

Алгебра. Практика. 2023-24

Занятие 1. 09.09.2023.

- Пусть K — кольцо, $a \in K$. Докажите, что $a \cdot 0 = 0$.
- Выполните деление: $\frac{2+i}{1-2i}$.
- Решите квадратное уравнение: $x^2 - 4x + 5 = 0$.
- Найдите модуль и аргумент числа $-\sqrt{3} + i$.
- Пусть $a = \cos(\frac{5\pi}{7}) + i \sin(\frac{5\pi}{7})$ и $b = \cos(\frac{4\pi}{7}) + i \sin(\frac{4\pi}{7})$.
 - Найдите $(a + b)^4$.
 - Найдите все корни 3 степени из $(a + b)$.
- Комплексное число z таково, что $z + \frac{1}{z} = 2 \cos(\alpha)$ (где α известно).
Найдите $z^n + \frac{1}{z^n}$.
- Пусть $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -1$, $|z| = 1$. Докажите, что существует такое вещественное число t , что $z = \frac{1-ti}{1+ti}$.

Занятие 2. 16.09.2023.

- Пусть $x + iy = (s + it)^n$. Докажите, что $x^2 + y^2 = (s^2 + t^2)^n$.
- Решите уравнение:
 - $z^5 = \bar{z}$; б) $z^5 + \bar{z} = 0$.
- Найдите НОД и его линейное представление с помощью алгоритма Евклида:
 - (2453, 2007);
 - (2376, 702).
- Последовательность чисел Фибоначчи определяется соотношениями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ при $n \geq 1$.
 - Найдите (F_n, F_{n+1}) .
 - Найдите линейное представление НОД (F_n, F_{n+1}) .
- Докажите, что все натуральные числа, имеющие нечетное число натуральных делителей — это точные квадраты
- Пусть $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n , взаимно простых с n . Докажите, что $\varphi(n) \vdots 2$ при $n > 2$.

Занятие 3. 23.09.2023.

- Решите в целых числах уравнение.
 - $258x - 172y = 112$;
 - $209x - 513y = 76$.
- Натуральное число n не имеет собственных делителей, больших 1 и не превосходящих \sqrt{n} . Докажите, что $n \in \mathbb{P}$.
- Докажите, что простых чисел вида $4k - 1$ бесконечно много.
- Верно ли, что $2\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов?
 - Опишите все идеалы в кольца $2\mathbb{Z}$.

Занятие 4. 30.09.2023.

1. Найдите вычет обратный 17 по модулю 336.
2. Решите систему сравнений
а)
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases};$$
3. Докажите, что $d(n)$ (число натуральных делителей n) мультипликативна (то есть $d(ab) = d(a)d(b)$ для взаимно простых натуральных a и b).
4. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ пусть $S_j(n) = C_n^j + C_n^{j+4} + \dots$ (сумма всех биномиальных коэффициентов с номерами, имеющими остаток j от деления на 4).
 - а) Докажите, что $S_0 - S_2 = \operatorname{Re}((1+i)^n)$.
 - б) Найдите S_0, S_1, S_2 и S_3 .

Занятие 5. 05.10.2022.

0. Решите сравнение: Решите сравнение: $91x \equiv 154 \pmod{112}$.
1. Решите систему сравнений
а)
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 37 \pmod{41} \\ x \equiv 7 \pmod{85} \end{cases}.$$
2. Докажите, что функция Мёбиуса μ мультипликативна.
3. Число $n \in \mathbb{N}$ имеет 15 натуральных делителей. Сколько простых делителей может иметь n ?
4. а) Найдите сумму первообразных корней степени p из 1, где $p \in \mathbb{P}$.
б) Найдите сумму первообразных корней степени $p_1 p_2 \dots p_k$ из 1, где $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ — разные.

Занятие 6. 20.10.2023.

1. вещественные числа p, q таковы, что $x^4 + px + q \div x^2 + 10x + 1$. Найдите p и q .
2. С помощью алгоритма Евклида, найдите $(x^7 + x^2 + 1, x^{12} - 1)$ и его линейное представление.
3. При каких n многочлен $x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$?
4. Найдите все многочлены степени 4, дающие остаток $2x$ при делении на $(x-1)^2$ и остаток $3x$ при делении на $(x-2)^3$.
5. Найдите $(x^m - 1, x^n - 1)$.

Занятие 7. 27.10.2022.

1. Какую кратность корня 1 может иметь многочлен $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$?

2. Пусть $n > m > 0$, $c > 0$. Докажите, что многочлен $ax^n + bx^m + c$ не может иметь корня кратности 3 и более.

3. Пусть $n_k > n_{k-1} > \dots > n_0$. Докажите, что многочлен $a_k x^{n_k} + a_{k-1} x^{n_{k-1}} + \dots + a_0 x^{n_0}$ не может иметь ненулевого корня кратности более k .

4. Многочлен

а) $f(x) \in \mathbb{C}[x]$;

б) $f(x) \in K[x]$, где K — поле

таков, что $f(x^n) \vdots x - 1$. Докажите, что $f(x^n) \vdots (x^n - 1)$.

Занятие 8. 03.11.2022.

1. Найдите интерполяционный многочлен по точкам:

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5,$$

$$y_0 = 3, y_1 = -10, y_2 = 5, y_3 = 7, y_4 = 8.$$

2. Найдите интерполяционный многочлен по точкам:

$$x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = i, x_3 = -i,$$

$$y_0 = 3, y_1 = 4, y_2 = 1, y_3 = 1.$$

3. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$. Вычислите

а) $\frac{1}{(3-\alpha_1)} + \frac{1}{(3-\alpha_2)} + \frac{1}{(3-\alpha_3)}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$.

б) $\frac{1}{(3-\alpha_1)^2} + \frac{1}{(3-\alpha_2)^2} + \frac{1}{(3-\alpha_3)^2}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$.

4. Пусть $\varphi(t) = (t - x_1) \dots (t - x_n)$, числа x_1, \dots, x_n различны, $n > 3$.

Найдите $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\varphi'(x_i)}$.

Занятие 9. 08.11.2022.

1. Разложите в сумму простейших в $\mathbb{C}(x)$ и в $\mathbb{R}(x)$:
 - а) $\frac{x}{x^4-1}$;
 - б) $\frac{x}{x^n-1}$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
2. Разложите в сумму простейших $\frac{x^3}{(x^2-1)^2}$.
3. а) Найдите многочлен деления круга $\Phi_p(t)$, где $p \in \mathbb{P}$.
б) Найдите многочлен деления круга $\Phi_{p^k}(t)$, где $p \in \mathbb{P}$.

Занятие 10. 22.11.2022.

1. Решите квадратное сравнение $x^2 + 4x + 6 \equiv 0 \pmod{17}$.
2. Найдите рациональные корни многочлена $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$.
3. Докажите, что уравнение $x^3 = 1$ в \mathbb{Z}_p имеет три решения при $p \equiv 1 \pmod{3}$ и одно решение при $p \equiv 2 \pmod{3}$.
4. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k + 1$.
5. Многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ с $\deg(f) \leq n$ принимает целые значения в точках $k, k + 1, \dots, k + n$, где $k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Занятие 11. 01.12.2023.

1. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ таков, что $f(1) = 111$ и $f(4) = 117$. Докажите, что f не имеет \mathbb{Z} корней.
2. Докажите, что многочлен $x^4 + 2x^2 + 3x + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.
3. Даны различные целые числа a_1, \dots, a_n . Докажите, что многочлен $f(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n) - 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$
 - а) при нечетном n ;
 - б) при четном n .
4. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что многочлен $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \dots + x + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

Занятие 12. 6.12.2021.

1. Вектора x, y, z линейно независимы. Являются ли линейно независимыми следующие тройки векторов:
 - а) $x + y, x + z, y + z$;
 - б) $x - y, x - z, y - z$?
2. Какие из данных подмножеств K^3 (где K — поле) являются линейными подпространствами? А какие аффинными?
 - а) $\{(2z + 2x, z + x, z - x) : x, z \in K\}$.
 - б) $\{(2z + 2, z + x + 3, z - x) : x, z \in K\}$.
3. Пусть V_1, V_2, V_3 — линейные подпространства линейного пространства V , причем V_1 — подпространство V_3 . Докажите, что $(V_1 + V_2) \cap V_3 = V_1 + V_2 \cap V_3$.

4. Пусть U, W — аффинные подпространства линейного пространства V . Докажите, что $U + W$ — тоже аффинное подпространство V .

5. Пусть W — k -мерное аффинное подпространство V (то есть $W = U + a$, где $a \in V$, а U — линейное подпространство размерности k).

а) Докажите, что в W любые $k + 2$ вектора линейно зависимы.

а) Докажите, что при $W \neq U$ в W есть $k + 1$ ЛНЗ вектор.

Занятие 13. 22.12.2021.

1. Пусть (G, \cdot) — группа. Зададим операцию $*$: $G \times G \rightarrow G$ формулой $a * b := b \cdot a$. Докажите, что $(G, *)$ — группа.

2. Докажите, что $\text{ord}(g) = \text{ord}(g^{-1})$ для любого элемента $g \in G$.

3. Группа G такова, что $a^2 = e$ для любого $a \in G$. Докажите, что G абелева.

4. Пусть G — конечная группа, $|G|$ четно. Докажите, что существует такой $a \in G$, что $a \neq e$ и $a^2 = e$.

5. Какие элементы C_n порождают ее при

а) $n \in \mathbb{P}$;

б) произвольном n ?

2 семестр. Занятие 1. 06.02.2023.

0. Докажите, что группа простого порядка — циклическая.
1. Докажите, что $A_n \triangleleft S_n$.
2. Группа $H < S_n$ содержит хотя бы одну нечетную подстановку. Докажите, что H содержит поровну четных и нечетных подстановок.
3. Докажите, что A_n порождается циклами длины 3.
4. Элементы каких порядков есть в
 - а) S_{11} ;
 - б) A_{11} ?
5. Найдите все подгруппы S_4 . Разбейте их на классы попарно изоморфных.

2 семестр. Занятие 3. 13.02.2023.

1. Пусть A, B, C — группы, а $\varphi : A \rightarrow B$ и $\psi : B \rightarrow C$ — гомоморфизмы групп.
 - а) Докажите, что если $\psi \cdot \varphi$ — мономорфизм, то и φ — мономорфизм.
 - б) Докажите, что если $\psi \cdot \varphi$ — эпиморфизм, то и ψ — эпиморфизм.
2. а) Докажите, что $[S_n, S_n] < A_n$.
б) Докажите, что $[S_n, S_n] = A_n$.
3. $H < G$, $(G : H) = 2$. Докажите, что $H \triangleleft G$.
4. G — группа, $|G| = pq$, где $p, q \in \mathbb{P}$, $p < q$. Пусть $H < G$, $|H| = q$. Докажите, что $H \triangleleft G$.

2 семестр. Занятие 4. 27.02.2022.

1. Пусть K — коммутативное кольцо с 1. Найдите все матрицы $A \in M_n(K)$, которые коммутируют со всеми матрицами (то есть, $AB = BA$ для любой $B \in M_n(K)$).
2. С каким знаком входит в определитель матрицы $n \times n$ произведение элементов *побочной диагонали* (содержащей элементы $a_{n,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1,n}$)?
3. Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ такова, что $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$. Докажите, что $\det(A) \in \mathbb{R}$.

4. Найдите определитель :

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

5. Найдите определитель (числа a_1, \dots, a_n считаются известными):
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ & & & \dots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

2 семестр. Занятие 5. 05.03.2024.

1. Найдите определитель :

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}.$$

2. Найдите определитель :

$$\begin{vmatrix} c & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & c & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & c \end{vmatrix}.$$

3. Найдите определитель :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

2 семестр. Занятие 6. 12.03.2024.

1. Пусть $\varphi : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп, причем группа H — абелева. Докажите, что $\ker(\varphi) \supset [G, G]$.
2. Пусть G — абелева группа, $|G| = pq$, где p, q — различные простые числа. Докажите, что G — циклическая группа.
3. Порождается ли группа S_6 подстановками (246) и (123456) ?

2 семестр. Занятие 7. 26.03.2024.

1. Какие из этих двух отображений являются линейными? Для тех, что линейны, найдите матрицу в стандартных базисах пространств.

а) $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = (3x_1 - x_4, 3x_2 - 5x_3, x_2)^T$.

б) $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = (3x_1 - x_2^2, x_3, x_4)^T$.

2. Найдите обратную матрицу к данной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Докажите, что многочлены с комплексными коэффициентами степени не более 3 образуют линейное пространство а) над \mathbb{C} б) над \mathbb{R} и найдите его размерность.

4. Пусть V — линейное пространство над \mathbb{R} , W — его аффинное, но не линейное подпространство, а $e_1, e_2, \dots, e_n \in W$. Пусть числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ таковы, что $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in W$. Докажите, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

5. Пусть $V_1, V_2 \leq V$ — линейные пространства над полем K . Докажите, что $(V_1 + V_2)/V_1 \simeq V_2/(V_1 \cap V_2)$.

2 семестр. Занятие 9. 02.04.2024.

1. Найдите собственные числа матрицы

2	-1	0	0	0	2
0	2	0	2	-1	0
0	0	-2	-4	2	0
0	0	0	3	0	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	2

2. Матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ и $B \in M_{n,m}(K)$ таковы, что $ABA = A$. Докажите, что $\text{rk}(A) \leq \text{rk}(B)$.

3. Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над K , а $\psi : U \rightarrow V$ — линейное отображение, где $V_1 \leq V$. Докажите, что $\varphi^{-1}(V_1) = \{x \in U : \varphi(x) \in V_1\}$ — линейное подпространство U .

4. Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над K , а $\psi : U \rightarrow V$ — линейное отображение. Для каждого из двух следующих равенств, докажите или опровергните его. Если равенство неверное, то докажите вместо него верное включение (в одну из сторон) и приведите контрпример к обратному включению.

а) Если $U_1, U_2 \leq U$, то $\psi(U_1 \cap U_2) = \psi(U_1) \cap \psi(U_2)$.

б) Если $V_1, V_2 \leq V$, то $\psi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \psi^{-1}(V_1) \cap \psi^{-1}(V_2)$.

2 семестр. Занятие 10. 09.04.2022.

1. Найдите ЖНФ оператора, заданного следующей матрицы, а также Жорданов базис.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Матрица $J_n(\lambda)$ — это жорданова клетка $n \times n$ с λ на диагонали. Найдите $(J_n(\lambda))^k$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

2 семестр. Занятие 11. 16.04.2022.

1. Приведите квадратичную форму к диагональному виду невырожденным преобразованием переменных: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 2x_1x_2 + x_3x_4 - x_1x_5 + 6x_6^2$.

2. Пусть V — конечномерное линейное пространство над K , а $\psi \in \text{End}(V)$ — обратимый оператор.

а) Докажите, что $0 \notin \text{Spec}(\psi)$.

б) Пусть $\text{Spec}(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Найдите $\text{Spec}(\psi^{-1})$.

в) Пусть кратность каждого собственного числа λ_i у оператора ψ равна m_i . найдите кратности собственных чисел ψ^{-1} .

3. Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$, $k \in \mathbb{N}$, $A^k = E_n$.

а) Докажите, что все собственные числа A — корни из 1.

б) Докажите, что A диагонализуема.

2 семестр. Занятие 12. 23.04.2022.

1. Пусть K — поле, а $\varphi : K[t] \rightarrow K[t]$ — оператор дифференцирования (то есть, $\varphi(f) = f'$).

а) Докажите, что $\varphi \in \text{End}(K[t])$.

б) Докажите, что $U = \{f \in K[t] : f''' = 0\}$ является φ -инвариантным подпространством.

2. Пусть $U_1 < U_2 < V$ — линейные пространства.

а) Докажите, что $U_2/U_1 < V/U_1$.

б) Докажите, что $(V/U_1)/(U_2/U_1) \simeq V/U_2$.

3. Пусть V — линейное пространство над \mathbb{C} , $\varphi \in \text{End}(V)$. Найдите ЖНФ оператора φ , если:

а) $\chi_\varphi(t) = (t-1)^n$, $\dim(\ker(\varphi - id)) = k$ и $\dim(\ker((\varphi - id)^2)) = k+1$;

б) $\varphi = \psi^2$, где ψ имеет матрицу, состоящую из одной жордановой клетки собственного числа 1.