

Алгебра. Глава 11. Теория чисел и криптография

Д. В. Карпов

2024

Криптосистема RSA (Rivest–Shamir–Adleman, 1977)

- Пусть p, q — большие простые числа, $n = pq$.
- Тогда $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$.
- Пусть $e \in \mathbb{N}$, $e < \varphi(n)$ и $(e, \varphi(n)) = 1$.
- Пусть $d \in \mathbb{N}$ — обратный вычет к e по модулю $\varphi(n)$ ($d < \varphi(n)$ и $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$).
- Чаще всего числа e и d стараются выбирать так, чтобы число d было большим, а числа e — достаточно небольшим (но и не слишком маленьким).
- Пара (n, e) — **открытый ключ**. Он используется для шифрования сообщений и публикуется в открытом доступе.
- Пара (n, d) — **секретный ключ**. Он используется для дешифрования сообщений и должен храниться в секрете.
- **Сообщение** — число от 0 до $n - 1$ (более длинные сообщения разбиваются на блоки, которые шифруются по отдельности).
- **Шифрование** — функция $P : [0..n - 1] \rightarrow [0..n - 1]$, где $P(m) \equiv m^e \pmod{n}$.
- **Дешифрование** — функция $S : [0..n - 1] \rightarrow [0..n - 1]$, где $S(m) \equiv m^d \pmod{n}$.

Теорема 1

$$S(P(m)) = P(S(m)) = m.$$

Доказательство. • Нужно доказать, что $m^{ed} \equiv m \pmod{n}$.

- Для этого достаточно доказать, что $m^{ed} \equiv m \pmod{p}$ и $m^{ed} \equiv m \pmod{q}$.
- Заметим, что $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$. То есть, $ed = (p-1)(q-1)k + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.
- Пусть $m \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Следовательно, $m^{ed} = m^{(p-1)(q-1)k+1} = (m^{p-1})^{(q-1)k} \cdot m \equiv 1^{(q-1)k} \cdot m \equiv m \pmod{p}$.
- Если $m \equiv 0 \pmod{p}$, то $m^{ed} \equiv 0 \equiv m \pmod{p}$.
- Итак, во всех случаях получаем, что $m^{ed} \equiv m \pmod{p}$.
- То, что $m^{ed} \equiv m \pmod{q}$, доказывается аналогично. $\square$

- В 1977 году авторы алгоритма (R. L. Rivest, A. Shamir, L. M. Adleman) опубликовали тестовый пример, в котором число n состояло из 129 десятичных (425 двоичных) знаков.
- Тестовый пример был расшифрован в 1994 году при помощи распределенных вычислений: для этого потребовалось полгода работы сети из 1600 компьютеров.
- В настоящее время надежными считаются системы, в которых n содержит порядка 2000 двоичных знаков.

- Выбирая простые числа p и q стоит придерживаться некоторых ограничений.
- Числа p и q не должны быть близки друг к другу. Обычно их выбирают так, чтобы длина их записи отличалась на несколько разрядов.
- Действительно, $pq = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2$.
- Если $|p - q|$ мал, то $\left(\frac{p+q}{2}\right)^2$ — точный квадрат, ненамного превосходящий n .
- Тогда перебирая точные квадраты, большие n , мы быстро найдем такое a , что $a^2 - n$ — точный квадрат.
- Далее, положив $a = \frac{p+q}{2}$ и $\sqrt{a^2 - n} = \frac{p-q}{2}$, мы легко найдем p и q .
- $(p - 1, q - 1)$ должен быть маленьким.
- Каждое из чисел $p - 1, q - 1$ должно иметь большой простой делитель.

- Как мы видим, в криптографии возникает вопрос: а как убедиться, что предъявленное нам число — простое
- **Тривиальный алгоритм**: перебираем все числа от 2 до $\sqrt{n}$ и проверяем, делится ли n на каждое из них.
- Этот алгоритм экспоненциален относительно длины входа ($\log n$) и для чисел интересующего нас размера неприменим.
- На данный момент известен единственный алгоритм проверки простоты с доказанным полиномиальным (относительно длины входа) временем работы — его придумали M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena в 2004 году.
- Однако, на практике и этот алгоритм работает очень долго и расходует много памяти.
- Чаще всего на практике используют **вероятностные тесты**, которые работают гораздо быстрее.

- **Вероятностный алгоритм** — это алгоритм, ход и результаты работы которого, помимо входа, зависят от выбора некоторого случайного параметра a .
- Как правило, a — это натуральное число, которое случайным образом выбирается из некоторого диапазона.
- При определенных значениях a алгоритм может давать ошибочный результат, но вероятность этого должна быть не слишком велика (т. е. не превосходить некоторой заранее фиксированной константы).
- Например, бывают вероятностные алгоритмы, для которых вероятность ошибки меньше $\frac{1}{2}$.
- Для снижения вероятности ошибки можно многократно запустить вероятностный алгоритм. При каждом запуске алгоритма, параметр a выбирается заново, случайным и независимым от предыдущих запусков образом.
- Для проверки простоты числа нас будут интересовать **вероятностные алгоритмы с односторонней ошибкой**.
- Если такой алгоритм отвечает, что число **составное**, то это гарантировано так. А вот ответ **простое** может быть ошибочным.

Вход: нечётное натуральное число n .

- Выбираем случайным образом параметр $a \in [2..n - 2]$;
- вычисляем a^{n-1} по модулю n ;
- если $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, то ответ “простое”,
- если $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$, то ответ “составное”.
- Из Теоремы Эйлера следует, что ответ “составное” не может быть ошибочным.
- В то же время, ответ “простое” ошибочным быть может.
- Отметим, что сравнение $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ может быть выполнено только в случае $(a, n) = 1$.
- К сожалению, существуют такие нечетные составные числа n , для которых $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ при всех a взаимно простых с n .
- Такие числа называются числами Кармайкла. Они проходят тест Ферма почти при любом выборе a . Пример: $n = 561$.
- В 1994 году доказано, что чисел Кармайкла бесконечно много. Встречаются они относительно редко.

Символ Якоби

Определение

Пусть $n = p_1^{k_1} \dots p_\ell^{k_\ell}$ — каноническое разложение нечетного числа, $a \in \mathbb{N}$. Тогда **Символ Якоби** — это
$$\left(\frac{a}{n}\right) := \prod_{i=1}^{\ell} \left(\frac{a}{p_i}\right)^{k_i}.$$

- Из мультипликативности символа Лежандра следует, что $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)$.
- Из $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ не следует, что существует квадрат, сравнимый с a по модулю n .

Лемма 1

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \not\equiv 2$. Тогда
$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}.$$

Доказательство. • Пусть $f(k) := (-1)^{\frac{k^2-1}{8}}$.

- Рассмотрев все пары остатков по модулю 8, можно сделать вывод, что для любых нечетных k_1 и k_2 выполнено $f(k_1 k_2) = f(k_1) f(k_2)$.

- По Лемме 4.7, $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = f(p)$ для любого нечетного простого p .

- Теперь из определения символа Якоби следует утверждение леммы для нечетного $n = p_1^{k_1} \dots p_\ell^{k_\ell}$.

- Пусть в разложении n ровно k' простых, сравнимых с 3 по модулю 4, а в разложении m ровно s' таких простых.
- Тогда $\left(\frac{n}{m}\right)$ и $\left(\frac{m}{n}\right)$ имеют разный знак, если и только если $k's'$ нечетно.
- Отметим, что $k' \not\equiv 2 \iff n \equiv 3 \pmod{4}$ и $s' \not\equiv 2 \iff m \equiv 3 \pmod{4}$.
- Остается отметить, что

$$m \equiv n \equiv 3 \pmod{4} \iff \frac{(m-1)(n-1)}{4} \not\equiv 2.$$
□
- Благодаря Лемме 1 и Теореме 2 вычислить символ Якоби $\left(\frac{m}{n}\right)$ можно достаточно быстро, причем для этого не нужно знать разложение числа n на простые множители (а найти такое разложение для большого числа как раз — трудная задача).

Первообразные корни

- Пусть $n \in \mathbb{N}$. Через $\mathbb{Z}_n$ обозначается кольцо вычетов по модулю n , а через $\mathbb{Z}_n^*$ — множество всех обратимых элементов этого кольца (то есть, вычетов, взаимно простых с n — из Пр.СВ по модулю n).
- По Теореме Эйлера, для любого $a \in \mathbb{Z}_n^*$ мы знаем, что $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Определение

Пусть $a \in \mathbb{Z}_n^*$, $d \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что вычет a принадлежит к показателю d по модулю n , если $a^d = 1$, но $a^s \neq 1$ при $s \in \mathbb{N}$, $s < d$. Обозначение: $a \in_n d$.

- Аналогично Лемме 4.1 несложно доказать, что если $a \in_n d$, то $d \mid \varphi(n)$.

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Вывет $a \in \mathbb{Z}_n^*$, первообразный корень по модулю n , если $a \in_n \varphi(n)$.

- По Теореме 4.1 существуют первообразные корни по модулю $p \in \mathbb{P}$. Кроме того, первообразные корни существуют по модулю p^n и $2p^n$, где $p \in \mathbb{P}$ нечетно, а также по модулю 4. По остальным модулям первообразных корней нет.

Теорема 4

Для простого $p \in \mathbb{P}$ существует первообразный корень по модулю p^2 .

Доказательство. • Напомним, что $\varphi(p^2) = p(p-1)$.

• Достаточно найти такое $b \in \mathbb{N}$, что $b^{p(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^2}$, но $b^s \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ при $s < p(p-1)$.

• Так как существует первообразный корень по модулю p , существует и такое $a \in \mathbb{N}$, что $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, но $a^s \not\equiv 1 \pmod{p}$ при $s < p-1$.

• Тогда $(a, p) = 1$, а значит, a и $a+p$ — разные вычеты вычетов из $\mathbb{Z}_{p^2}^*$.

• Если $a^s \equiv 1 \pmod{p^2}$, то $a^s \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow s : p-1 \Rightarrow s \in \{p-1, p(p-1)\}$.

• Аналогичное верно и для $a+p$.

• Предположим, что ни a , ни $a+p$ нам не подходит. Тогда $(a+p)^{p-1} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

• Но $(a+p)^{p-1} - a^{p-1} = \sum_{k=1}^{p-1} C_{p-1}^k p^k a^{p-1-k} \equiv p(p-1)a^{p-2} \not\equiv 0 \pmod{p^2}$, противоречие.

Определение

Нечетное составное число n называется **эйлеровым псевдопростым по основанию a** , если $(a, n) = 1$ и $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{n}\right) \pmod{n}$.

Теорема 5

Нечетное составное число n является эйлеровым псевдопростым по основанию не более чем $\frac{\varphi(n)}{2}$ чисел, взаимно простых с n и меньших n .

Доказательство. • Назовем число $b \in \mathbb{N}$, $(b, n) = 1$, **хорошим**, если $b^{\frac{n-1}{2}} \not\equiv \left(\frac{b}{n}\right) \pmod{n}$ и **плохим**, если это сравнение выполнено.

• Наша цель — доказать, что **не более чем половина** вычетов из $\mathbb{Z}_n^*$ — **плохие**.

Утверждение 1

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}_n^*$, причем a — плохой вычет, а b — хороший.
Тогда ab — хороший.

Доказательство. • Предположим, что ab — плохой вычет.

- Тогда $\left(\frac{a}{n}\right) \equiv a^{\frac{n-1}{2}} \pmod{n}$ и $\left(\frac{ab}{n}\right) \equiv (ab)^{\frac{n-1}{2}} \pmod{n}$.
- Так как $(a, n) = (b, n) = 1$, имеем $\left(\frac{a}{n}\right), \left(\frac{b}{n}\right), \left(\frac{ab}{n}\right) \in \{1, -1\}$ и

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{n}\right) &= \left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2 = \left(\left(\frac{b}{n}\right) \cdot \left(\frac{a}{n}\right)\right) \cdot \left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{ab}{n}\right) \cdot \left(\frac{a}{n}\right) \\ &\equiv_n (ab)^{\frac{n-1}{2}} \cdot a^{\frac{n-1}{2}} \equiv_n b^{\frac{n-1}{2}} \cdot (a^{\frac{n-1}{2}})^2 \equiv_n b^{\frac{n-1}{2}}.\end{aligned}$$

- В последнем переходе мы использовали, что $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{n}$. □

Утверждение 2

Если b — хороший вычет, то плохих вычетов не более чем $\frac{\varphi(n)}{2}$.

Доказательство. • Пусть $a_1, \dots, a_k$ — все плохие вычеты.

- По Утверждению 1 тогда $a_1 b, \dots, a_k b$ — хорошие вычеты, и все они, очевидно, различны.

- Осталось доказать существование хорошего вычета.
Разберем два случая.

Случай 1: $n \not\vdots p^2$, где $p \in \mathbb{P}$.

- По Теореме 4 существует первообразный корень по модулю p^2 — пусть это $b \leq p^2 - 1 \leq n - 1$.
- Пусть $b \in_n d$. Тогда $b^d - 1 \vdots n \vdots p^2$, откуда следует $d \vdots \varphi(p^2) = p(p-1) \vdots p$.
- Очевидно, $n-1 \not\vdots p$. Поэтому, $b^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$.
- Если $b^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{b}{n}\right) \pmod{n}$, то $b^{\frac{n-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{n} \Rightarrow b^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, противоречие.

Случай 2: n свободно от квадратов.

- Пусть $n \vdots p$, где $p \in \mathbb{P}$.
- По КТО существует такое число $b \in [1..n-1]$, что $\left(\frac{b}{p}\right) = -1$ (то есть, b сравнимо по модулю p с любым квадратичным невычетом) и $b \equiv 1 \pmod{\frac{n}{p}}$. Ясно, что $(b, n) = 1$.
- Тогда $\left(\frac{b}{q}\right) = 1$ для любого простого $q|n$ отличного от p , откуда $\left(\frac{b}{n}\right) = -1$.
- Если $b^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{b}{n}\right) \equiv -1 \pmod{n}$, то $b^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\frac{n}{p}}$, что не так. Значит, b — хороший вычет.

Тест Соловея-Штрассена

Вход: нечётное натуральное число n .

- Выбираем случайным образом параметр $a \in [2..n-2]$;
- вычисляем $a^{\frac{n-1}{2}}$ по модулю n ;
- вычисляем $\left(\frac{a}{n}\right)$ по модулю n .
- Если оба эти числа сравнимы $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{n}\right) \equiv \pm 1 \pmod{n}$, то ответ “простое”,
- иначе ответ “составное”.
- Из определений символа Лежандра и символа Якоби следует, что ответ “составное” не может быть ошибочным.
- В то же время, ответ “простое” ошибочным быть может.
- По Теореме 5, вероятность ошибки в тесте Соловея-Штрассена менее $\frac{1}{2}$.
- Повторив тест с числом n независимо k раз, получим вероятность ошибки менее $\frac{1}{2^k}$.

Вход: нечётное натуральное число n .

- Пусть $n - 1 = 2^t \cdot u$, где $t, u \in \mathbb{N}$ и $u \not\equiv 2$.
- Выбираем случайным образом параметр $a \in [2..n - 2]$.
- Вычисляем $a^u, a^{2u}, \dots, a^{2^{t-1}u}$ по модулю n (получившаяся последовательность называется последовательностью Миллера-Рабина).
- Ответ “простое” дается в следующих двух случаях:
 - если $a^u \equiv 1 \pmod{n}$;
 - если $a^{2^k u} \equiv -1 \pmod{n}$ при некотором $k \in [0..t - 1]$.
- Во всех остальных случаях, дается ответ “составное”.
- Ответ “простое” при выполнении теста Миллера-Рабина может быть ошибочным.

Определение

Нечетное составное число n называется **сильно псевдопростым по основанию a** , если тест Миллера-Рабина для числа n с параметром a дает ответ “простое”.

Лемма 2

Если $n \in \mathbb{P}$, то тест Миллера-Рабина выдаст ответ “простое”.

Доказательство. • По теореме Эйлера $a^{2^t \cdot u} \equiv 1 \pmod{n}$, так что в последовательности Миллера-Рабина есть хотя бы одна 1 или -1 (например, $a^{2^{t-1} \cdot u}$).

• Можно считать, что -1 в последовательности нет, иначе дан ответ “простое”.

• Рассмотрим такое наименьшее k , что $a^{2^k \cdot u} \equiv 1 \pmod{n}$.

• Если $k = 0$, то $a^u \equiv 1 \pmod{n}$ и тогда дан ответ “простое”.

• Пусть $k > 0$. Тогда $a^{2^k \cdot u} \equiv 1 \pmod{n}$ и $a^{2^{k-1} \cdot u} \not\equiv 1 \pmod{n}$.

• Следовательно, $(a^{2^{k-1} \cdot u} - 1)(a^{2^{k-1} \cdot u} + 1) = a^{2^k \cdot u} - 1 \div n$.

• Поскольку $n \in \mathbb{P}$ и $a^{2^{k-1} \cdot u} \not\equiv 1 \pmod{n}$, получаем, что $a^{2^{k-1} \cdot u} + 1 \div n$.

• В этом случае тоже дан ответ “простое”. □

• Итак, тест Миллера-Рабина — вероятностный тест с односторонней ошибкой.

• Можно доказать, что вероятность ошибки в тесте Миллера-Рабина не превосходит $\frac{1}{4}$, но доказательство весьма технически сложное.