

Алгебра. Глава 10. Поля

Д. В. Карпов

2025

Определение

Пусть K — поле, L — надполе K . Тогда L — **расширение поля K** .

- Если L — расширение поля K , то L — линейное пространство над K , через $[L : K]$ будем обозначать его размерность.

Определение

L — **конечное расширение** поля K , если **степень расширения** $[L : K]$ конечна и **бесконечное расширение** в противном случае.

Теорема 1

Пусть L — расширение поля K , а F — расширение L . Тогда $[F : K]$ конечно, если и только если $[F : L]$ и $[L : K]$ конечны. Более того, $[F : K] = [F : L] \cdot [L : K]$.

Доказательство. \Leftarrow . • Пусть $[F : L]$ и $[L : K]$ конечны.

- Пусть f_1, \dots, f_n — базис F над L , а e_1, \dots, e_m — базис L над K .

Утверждение 1

$\{f_i e_j\}_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}}$ — порождающая система векторов F над K .

Доказательство. • Пусть $x \in F$. Тогда $x = \sum_{i=1}^n y_i f_i$, где $y_i \in L$.

• Для каждого i элемент $y_i \in L$ раскладывается по базису над K : $y_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} e_j$, где $\alpha_{i,j} \in K$.

• Тогда $x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} (e_j \cdot f_i)$, где $\alpha_{i,j} \in K$. □

Утверждение 2

$\{f_i e_j\}_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}}$ ЛНЗ над K .

Доказательство. • Пусть $\alpha_{i,j} \in K$ таковы, что

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} (e_j \cdot f_i) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} e_j \right) f_i.$$

• Так как f_1, \dots, f_n — базис F над L , для всех $i \in \{1, \dots, n\}$

имеем $\sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} e_j = 0$.

• Так как e_1, \dots, e_m — базис L над K , для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m\}$ имеем $\alpha_{i,j} = 0$.

- По Утверждениям 1 и 2, базис F над K содержит mn элементов, значит, $[F : K] = mn = [F : L] \cdot [L : K]$.

Доказательство. \Rightarrow . • Пусть $[F : K]$ конечно.

- Так как L — подпространство F над K , $[L : K] \leq [F : K]$ конечна.

- Так как порождающая система F над K будет порождающей и над L , тогда и $[F : L] \leq [F : K]$ конечна.



Теорема 2

Пусть K — поле, $f \in K[x]$ — неприводимый многочлен.

Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) Факторкольцо $L := K[x]/fK[x]$ — поле. Более того, L содержит подполе, изоморфное K и f имеет в L корень.
- 2) Существует расширение поля K , в котором f имеет корень.

Доказательство. • НУО f унитарный. Пусть

$$f(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0.$$

• Очевидно, отображение $\varphi : K \rightarrow L$, заданное формулой $\varphi(\alpha) := \bar{\alpha}$ является гомоморфизмом колец.

• Очевидно, $\text{Im}(\varphi) \neq \{\bar{0}\}$.

• Тогда $\text{Ker}(\varphi)$ — идеал в K и $\text{Ker}(\varphi) \neq K$. Значит, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$, то есть, φ — инъекция.

• Следовательно, $K' := \text{Im}(\varphi) \simeq K$ — поле.

• В дальнейшем мы будем отождествлять K' с K и считать, что L — расширение поля K .

Утверждение

L — поле.

Доказательство. • Пусть $g \in K[x]$, $\bar{g} \neq 0$ в L (что означает $g \not\sim f$ в $K[x]$).

- Нам нужно доказать, что \bar{g} обратим в L .
- Так как f неприводим, $(f, g) \sim 1$.
- Тогда существуют такие $p, q \in K[x]$, что $fp + gq = 1$ (линейное представление НОД).
- Это означает, что $\bar{g} \cdot \bar{q} = 1$ в L , что нам и нужно. (Напомним, что мы отождествляем $1 \in K$ с $\bar{1} \in L$.) □
- В L многочлен f имеет корень: $f(\bar{x}) = \overline{f(x)} = 0$. Пункт 1 теоремы доказан.
- Так как L — расширение поля K , в котором f имеет корень, пункт 2 также доказан. □

Определение

Пусть L — расширение поля K .

• Элемент $a \in L$ называется **алгебраическим** над K , если существует такой ненулевой многочлен $f \in K[x]$, что $f(a) = 0$.

Если такого многочлена нет, то a называется

трансцендентным над K .

• Если $a \in L$ — алгебраический над K , обозначим через I_a множество всех многочленов из $K[x]$, корнем которых является a .

• Очевидно, все элементы поля K — алгебраические над K .

Лемма 1

I_a — идеал в $K[x]$.

Доказательство. • Если $f, g \in I_a$, то
 $(f + g)(a) = f(a) + g(a) = 0 \Rightarrow f + g \in I_a$.

• Если $f \in I_a$, $h \in K[x]$, то
 $(hf)(a) = h(a)f(a) = h(a) \cdot 0 = 0 \Rightarrow hf \in I_a$.

• Значит, I_a — идеал в $K[x]$.

- I_a — идеал в $K[x]$, а значит, существует такой унитарный (т. е со старшим коэффициентом 1) многочлен $f_a \in K[x]$, что $I_a = f_a \cdot K[x]$.

Определение

Многочлен f_a называется **минимальным** многочленом элемента a .

- По построению, если $g \in K[x]$ и $g(a) = 0$, то $g \div f_a$.

Лемма 2

Минимальный многочлен f_α неприводим.

Доказательство. • Предположим противное, пусть $f_\alpha = g \cdot h$, где $g, h \in K[x]$ и $\deg(g), \deg(h) < \deg(f_\alpha)$.

- Тогда $0 = f_\alpha(\alpha) = g(\alpha) \cdot h(\alpha)$, откуда следует, что $g(\alpha) = 0$ или $h(\alpha) = 0$.

- НУО $g(\alpha) = 0$. Тогда по определению $g \div f_\alpha$, что не так. \square

Определение

Расширение L поля K — алгебраическое, если все элементы L — алгебраические над K .

Лемма 3

Если L — конечное расширение поля K , то это расширение — алгебраическое.

Доказательство. • Пусть $a \in L$, $n = [L : K]$.

• Тогда $1, a, \dots, a^n$ — ЛЗ над K , значит, $\exists c_0, \dots, c_n \in K$ такие, что $c_n a^n + \dots + c_0 = 0$, то есть a — алгебраический элемент над K . □

Определение

Пусть L — расширение поля K , $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$. Обозначим через $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ минимальное расширение K — подполе L , содержащее $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Будем говорить, что $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ получено из K **присоединением** $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Лемма 4

$K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — пересечение всех расширений K , являющихся подполями L и содержащих $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Доказательство. • Пусть $\{F_i\}_{i \in I}$ — все такие расширения K ,
 $F = \bigcap_{i \in I} F_i$.

• Тогда F замкнуто по взятию суммы, произведения, обратных элементов по сложению и умножению (для любых двух $x, y \in F$ все это есть в каждом F_i , а значит и в F).

• Следовательно, F — поле. Так как F содержит $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, мы имеем $F = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. □

Лемма 5

Пусть L — расширение поля K , $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$. Тогда $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = K(\alpha_1)(\alpha_2) \dots (\alpha_n)$ (то есть, $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ получается последовательным присоединением элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$).

Доказательство. • Индукция по n .

• Достаточно доказать, что

$$K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = K(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})(\alpha_n).$$

• Пусть $F = K(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$.

\supset • Очевидно, $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \supset F$. То есть, это расширение поля F , содержащее α_n .

• Следовательно, $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \supset F(\alpha_n)$.

\subset • $F(\alpha_n)$ — расширение поля K , содержащее $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

• Значит, $F(\alpha_n) \supset K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. □

Теорема 3

Пусть L — расширение поля K , $\alpha \in L$ — алгебраический элемент. Тогда $K(\alpha) \simeq K[x]/f_\alpha \cdot K[x]$. В частности, $[K(\alpha) : K] = \deg(f_\alpha)$.

Доказательство. • Пусть $\deg(f_\alpha) = n$,
 $f_\alpha(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$.

• Рассмотрим $F = \text{Lin}(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ (множество линейных комбинаций с коэффициентами из K). Очевидно, $F \subset K(\alpha)$.

• Так как $\deg(f_\alpha) = n$, нет многочлена меньшей степени, корнем которого является α . Значит, $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ ЛНЗ над K .

Утверждение

α^m при $m \geq n$ является линейной комбинацией $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ с коэффициентами из K . В частности, $\alpha^m \in F$.

Доказательство. • Индукция по m .

База $m = n$. $f_\alpha(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^n = -c_{n-1}\alpha^{n-1} - \dots - c_1\alpha - c_0$.

Переход $m - 1 \rightarrow m$.

$\alpha^{m-n}f_\alpha(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^m = -c_{n-1}\alpha^{m-1} - \dots - c_1\alpha^{m-n+1} - c_0\alpha^{m-n}$,
а $\alpha^{m-1}, \dots, \alpha^{m-n} \in F$ по индукционному предположению. 

- Таким образом, F содержит $g(\alpha)$ для любого многочлена $g \in K[x]$ (так как $g(\alpha)$ является линейной комбинацией лежащих в F степеней α с коэффициентами из K).
- Значит, $F = \{g(\alpha) : g \in K[x]\}$. (*)
- Следовательно, F замкнуто по умножению, то есть, F — кольцо.
- Пусть $\varphi : K[x] \rightarrow F$ задано формулой $\varphi(f) := f(\alpha)$. Нетрудно проверить, что φ — гомоморфизм колец.
- Так как $f(\alpha) = 0 \iff f \in f_\alpha$, мы имеем $\ker(\varphi) = f_\alpha \cdot K[x]$.
- Из (*) следует, что $\text{Im}(\varphi) = F$.
- По теореме о гомоморфизме колец (Глава 0)
 $F = \text{Im}(\varphi) \simeq K[x]/f_\alpha \cdot K[x]$.
- По Лемме 2 мы знаем, что f_α — неприводимый в $K[x]$.
- По Теореме 2 тогда $K[x]/f_\alpha \cdot K[x]$ — поле, а значит, и F — поле.
- Так как $\alpha \in F$, по определению $K(\alpha)$, тогда $K(\alpha) \simeq F$. \square

Теорема 4

Пусть L — расширение поля K , а A — множество всех элементов L , алгебраических над K . Тогда A — поле.

Доказательство. • Пусть $u, v \in A$. Тогда можно считать, что $[K(u) : K] = n \in \mathbb{N}$ и $[K(v) : K] = m \in \mathbb{N}$.

- По Лемме 5, $K(u, v) = K(u)(v)$.
- Пусть $f_v \in K[x]$ — минимальный многочлен v над K .
- Так как $f_v \in (K(u))[x]$ и $f_v(v) = 0$, минимальный многочлен v над $K(u)$ по Лемме 1 является делителем f_v , а значит, имеет степень не более чем $\deg(f_v) = m$.
- По Теореме 3 тогда $[K(u, v) : K(u)] \leq [K(v) : K] = m$.
- По Теореме 1 имеем $[K(u, v) : K] = [K(u, v) : K(u)] \cdot [K(u) : K] \leq mn$.
- По Лемме 3 тогда все элементы $K(u, v)$ — алгебраические над K , то есть, $K(u, v) \subset A$.
- Таким образом, A замкнуто по сложению, умножению, вычитанию и делению (так как $K(u, v)$ замкнуто), то есть, A — поле. □

Поле разложения многочлена

Определение

Расширение L поля K называется **полем разложения** унитарного многочлена $f \in K[x]$, если f раскладывается в L на линейные множители: $f = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ и $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Теорема 5

Пусть K — поле. Тогда для любого унитарного многочлена $f \in K[x]$ существует поле разложения L , причем $[L : K] \leq n!$, где $\deg(f) = n$.

Доказательство. • Индукция по $\deg(f)$. База для случая $\deg(f) = 1$ очевидна.

- **Переход.** Пусть для многочленов меньших чем $\deg(f)$ степеней теорема доказана.
- Пусть $f \div f_1$, где многочлен f_1 неприводимый.
- По Теореме 2 существует расширение K' поля K , в котором f_1 (а значит, и f) имеет корень α_1 , то есть, $f(x) \div x - \alpha_1$.
- В K' элемент α — алгебраический и можно рассмотреть расширение $K(\alpha_1)$ поля K .

- Выделим все линейные множители в разложении f в $K(\alpha_1)$:
$$f(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)g(x).$$
- Корни $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ и так есть в $K(\alpha_1)$ — можно считать, что мы их присоединяем без изменения поля.
- По индукционному предположению, существует поле разложение L многочлена g над $K(\alpha_1)$, причем L получено присоединением корней g и
$$[L : K(\alpha_1)] \leq (\deg(g))! = (n - k)! \leq (n - 1)!.$$
- В поле L многочлен f раскладывается на линейные множители.
- По Теореме 1,
$$[L : K] \leq [L : K(\alpha_1)] \cdot [K(\alpha_1) : K] \leq n \cdot (n - 1)! = n!. \quad \square$$

- Пусть $\varphi : K \rightarrow K'$ — изоморфизм полей. Тогда φ продолжается до изоморфизма колец многочленов $\varphi : K[x] \rightarrow K'[x]$: для многочлена $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ положим $\varphi(f(x)) := \varphi(a_n)x^n + \dots + \varphi(a_1)x + \varphi(a_0)$.

Теорема 6

Пусть $\varphi : K \rightarrow K'$ — изоморфизм полей, $f \in K[x]$ — унитарный многочлен, $f' := \varphi(f)$. Пусть F и F' — поля разложения многочленов f и f' над K и K' соответственно. Тогда существует изоморфизм полей F и F' .

Доказательство. • Индукция по $m := [F : K]$.

База $m = 1$. Тогда $F = K$, то есть, f раскладывается на линейные множители в K : пусть $f(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_m)$.

- Тогда $f'(x) = (\varphi(f))(x) = \varphi(x - \alpha_1) \dots \varphi(x - \alpha_m) = (x - \varphi(\alpha_1)) \dots (x - \varphi(\alpha_m))$.
- Следовательно, $F' = K'$.

Переход. Пусть для многочленов меньшей степени утверждение доказано.

- Пусть α — корень f в F , а $g = f_\alpha$ — минимальный многочлен α в $K[x]$.

- По Лемме 1, $f \div g$. По Лемме 2, g — неприводимый в $K[x]$.
- Пусть $g' = \varphi(g)$. Тогда многочлен g' неприводим в $K'[x]$.
- $f \div g \Rightarrow f' \div g'$ (если $f = gq$ в $K[x]$, то $f' = g'q'$ в $K'[x]$, где $q' := \varphi(q)$).
- Так как f' раскладывается на линейные множители в F' , g' тоже раскладывается на линейные множители в F' .
- В частности, $\exists \alpha' \in F'$ такой, что $g'(\alpha') = 0$.
- Пусть $f_{\alpha'}$ — минимальный многочлен α' в $K'[x]$.
- Тогда $g' \div f_{\alpha'}$. Так как g — неприводимый, $g' \sim f_{\alpha'}$.
- Старший коэффициент g равен 1, а $g' = \varphi(g)$. Следовательно, старший коэффициент g' также равен 1. Значит, $g' = f_{\alpha'}$.
- По Теореме 3, $K(\alpha) \simeq K[x]/gK[x]$ и $K'(\alpha') \simeq K'[x]/g'K'[x]$ — поля.

- Для каждого многочлена $h \in K[x]$ будем использовать обозначение $h' := \varphi(h) \in K'[x]$.
- Зададим отображение $\bar{\varphi} : K[x]/gK[x] \rightarrow K'[x]/g'K'[x]$ формулой $\bar{\varphi}(\bar{h}) := \tilde{h}'$.
(здесь $\bar{h} = h + gK[x] \in K[x]/gK[x]$ и $\tilde{h}' = h' + g'K'[x] \in K'[x]/g'K'[x]$).
- Проверим корректность определения $\bar{\varphi}$: если $\bar{h} = \bar{h}_1$, то $h_1 = h + q(x)g(x)$, откуда $h'_1 = h' + q'(x)g'(x)$, то есть $\tilde{h}'_1 = \tilde{h}'$.
- Нетрудно заметить, что $\bar{\varphi}$ — гомоморфизм и сюръекция.
- Так как $K[x]/gK[x]$ — поле, а $\text{Ker}(\bar{\varphi})$ — идеал, в этом случае $\text{Ker}(\bar{\varphi}) = \{0\}$ и $\bar{\varphi}$ — биекция, а значит, изоморфизм полей.
- Пусть $P := K(\alpha)$ и $P' := K'(\alpha')$. Так как композиция изоморфизмов — изоморфизм, существует изоморфизм полей $\psi : P \rightarrow P'$.
- Изоморфизм ψ продолжается на кольца многочленов $P[x]$ и $P'[x]$.

- В $P[x]$ многочлен f имеет корень (так как $f \mid g$ и g имеет корень), а значит, $k \geq 1$ линейных множителей:

$$f(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)h(x).$$

- Положим $\psi(\alpha_i) = \alpha'_i$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$. Тогда в $P'[x]$ имеем

$$f'(x) = (x - \alpha'_1) \dots (x - \alpha'_k)h'(x), \quad \text{где } h' = \psi(h).$$

- По Лемме 4, при построении поля разложения порядок присоединения корней не имеет значения. Значит, при построении F можно было начать с присоединения $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, а при построении F' — с присоединения $\alpha'_1, \dots, \alpha'_k$.
- Тогда, по построению поля разложения, F — поле разложения h над P , а F' — поле разложения h' над P' .
- Значит, по индукционному предположению, $F \simeq F'$. □

Следствие 1

Пусть K — поле, а $f \in K[x]$. Тогда поле разложения многочлена f над K единственно с точностью до изоморфизма.

Конечные поля

- Все поля из $p \in \mathbb{P}$ элементов изоморфны $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Будем применять обозначение \mathbb{F}_p для поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (при $p \in \mathbb{P}$).
- Далее будем считать, что любое поле характеристики p содержит подполе \mathbb{F}_p .

Лемма 6

Пусть $q \in \mathbb{N}$, K — поле, $|K| = q$. Тогда $q = p^n$, где $p = \text{char}(K) \in \mathbb{P}$, а $n = [K : \mathbb{F}_p]$.

Доказательство. • Так как \mathbb{Q} бесконечно, по Теореме 0.4 имеем $\text{char}(K) \neq 0$.

- Значит, $\text{char}(K) = p \in \mathbb{P}$ и \mathbb{F}_p — подполе K .
- Тогда K — линейное пространство над своим подполем \mathbb{F}_p размерности $n := [K : \mathbb{F}_p]$. Следовательно, $n \in \mathbb{N}$.
- Каждый элемент поля K имеет разложение по n -элементному базису K над \mathbb{F}_p , а значит, записывается как столбец из n координат из \mathbb{F}_p .
- Каждая координата из \mathbb{F}_p может принимать ровно p значений, поэтому, существует ровно p^n различных столбцов из n координат.

- Разные разложения по базису соответствуют разным векторам, поэтому, разным столбцам из n элементов \mathbb{F}_p соответствуют разные элементы поля K . Значит, $q = p^n$. □

Лемма 7

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $k, n \in \mathbb{N}$, причем $0 < k < p^n$. Тогда $C_{p^n}^k \vdots p$.

Доказательство. • Напомним, что $C_{p^n}^k = \frac{p^n!}{k!(p^n-k)!}$.

- Посчитаем степени вхождения p в числитель и знаменатель этой дроби.

- p входит в $(p^n)!$ с показателем $\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{p^n}{p^i} = \sum_{j=0}^{n-1} p^j$.

- p входит в $k!(p^n - k)!$ с показателем

$$\beta = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{k}{p^i} \right] + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{p^n - k}{p^i} \right] \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k + p^n - k}{p^i} = \sum_{j=1}^{n-1} p^j < \alpha.$$

- Следовательно, $C_{p^n}^k \vdots p^{\alpha-\beta} \vdots p$. □

Теорема 7

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует единственное с точностью до изоморфизма поле \mathbb{F}_{p^n} из p^n элементов, и это поле является полем разложения многочлена $x^{p^n} - x$ над \mathbb{F}_p (все элементы \mathbb{F}_{p^n} — в точности корни $x^{p^n} - x$).

Доказательство. ! • Пусть K — поле из p^n элементов.

• Через K^* обозначается мультипликативная группа поля K (группа всех ненулевых элементов по умножению). Тогда $|K^*| = p^n - 1$.

• По теореме Лагранжа (Теореме 6.1) мы знаем, что $p^n - 1 \vdots \text{ord}(a)$, следовательно, для любого $a \in K^*$ выполнено $a^{p^n - 1} = 1$.

• Теперь ясно, что все p^n элементов поля K — корни многочлена $x^{p^n} - x$ степени p^n , который по Теореме 3.7 имеет не более чем p^n корней.

• Значит, элементы K — все различные корни $x^{p^n} - x$. В частности, это означает, что K — поле разложения многочлена $x^{p^n} - x$ над \mathbb{F}_p .

• По Теореме 6 поле разложения $x^{p^n} - x$ над \mathbb{F}_p единственно с точностью до изоморфизма.

\exists • Пусть L — поле разложения многочлена $x^{p^n} - x$ над \mathbb{F}_p , а K — множество всех корней $f(x) = x^{p^n} - x$ в L .

- Возьмем производную: $f'(x) = p^n \cdot x^{p^n-1} - 1 = -1$.
- Значит, f не имеет кратных корней (если $f(x) \div (x-a)^2$, то $f'(x) \div (x-a)$, что не так).
- Таким образом, $|K| = p^n$. Докажем, что K — поле. Пусть $x, y \in K \Rightarrow x^{p^n} = x$ и $y^{p^n} = y$ в K .

Замкнутость по $+$: $(x+y)^{p^n} = \sum_{k=0}^{p^n} C_{p^n}^k x^k y^{p^n-k} = x^{p^n} + y^{p^n} = x + y \Rightarrow f(x+y) = 0 \Rightarrow x+y \in K$.

(Мы использовали, что $C_{p^n}^k \div p$ при $0 < k < p^n$ по Лемме 7.)

Замкнутость по \cdot : $(xy)^{p^n} = x^{p^n} y^{p^n} = xy \Rightarrow f(xy) = 0 \Rightarrow xy \in K$.

Обратный элемент по $+$: $f(-x) = -f(x) = 0$, так как p^n нечетно, следовательно, $-x \in K$

Обратный элемент по \cdot : $(x^{-1})^{p^n} = (x^{p^n})^{-1} = x^{-1} \Rightarrow f(x^{-1}) = 0 \Rightarrow x^{-1} \in K$.

- Следовательно, K — поле. По определению поля разложения, $L = K$.
- Таким образом, существует поле из p^n элементов.



- Далее для $q = p^n$, где $p \in \mathbb{P}$ и $n \in \mathbb{N}$ будем через \mathbb{F}_q обозначать поле из $q = p^n$ элементов.

Теорема 8

Пусть $p \in \mathbb{P}$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда подполя \mathbb{F}_{p^n} — это в точности все поля \mathbb{F}_{p^d} , где $d \in \mathbb{N}$ и $n \vdots d$.

Доказательство. • Пусть K — подполе \mathbb{F}_{p^n} .

- Тогда K — конечно, значит, $K = \mathbb{F}_q$, где q — степень простого числа.

- Кроме того, \mathbb{F}_{p^n} — конечное расширение \mathbb{F}_q , пусть $\ell = [\mathbb{F}_{p^n} : K]$.

- Аналогично рассуждению Леммы 6 получаем, что $p^n = q^\ell$, откуда следует, что $q = p^d$, где $d\ell = n$.

- Осталось доказать, что при каждом $n \vdots d$ поле \mathbb{F}_{p^d} является подполем \mathbb{F}_{p^n} .

- По Теореме 7, \mathbb{F}_{p^d} — поле разложение многочлена $x^{p^d} - x$, а \mathbb{F}_{p^n} — поле разложение многочлена $x^{p^n} - x$.

- При $n \vdots d$ мы имеем $x^{p^n} - x \vdots x^{p^d} - x$, поэтому, $\mathbb{F}_{p^d} \subset \mathbb{F}_{p^n}$.

- Тогда понятно, что \mathbb{F}_{p^d} — подполе \mathbb{F}_{p^n} .



Теорема 9

Пусть \mathbb{F}_q — конечное поле. Тогда его мультипликативная группа (то есть группа обратимых элементов по умножению)

\mathbb{F}_q^* — это циклическая группа порядка $q - 1$.

Доказательство. • Начнем с двух вспомогательных утверждений.

Утверждение 1

Пусть $a, b \in \mathbb{F}_q^*$, $(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) = 1$. Тогда $\text{ord}(ab) = \text{ord}(a) \cdot \text{ord}(b)$.

Доказательство. • Пусть $m = \text{ord}(a)$, $n = \text{ord}(b)$, $\text{ord}(ab) = k$.

- Так как группа абелева, $1 = (ab)^k = a^k b^k$.
- Тогда $a^k = (b^k)^{-1}$, откуда $\frac{m}{(k,m)} = \text{ord}(a^k) = \text{ord}(b^k) = \frac{n}{(k,n)}$.
- Пусть $p \in \mathbb{P}$, $p^\alpha \parallel n$, $\alpha \geq 1$. Тогда $m \not\mid p$.
- Пусть $p^\gamma \parallel k$. Если $\gamma < \alpha$, то $\frac{n}{(k,n)} \not\mid p$, а $\frac{m}{(k,m)} \mid p$, противоречие.
- Значит, если $n \not\mid p$, то p входит в k с неменьшим показателем, чем в n , а значит, $k \not\mid n$.
- Аналогично, $k \not\mid m$, откуда ввиду $(m, n) = 1$ имеем $k \not\mid mn$.
- Остается заметить, что $(ab)^{mn} = a^{mn} b^{mn} = 1$.

- Пусть m — это НОК порядков элементов \mathbb{F}_q^* .

Утверждение 2

$B \mathbb{F}_q^*$ есть элемент порядка m .

Доказательство. • Пусть $m = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$.

- Для каждого i в \mathbb{F}_q^* есть элемент с порядком, кратным $p_i^{k_i}$, а значит, и элемент a_i порядка $p_i^{k_i}$.

- Докажем индукцией по $t \leq s$, что $\text{ord}(a_1 \dots a_t) = p_1^{k_1} \dots p_t^{k_t}$. База $t = 1$ очевидна.

Переход $t - 1 \rightarrow t$.

- Так как $(p_1^{k_1} \dots p_{t-1}^{k_{t-1}}, p_t^{k_t}) = 1$, по Утверждению 1 имеем

$$\text{ord}(a_1 \dots a_{t-1} a_t) = \text{ord}(a_1 \dots a_{t-1}) \text{ord}(a_t) = p_1^{k_1} \dots p_t^{k_t} \quad \square$$

- Однако, $\forall a \in \mathbb{F}_q^*$ мы имеем $\text{ord}(a) \mid m$, откуда $a^m - 1 = 0$. Значит, все элементы \mathbb{F}_q^* — корни многочлена $x^m - 1$.

- Все элементы \mathbb{F}_q^* — корни многочлена $x^{q-1} - 1$. Значит, $q - 1 \vdots m$. Если $m < q - 1$, то, очевидно, в \mathbb{F}_q^* менее $q - 1$ элементов, что не так.

- Значит, $m = q - 1$. Тогда по Утверждению 2 существует такой $a \in \mathbb{F}_q^*$, что $\text{ord}(a) = q - 1$. Очевидно, в этом случае $\mathbb{F}_q^* = \langle a \rangle$.

Лемма 8

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $k, n \in \mathbb{N}$, $q = p^n$. Отображение $\varphi : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$, заданное формулой $x \rightarrow x^{p^k}$ — автоморфизм поля \mathbb{F}_q .

Доказательство. • Достаточно доказать, что $\varphi(x) := x^p$ — автоморфизм \mathbb{F}_q (так как композиция автоморфизмов — автоморфизм).

- Пусть $x, y \in \mathbb{F}_q$. Очевидно, $(xy)^p = x^p y^p$.
- По Лемме 7, $(x + y)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k x^k y^{p-k} = x^p + y^p$.
- Таким образом, φ — гомоморфизм полей.
- Так как $\ker(\varphi)$ — идеал в \mathbb{F}_{p^n} и, очевидно, $\ker(\varphi) \neq \mathbb{F}_{p^n}$ (например, $\varphi(1) = 1 \neq 0$), то $\ker(\varphi) = \{0\}$.
- Значит, φ — инъекция. Так как \mathbb{F}_{p^n} конечно, φ — биекция, то есть, это автоморфизм поля \mathbb{F}_{p^n} . □

Лемма 9

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $q = p^n$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{F}_{q^k}$ — корень многочлена $f(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0 \in \mathbb{F}_q[x]$. Тогда $f(\beta^q) = 0$.

Доказательство. • По Лемме 8, $\varphi(y) := y^q$ — автоморфизм \mathbb{F}_{q^k} . Очевидно, $c^q = c$ для любого $c \in \mathbb{F}_q$.

- Тогда $0 = \varphi(f(\beta)) = f(\varphi(\beta)) = f(\beta^q)$. □

Определение

Пусть $a \in \mathbb{F}_q$ таков, что $\mathbb{F}_q^* = \langle a \rangle$. Тогда a — **примитивный элемент** поля \mathbb{F}_q .

Теорема 10

Пусть p — степень простого числа, $q = p^n$, α — примитивный элемент поля \mathbb{F}_q , а f_α — его минимальный многочлен над \mathbb{F}_p . Тогда \mathbb{F}_q — поле разложения f_α над \mathbb{F}_p .

Доказательство. • Так как $F_q^* = \langle \alpha \rangle$, мы имеем $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_p(\alpha)$.
Значит, $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\alpha)$.

- По Теореме 3 тогда $\deg(f_\alpha) = [\mathbb{F}_q : \mathbb{F}_p] = [\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p] = n$.
- Пусть $f_\alpha(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$.
- По Лемме 9, $\alpha, \alpha^p, \dots, \alpha^{p^{n-1}}$ — корни f_α .
- Пусть $\alpha^{p^k} = \alpha^{p^m}$ и $0 \leq k < m \leq n-1$. Тогда $0 = \alpha^{p^m} - \alpha^{p^k} = \alpha^{p^k} \cdot (\alpha^{p^m - p^k} - 1) \Rightarrow \alpha^{p^m - p^k} = 1$.
- Так как $\text{ord}(\alpha) = q - 1 = p^n - 1$ в \mathbb{F}_q^* , должно быть $p^m - p^k \vdots p^n - 1$, что, очевидно, не так.
- Таким образом, в поле \mathbb{F}_q есть n различных корней многочлена f_α степени n . Значит, \mathbb{F}_q — поле разложения f_α . \square

Следствие 3

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $q = p^n$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует неприводимый унитарный многочлен $f \in \mathbb{F}_q[x]$ с $\deg(f) = m$.

Доказательство. • Из доказанного ранее понятно, что существует расширение \mathbb{F}_{q^m} степени m поля \mathbb{F}_q .

• Пусть $\alpha \in \mathbb{F}_{q^m}$ — примитивный элемент, а f_α — минимальный многочлен α над \mathbb{F}_q .

• Тогда $\mathbb{F}_{q^m} = \mathbb{F}_q(\alpha)$ по Теореме 10, откуда следует, что $\deg(f_\alpha) = [\mathbb{F}_{q^m} : \mathbb{F}_q] = m$.

• По Лемме 2 мы знаем, что f_α неприводим. □

• Теорема 10 позволяет нам строить поле из q^n элементов, как факторкольцо $\mathbb{F}_q[x]$ по идеалу, порожденному любым неприводимым многочленом степени n над \mathbb{F}_q .

• К сожалению, ни одного разумного критерия неприводимости даже над \mathbb{F}_p не известно. Это обстоятельство используется в теории кодирования.

Теорема 11

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $q = p^n$, $f \in \mathbb{F}_q[x]$ — неприводимый унитарный многочлен, $\deg(f) = d$, а L — поле разложения f . Тогда $L \simeq \mathbb{F}_{q^d}$ и $x^{q^d} - x \stackrel{\cdot}{=} f$.

Доказательство. • Пусть α — корень f в L .

- Так как f — неприводим, f — минимальный многочлен α над $\mathbb{F}_q[x]$.
- По Теореме 3, $[\mathbb{F}_q(\alpha) : \mathbb{F}_q] = d$. Значит, по Теореме 7, можно считать, что $\mathbb{F}_q(\alpha) = \mathbb{F}_{q^d}$ (конечное поле единственно с точностью до изоморфизма).
- По Лемме 9, элементы $\alpha, \alpha^q, \dots, \alpha^{q^{d-1}} \in \mathbb{F}_{q^d}$ — корни f .
- Докажем, что все эти корни различны — тогда \mathbb{F}_{q^d} окажется полем разложения f .
- Пусть $0 \leq k < m \leq d - 1$ и $\alpha^{q^k} = \alpha^{q^m} \Rightarrow \alpha^{q^{d+k-m}} = (\alpha^{q^k})^{q^{d-m}} = (\alpha^{q^m})^{q^{d-m}} = \alpha^{q^d} = \alpha$.
- Таким образом, α — корень многочлена $x^{q^{d+k-m}} - x = 0$, а значит, α принадлежит его полю разложения $\mathbb{F}_{q^{d+k-m}} \subsetneq \mathbb{F}_{q^d}$.
- Противоречие с $\mathbb{F}_q(\alpha) = \mathbb{F}_{q^d}$.



Теорема 12

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $q = p^n$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $x^{q^m} - x$ равен в $\mathbb{F}_q[x]$ произведению всех неприводимых многочленов всех степеней $d \mid m$ в первых степенях.

Доказательство. • Пусть $f \in \mathbb{F}_q[x]$ — неприводимый многочлен степени d и $x^{q^m} - x \div f$. Тогда все корни f лежат в \mathbb{F}_{q^m} .

• Значит, \mathbb{F}_{q^m} содержит поле разложения f , а это \mathbb{F}_{q^d} по Теореме 11. Тогда $d \mid m$ по Теореме 8.

• Наоборот, пусть $d \mid m$ и $f \in \mathbb{F}_q[x]$ — неприводимый многочлен степени d .

• По Теореме 11, $x^{q^d} - x \div f \Rightarrow x^{q^m} - x \div x^{q^d} - x \div f$.

• Так как разные неприводимые многочлены попарно взаимно просты, $x^{q^m} - x$ кратно произведению всех неприводимых многочленов из \mathbb{F}_q , степени которых делят m .

• Очевидно, $x^{q^m} - x$ взаимно прост с $(x^{q^m} - x)' = -1$.

• Следовательно, $x^{q^m} - x$ не имеет кратных корней, а значит, каждый из описанных выше неприводимых многочленов входит в разложение $x^{q^m} - x$ в 1 степени. □

Определение

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $q = p^n$. Обозначим через $\psi_m(q)$ количество неприводимых многочленов степени m в $\mathbb{F}_q[x]$.

Следствие 4

$$\psi_m(q) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \cdot q^d.$$

Доказательство. • Для каждого d пусть $f_{d,1}, \dots, f_{d,\psi_d(q)}$ — все неприводимые многочлены степени d в $\mathbb{F}_q[x]$.

• По Теореме 12,
$$x^{q^m} - x = \prod_{d|m} \left(\prod_{i=1}^{\psi_d(q)} f_{d,i}(x) \right).$$

• Просуммировав степени многочленов в правой части равенства, получим $q^m = \sum_{d|m} d \cdot \psi_d(q)$.

• По Формуле обращения Мёбиуса для функции $d \cdot \psi_d(q)$ получаем $\psi_m(q) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \cdot q^d$. □

Теорема 13

Пусть \mathbb{F}_q — конечное поле, $q = p^m$, $\beta \in \mathbb{F}_q$. Пусть f_β — минимальный многочлен β в $\mathbb{F}_p[x]$. Пусть $d \in \mathbb{N}$ — минимальное такое, что $\beta^{p^d} = \beta$. Тогда выполнены следующие утверждения.

$$1) \text{ Тогда } f_\beta(x) = \prod_{i=0}^{d-1} (x - \beta^{p^i}).$$

$$2) \deg(f_\beta) = d \leq m.$$

Доказательство. 1) • По Лемме 9, β^{p^i} — корень f_β .

• Пусть $\beta^{p^i} = \beta^{p^j}$ при $0 \leq i < j < d$.

• Тогда $\beta^{p^{d+i-j}} = (\beta^{p^i})^{p^{d-j}} = (\beta^{p^j})^{p^{d-j}} = \beta^{p^d} = \beta$

• Но $d + i - j < d$, противоречие с выбором d .

• Значит, все корни $\beta, \beta^p, \dots, \beta^{q^{p-1}}$ многочлена f_β различны.

• Следовательно, $f_\beta(x) \doteq g(x) := \prod_{i=0}^{d-1} (x - \beta^{p^i})$.

• Остается доказать, что

$$g(x) = a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{F}_p[x].$$

- Вспомним, что $\varphi(a) := a^p$ — автоморфизм поля \mathbb{F}_p .
- Так как \mathbb{F}_p — поле разложение многочлена $x^p - x$, имеющего в \mathbb{F}_q в точности p корней,
 $\varphi(a) = a \iff a \in \mathbb{F}_p$.

- Автоморфизм φ переставляет корни g по циклу:

$$\beta \rightarrow \beta^p \rightarrow \dots \rightarrow \beta^{p^{d-1}} \rightarrow \beta^{p^d} = \beta.$$

- Так как по Теореме Виета коэффициенты g однозначно выражаются через корни, это означает, что многочлены $\varphi(g)$ и g имеют одинаковые коэффициенты, то есть $\varphi(a_i) = a_i$ для любого $i \in [0..d-1]$.

- Следовательно, $g \in \mathbb{F}_p[x]$, откуда $f_\beta = g$.

2) Так как $x^{p^m} = x$ для любого $x \in \mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^m}$, имеем $\beta^{p^m} = \beta$. Следовательно, $d \leq m$. □