$ — тоже порождающая система векторов $V$. Пусть $x \in V$, тогда существует преставление

$$x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \alpha_n(\beta_1 a_1 + \dots + \beta_{n-1} a_{n-1}) = (\alpha_1 + \alpha_n \beta_1) a_1 + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n \beta_{n-1}) a_{n-1}.$$

• Таким образом, мы уменьшили порождающую систему на один вектор. Такие шаги не могут продолжаться бесконечно. Значит, в некоторый момент мы получим ЛНЗ порождающую систему векторов — то есть, базис.

## Теорема 2

*Пусть $V$ — конечно порожденное линейное пространство над полем $K$, а векторы $a_1, \dots, a_n$ ЛНЗ. Тогда эти векторы можно дополнить до базиса.*

Доказательство. • Если $a_1, \dots, a_n$ — порождающая система $V$, то это — базис.

• Иначе есть вектор $a_{n+1} \in V \setminus \mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_n)$.

• По свойству 4 ЛНЗ векторов, $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ ЛНЗ.

• Будем так действовать, пока это возможно.

• Пространство $V$ имеет конечную порождающую систему — скажем, из $m$ векторов. Тогда по Лемме 5 не существует множества более чем из $m$ ЛНЗ векторов.

• Значит, наш процесс должен закончиться и в некоторый момент мы получим линейно независимую порождающую систему векторов — то есть, базис. $\square$

## Теорема 3

*Пусть $V$ — конечно порожденное линейное пространство над полем $K$, а $e_1, \dots, e_n \in V$. Тогда следующие три утверждения равносильны.*

$1^\circ$ *$e_1, \dots, e_n$ — базис $V$.*

$2^\circ$ *$e_1, \dots, e_n$ — минимальная порождающая система векторов в $V$.*

$3^\circ$ *$e_1, \dots, e_n$ — максимальная ЛНЗ система векторов в $V$.*

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Если есть порождающая система $f_1, \dots, f_m$ из $m < n$ векторов, то $e_1, \dots, e_n \in \mathrm{Lin}(f_1, \dots, f_m)$ и по Лемме 5 вектора $e_1, \dots, e_n$ ЛЗ, что не так.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — минимальная порождающая система векторов в $V$. По Теореме 1 из этих векторов можно выбрать базис, который также является порождающей системой векторов. Значит, в нем не может быть менее $n$ векторов, то есть, $e_1, \dots, e_n$ — базис.

$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Если есть ЛНЗ система $f_1, \dots, f_m$ из $m > n$ векторов, то дополним ее до базиса (это можно сделать по Теореме 2). Тогда у $V$ существуют два базиса с разным числом векторов ($n$ и не менее чем $m$), что невозможно.

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — максимальная ЛНЗ система векторов в $V$. Ее можно дополнить до базиса, который тоже является ЛНЗ системой векторов, а значит, не может иметь более $n$ векторов. Следовательно, $e_1, \dots, e_n$ — базис. $\square$

# Пересечение линейных пространств.



## Лемма 8

*Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — множество линейных подпространств линейного пространства $V$ над полем $K$. Тогда $U = \bigcap\limits_{i\in I} U_i$ — тоже линейное подпространство $V$.*

Доказательство. • Достаточно проверить замкнутость по сложению и умножению на число.

• Пусть $a, b \in U$. Тогда для всех $i \in I$ мы имеем $a, b \in U_i$.

• Следовательно, для всех $i \in I$ мы имеем $a + b \in U_i$, откуда следует, что $a + b \in U$.

• Пусть $\lambda \in K$. Тогда для всех $i \in I$ мы имеем $\lambda a \in U_i$, откуда следует, что $\lambda a \in U$. $\square$

# Сумма линейных пространств.



### Определение

Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — множество линейных подпространств линейного пространства $V$ над полем $K$. Тогда $\sum\limits_{i\in I} U_i$ — это множество всех сумм вида $x_{i_1}+\dots+x_{i_n}$, где $i_j\in I$, $x_{i_j}\in U_{i_j}$ для всех $j\in\{1,\dots,n\}$ (число $n$ не фиксировано).

• Другими словами, сумма линейных подпространств $V$ — это множество всех конечных сумм элементов, взятых по одному из пространств, что мы складываем.

## Лемма 9

*Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — множество линейных подпространств линейного пространства $V$ над полем $K$. Тогда $U = \sum\limits_{i\in I} U_i$ — тоже линейное подпространство $V$.*

Доказательство. • Достаточно проверить замкнутость по сложению и умножению на число.

• Пусть $a, b \in U$. Тогда существуют представления

$$a = a_{i_1} + \dots + a_{i_n}, \qquad b = b_{i_1} + \dots + b_{i_n},$$

где $i_1, \dots, i_n \in I$, $a_{i_j}, b_{i_j} \in U_{i_j}$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$ (индексы в суммах для $a$ и $b$ можно считать одинаковыми: при необходимости можно дополнить суммы нулевыми слагаемыми).

• Тогда $a_{i_j} + b_{i_j} \in U_{i_j}$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$, откуда следует, что $a + b = (a_{i_1} + b_{i_1}) + \dots + (a_{i_n} + b_{i_n}) \in U$.

• Пусть $\lambda \in K$. Тогда $\lambda a_{i_j} \in U_{i_j}$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$, откуда следует, что $\lambda a = \lambda a_{i_1} + \dots + \lambda a_{i_n} \in U$. $\square$

# Размерность суммы двух линейных пространств



### Теорема 4

*Пусть $U, W$ — конечномерные линейные подпространства линейного пространства $V$ над полем $K$. Тогда* $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Доказательство. • Пусть $v_1, \dots, v_k$ — базис $U \cap W$. Дополним его до базиса $U$: $v_1, \dots, v_k$, $u_1, \dots, u_n$.

• Также дополним базис $U \cap W$ до базиса $W$: $v_1, \dots, v_k$, $w_1, \dots, w_m$.

• Тогда $\dim(U) = k + n$, $\dim(W) = k + m$, $\dim(U \cap W) = k$.

• Нам нужно доказать, что $\dim(U+W) = k + m + n$, для чего достаточно доказать, что $v_1, \dots, v_k$, $u_1, \dots, u_n$, $w_1, \dots, w_m$ — базис $U + W$.

## Утверждение 1

*$v_1, \dots, v_k$, $u_1, \dots, u_n$, $w_1, \dots, w_m$ — порождающая система векторов $U + W$.*

Доказательство. • Пусть $v \in U + W$, тогда $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$. Тогда существуют представления

$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$,

$w = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_k v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m$,

где $\alpha_1, \alpha'_1, \dots, \alpha_k, \alpha'_k, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m \in K$.

• Тогда $v = u + w = (\alpha_1 + \alpha'_1)v_1 + \dots + (\alpha_k + \alpha'_k)v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m$ — искомое представление. □

## Утверждение 2

*$v_1, \dots, v_k,\ u_1, \dots, u_n,\ w_1, \dots, w_m$ ЛНЗ.*

Доказательство. • Предположим, что

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m = 0.$

• Нам нужно доказать, что все коэффициенты в этом представлении равны 0. Перепишем его в виде

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n = x = -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_m w_m. \qquad (1)$$

• Тогда $x \in U$ (так как это линейная комбинация базисных векторов $U$) и $x \in W$ (так как это линейная комбинация базисных векторов $W$). Следовательно, $x \in U \cap W$.

• Значит, можно разложить $x$ по базису $U \cap W$:

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \qquad (2)$$

• Но (1) и (2) — два разложения $x$ по базису $U$, а такое разложение единственно. Значит, $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$.

• Теперь можно переписать (1) в виде

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = x = -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_m w_m. \qquad (3)$$

• Это два разложения $x$ по базису $W$, но такое разложение также единственно. Следовательно, $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$, что и требовалось доказать. □

• Из Утверждений 1 и 2 немедленно следует, что $v_1, \dots, v_k$, $u_1, \dots, u_n$, $w_1, \dots, w_m$ — базис $U + W$.

• Теорема доказана. □

# Внутренняя прямая сумма. Критерий прямой суммы.



### Определение

Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — множество линейных подпространств линейного пространства $V$ над полем $K$, $U = \sum_{i\in I} U_i$.

- Тогда $U$ — *прямая сумма*, если из $x_{i_1} + \dots + x_{i_n} = 0$ (где $i_1, \dots, i_n \in I$ — различные индексы, $x_{i_j} \in U_{i_j}$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$) следует, что $x_{i_1} = \dots = x_{i_n} = 0$.
- Обозначение: $U = \bigoplus\limits_{i\in I} U_i$.

## Свойство

*Пусть* $U = \bigoplus\limits_{i\in I} U_i$, $x \in U$, $x \neq 0$. *Тогда существует единственное представление вида* $x = x_{i_1} + \dots + x_{i_n}$, *где* $i_1, \dots, i_n \in I$ *— различные индексы,* $x_{i_j} \in U_{i_j}$ *и* $x_{i_j} \neq 0$ *для всех* $j \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. • Существование такого представления следует из определения суммы линейных пространств.

• Предположим, что есть два таких представления. Дополним их нулями так, чтобы суммировались элементы одних и тех же подпространств:

$$x = x_{i_1} + \dots + x_{i_n} = x'_{i_1} + \dots + x'_{i_n}.$$

• Тогда $0 = (x_{i_1} - x'_{i_1}) + \dots + (x_{i_n} - x'_{i_n})$.

• По определению прямой суммы, все слагаемые равны 0. Значит, $x_{i_1} = x'_{i_1}, \dots, x_{i_n} = x'_{i_n}$, то есть, наши представления совпадают. $\square$

# Критерий прямой суммы

## Теорема 5

*Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — множество линейных подпространств линейного пространства $V$ над полем $K$, $U = \sum\limits_{i\in I} U_i$. Для каждого $i \in I$ пусть $U_i' = \sum\limits_{j\in I,\, j\neq i} U_j$ (сумма всех подпространств, кроме $U_i$). Тогда $U = \bigoplus\limits_{i\in I} U_i$, если и только если $U_i \cap U_i' = \{0\}$ для каждого $i \in I$.*

Доказательство. $\Rightarrow$. • Предположим, что $U_i \cap U_i' \ni x$, $x \neq 0$ для некоторого $i \in I$.

• Из $x \in U_i'$ следует, что существует представление $x = x_{j_1} + \dots + x_{j_n}$, где $x_{j_s} \in U_{j_s}$, $j_s \neq i$ для всех $s \in \{1, \dots, n\}$.

• Тогда $-x \in U_i$ и $0 = (-x) + x_{j_1} + \dots + x_{j_n}$ — представление, которого не может быть по определению прямой суммы, противоречие.

$\Leftarrow$. • Предположим, что $U$ — не прямая сумма.

• Тогда существует представление $0 = x_{j_1} + \dots + x_{j_n}$, где $x_{j_s} \in U_{j_s}$, $x_{j_s} \neq 0$ для всех $s \in \{1, \dots, n\}$.

• Тогда $-x_{j_1} = x_{j_2} + \dots + x_{j_n} \in U_{j_1}'$, но при этом, очевидно, $-x_{j_1} \in U_{j_1}$. Таким образом, $U_{j_1} \cap U_{j_1}' \neq \{0\}$, противоречие. $\square$

## Теорема 6

*Пусть $U_1, \dots, U_n$ — линейные подпространства конечномерного линейного пространства $V$ над полем $K$, а $U = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} U_i$. Тогда $\dim(U) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_n)$.*

Доказательство. • Индукция по $n$.

База $n = 2$. В этом случае $U = U_1 \oplus U_2$ и $U_1' = U_2$. По критерию прямой суммы, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, следовательно, $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$ и $\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

*Переход $n-1 \to n$.* • Пусть $W = U_n' = U_1 + \dots + U_{n-1}$. Докажем, что сумма из определения $W$ прямая.

• Для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$ определим $W_i' = \sum\limits_{1 \le j \le n-1,\, j \ne i} U_j$. Тогда $W_i' \subset U_i'$.

• По Теореме 5, из $W_i' \cap U_i \subset U_i' \cap U_i = \{0\}$ следует, что $W$ — прямая сумма.

• Следовательно, $\dim(W) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_{n-1})$.

• Так как $W \cap U_n = U_n' \cap U_n = \{0\}$, сумма $U = W + U_n$ также прямая. Следовательно, $\dim(U) = \dim(W) + \dim(U_n) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_{n-1}) + \dim(U_n)$, что нам и нужно. $\square$

## Следствие 1

*Пусть* $U_1, \dots, U_n$ *— линейные подпространства конечномерного линейного пространства* $V$ *над полем* $K$*, а* $U = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} U_i$*. Для каждого* $i \in \{1, \dots, k\}$ *пусть* $e^i_1, \dots, e^i_{n_i}$ *— базис* $U_i$*. Тогда* $e^1_1, \dots, e^1_{n_1}, \dots, e^k_1, \dots, e^k_{n_k}$ *— базис* $U$*.*

Доказательство. • Докажем, что $e^1_1, \dots, e^1_{n_1}, \dots, e^k_1, \dots, e^k_{n_k}$ — порождающая система векторов $U$.

• Любой вектор $x \in U$ представим в виде $x = x_1 + \dots + x_k$, где $x_i \in U_i$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$.

• Вектор $x_i \in U_i$ можно разложить по базису $U_i$: $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n_i} \alpha^i_j e^i_j$.

• Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \alpha^i_j e^i_j\right)$ — искомое представление.

• Из любой порождающей системы векторов по Теореме 1 можно извлечь базис. Но количество векторов в базисе равно $\dim(U) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_k)$ — а именно столько векторов у нас и есть. Значит, наша система векторов и есть базис $U$. $\square$

# Аффинные подпространства.



## Определение

Пусть $U$ — линейное подпространство линейного пространства $V$ над полем $K$, $a \in V$. Тогда $U + a = \{x + a : x \in U\}$ — аффинное подпространство $V$. Положим $\dim(U + a) := \dim(U)$.

• Таким образом, аффинное подпространство — это сдвиг линейного подпространства на вектор.

• Простейший пример, показывающий что это такое. Пусть $V = \mathbb{R}^2$ — стандартная евклидова плоскость. Тогда линейные подпространства $V$ размерности 1 — это прямые, проходящие через 0, а аффинные подпространства — это все прямые.

• Здесь и далее $U$ — линейное подпространство линейного пространства $V$ над полем $K$, $a, b \in V$.

## Свойство 1

*$U + a = U + b$, если и только если $a - b \in U$.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Если $U + a = U + b$, то $a \in U + b$. Так как $a = b + (a - b)$, то $a - b \in U$.

$\Leftarrow$. • Пусть $a - b \in U$, а $x \in U + a$. Тогда существует такое $u \in U$, что $x = a + u$.

• Но $(a - b) + u \in U$ (линейное подпространство замкнуто по сложению), значит, $x = a + u = b + (a - b + u) \in U + b$. Таким образом, $U + a \subset U + b$.

• Так как $b - a \in U$, аналогично получается, что $U + b \subset U + a$. □

## Свойство 2

*Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, $x_1, \dots, x_n \in U + a$. Тогда $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in U + a$.*

Доказательство. • Пусть $x_i = u_i + a$, где $u_i \in U$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

• Тогда $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \in U$ и

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \lambda_1(u_1 + a) + \dots + \lambda_n(u_n + a) = (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)a = u + a \in U + a.$$ □

## Свойство 3

*Пусть* $W \subset V$ *таково, что для любых* $w_1, w_2, w_3 \in W$ *и таких* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$, *что* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, *выполнено* $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 \in W$. *Тогда* $W$ *— аффинное подпространство* $V$.

Доказательство. • Зафиксируем $a \in W$. Докажем, что $U = W - a$ — линейное подпространство $V$. Для этого достаточно проверить замкнутость $U$ по сложению векторов и умножению вектора на число.

• Пусть $x_1, x_2 \in U$. Тогда $x_1 = w_1 - a$, $x_2 = w_2 - a$, где $w_1, w_2 \in W$ и

$$x_1 + x_2 \in U \iff (w_1 - a) + (w_2 - a) \in U \iff (w_1-a)+(w_2-a)+a \in W \iff w_1+w_2-a \in W. \qquad (1)$$

• Последнее утверждение в (1) верно: пусть $w_3 = a$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, тогда по условию $1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + (-1) \cdot a \in W$.

- Пусть $\lambda \in K$. Тогда

$$\lambda x_1 \in U \iff \lambda(w_1-a) \in U \iff \lambda(w_1-a)+a \in W \iff \lambda w_1 + (1-\lambda)a \in W. \qquad (2)$$

- Последнее утверждение в (2) верно: пусть $w_2 = w_3 = a$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1-\lambda$ $\lambda_3 = 0$, тогда по условию $\lambda w_1 + (1-\lambda)a \in W$.
- Следовательно, $U$ — линейное подпространство $V$, а $W = U + a$ — аффинное подпространство. $\square$

# Факторпространство

## Определение

Пусть $U$ — линейное подпространство линейного пространства $V$ над полем $K$.

- *Факторпространство* $V/U = \{U + a \ : \ a \in V\}$.
- Будем использовать обозначение $\overline{a} := U + a$.
- Сложение и умножение в $V/U$ определим так:

$$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}; \qquad \lambda\overline{a} := \overline{\lambda a}.$$

- Введем отношение $a \sim b$ на $V$, означающее что $a + U = b + U$.
- По доказанному ранее, $a \sim b \iff a - b \in U$.
- Несложно проверить, что $\sim$ — отношение эквивалентности, а классы эквивалентности — как раз аффинные подпространства вида $a + U$.

## Лемма 10

1) *Сложение и умножение в $V/U$ определены корректно.*
2) *$V/U$ с этими операциями является линейным пространством над полем $K$.*

Доказательство. • 1) • Пусть $\overline{a} = \overline{a'}$, $\lambda \in K$. Тогда $a - a' \in U$.

• Для обоснования коректности сложения нам нужно доказать:

$$\overline{a+b} = \overline{a'+b} \iff (a+b) - (a'+b) = a - a' \in U.$$

• Доказательство того, что от замены $b$ на $b' \sim b$ результат не изменится, аналогично.

• Для обоснования коректности умножения нам нужно доказать:

$$\overline{\lambda a} = \overline{\lambda a'} \iff \lambda a - \lambda a' = \lambda(a - a') \in U.$$

2) Ассоциативность и коммутативность сложения, обе дистрибутивности, ассоциативность умножения, умножение на 1 напрямую следуют из аналогичных свойств в $V$.

• Класс $\overline{0} = 0 + U = U$ очевидно подходит в качестве 0-вектора.

• Обратный вектор определяется как $-\overline{a} := \overline{-a}$, что несложно проверить.

## Теорема 7

*Пусть $U$ — линейное подпространство конечномерного линейного пространства $V$ над полем $K$. Тогда* $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$.

Доказательство. • Пусть $u_1, \dots, u_k$ — базис $U$. Дополним его до базиса $V$: $u_1, \dots, u_k$, $v_1, \dots, v_n$.

• Тогда $\dim(U) = k$, $\dim(V) = k + n$. Нам нужно доказать, что $\dim(V/U) = n$, для чего достаточно доказать, что $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}$ — базис $V/U$.

## Утверждение 1

$\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}$ — *порождающая система векторов* $V/U$.

Доказательство. • Пусть $\overline{x} \in V/U$, тогда существует представление

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_k \in K$. Тогда

$$\overline{x} = \overline{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k} =$$
$$\alpha_1 \overline{v_1} + \dots + \alpha_n \overline{v_n} + \overline{\beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k} = \alpha_1 \overline{v_1} + \dots + \alpha_n \overline{v_n},$$

так как $\beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k \in U$.

## Утверждение 2

$\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}$ *ЛНЗ.*

Доказательство. • Предположим, что $\alpha_1\overline{v_1} + \dots + \alpha_n\overline{v_n} = 0$. Это означает, что

$$\overline{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n} = \alpha_1\overline{v_1} + \dots + \alpha_n\overline{v_n} = \overline{0}$$
$$\iff \quad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in U. \qquad (1)$$

• Тогда вектор $v$ можно разложить по базису $U$:

$$v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k \qquad (2).$$

• (1) и (2) — два разложения $v$ по базису $u_1, \dots, u_k$, $v_1, \dots, v_n$ пространства $V$, но такое разложение единственно.

• Значит, коэффициенты этих двух разложений совпадают, что означает, что $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

• Таким образом, $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}$ ЛНЗ. $\square$

• Из Утверждений 1 и 2 следует, что $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}$ — базис $V/U$, откуда следует Теорема. $\square$