

Алгебра. Глава 5. Линейные пространства

Д. В. Карпов

2024

Определение

Пусть K — поле, V — множество, и определены операции $+$: $V \times V \rightarrow V$ и \cdot : $K \times V \rightarrow V$, удовлетворяющие следующим условиям.

1) *Ассоциативность сложения.*

$$\forall a, b, c \in V \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

2) *Коммутативность сложения.* $\forall a, b \in V \quad a + b = b + a.$

3) *Ноль.* $\exists 0 \in V$ такой, что $\forall a \in V \quad a + 0 = a.$

4) *Обратный элемент.* $\forall a \in V \exists -a \in V$ такой, что $a + (-a) = 0.$

5) *Дистрибутивность.* $\forall \alpha, \beta \in K$ и $\forall a \in V$ выполнено $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a.$

6) *Дистрибутивность.* $\forall \alpha \in K$ и $\forall a, b \in V$ выполнено $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b.$

7) *Ассоциативность умножения.* $\forall \alpha, \beta \in K$ и $\forall a \in V$ выполнено $\alpha(\beta a) = (\alpha \cdot \beta)a.$

8) *Умножение на 1.* $\forall a \in V$ выполнено $1 \cdot a = a.$

Тогда мы будем говорить, что V — *линейное пространство* над полем K , а элементы V называть *векторами*.

- Как правило, мы будем обозначать векторы строчными латинскими буквами, а числа из поля — греческими.
- 0-вектор ($0 \in V$) и $0 \in K$ — разные нули, хоть мы и обозначаем их одинаково.

Свойство 1

Ноль-вектор единственен

Доказательство. Пусть есть два ноль-вектора: 0_1 и 0_2 .
Тогда $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. □

Свойство 2

Обратный вектор $-a$ всегда единственен.

Доказательство. Пусть a_1 и a_2 — два обратных вектора к $a \in V$. Тогда $a_1 + a = a + a_2 = 0$, откуда
 $a_1 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = a_2$. □

Определение

Для $a, b \in V$ определим $a - b := a + (-b)$.

Свойство 3

Для любого $a \in V$ выполнено $0 \cdot a = 0$ (слева 0-число, справа 0-вектор).

Доказательство. $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Вычтем из левой и правой части $0 \cdot a$ и получим то, что нужно. \square

Свойство 4

Для любого $a \in V$ выполнено $-a = (-1) \cdot a$.

Доказательство.

- $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$.
- По Свойству 2, обратный вектор единственен. Значит, $-a = (-1) \cdot a$. \square

Линейное подпространство

Определение

Если U, V — линейные пространства над полем K , $U \subset V$, причем операции сложения и умножения в U и V одинаковы. Тогда U — **линейное подпространство** V , а V — **линейное надпространство** U .

Лемма 1

Пусть V — линейное пространство над полем K , $U \subset V$, причем U замкнуто по сложению векторов и умножению на число (то есть, $\forall \alpha \in K, \forall a, b \in U$ выполнено $a + b \in U$ и $\alpha a \in U$). Тогда U — линейное подпространство V (со сложением и умножением из V).

Доказательство. • При выполнении этих условий,
 $+$: $U \times U \rightarrow U$ и \cdot : $K \times U \rightarrow U$.

• Отметим, что для любого $a \in U$ выполнено $-a \in U$ и $0 = a - a \in U$.

• Теперь несложно понять, U — линейное пространство над K со сложением и умножением из V (6 свойств из определения наследуются из V , существование 0-вектора и обратного элемента обосновано выше). \square

Линейная комбинация, линейная оболочка

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем K .

1) Пусть $x_1, \dots, x_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ — **линейная комбинация** векторов x_1, \dots, x_n . Линейная комбинация называется **нетривиальной**, если не все $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ нули.

2) Пусть $M \subset V$. **Линейная оболочка** множества M — это множество $\text{Lin}(M)$ всех линейных комбинаций векторов из M (с любым количеством векторов).

Свойство 1

Если $M \subset V$, то и $\text{Lin}(M) \subset V$.

Доказательство. Несложно проверить, что линейная комбинация векторов линейного пространства V всегда лежит в V . □

Свойство 2

Для любого $M \subset V$, $\text{Lin}(M)$ — линейное подпространство V .

Доказательство. • Достаточно проверить замкнутость по сложению и умножению.

• Пусть $x_1, \dots, x_n \in M$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда

$$\beta(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = (\beta \alpha_1) x_1 + \dots + (\beta \alpha_n) x_n \in \text{Lin}(M).$$

• Пусть, кроме того, $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$. Тогда

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n = (\alpha_1 + \beta_1) x_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) x_n \in \text{Lin}(M).$$

(Здесь достаточно проверить сложение линейных комбинаций одних и тех же векторов, так как в линейную комбинацию можно добавить отсутствующие в ней вектора с нулевыми коэффициентами.) □

Определение

1) Пусть V — линейное пространство над полем K и $M \subset V$. Если $\text{Lin}(M) = V$, то M — *порождающая система векторов* пространства V .

2) Пространство V называется *конечно порожденным*, если оно имеет конечную порождающую систему векторов.

- В основном, мы будем изучать конечно порожденные линейные пространства.

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем K .

- Вектора $x_1, \dots, x_n \in V$ называются *линейно зависимыми* (коротко: *ЛЗ*), если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная 0. (То есть, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ не все равны 0, а $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$.) Если такой комбинации нет, то вектора $x_1, \dots, x_n \in V$ называются *линейно независимыми* (коротко: *ЛНЗ*).

- Бесконечное множество векторов называется *линейно зависимым*, если из них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную 0 и *линейно независимым*, если нельзя.

Свойства ЛЗ и ЛНЗ множеств векторов

Свойство 0

Пусть V — линейное пространство над полем K ,
 $0 \in M \subset V$. Тогда множество векторов M ЛЗ.

Доказательство. Есть нетривиальная линейная комбинация $1 \cdot 0 = 0$. □

Свойство 1

Если множество векторов ЛЗ, то любое его надмножество тоже ЛЗ.

Доказательство. Можно не использовать добавленные вектора в линейных комбинациях. □

Свойство 2

Если множество векторов ЛНЗ, то любое его подмножество тоже ЛНЗ.

Доказательство. Убрав некоторые вектора из множества, мы не добавим новых линейных комбинаций. □

Свойство 3

Если $x_1, \dots, x_n \in V$ ЛЗ, то среди них есть вектор, который является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. • Пусть $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, НУО $\alpha_n \neq 0$.

• Тогда

$$x_n = \frac{-\alpha_1}{\alpha_n} x_1 + \dots + \frac{-\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1} \in \text{Lin}(x_1, \dots, x_{n-1}). \quad \square$$

Свойство 4

Если $x_1, \dots, x_n \in V$ ЛНЗ и $y \notin \text{Lin}(x_1, \dots, x_n)$, то x_1, \dots, x_n, y — ЛНЗ.

Доказательство. • Пусть x_1, \dots, x_n, y — ЛЗ. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta y = 0$.

• Если $\beta = 0$, то не все $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ равны 0 и $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, а значит, x_1, \dots, x_n ЛЗ, противоречие.

• Значит, $\beta \neq 0$. Тогда

$$y = \frac{-\alpha_1}{\beta} x_1 + \dots + \frac{-\alpha_n}{\beta} x_n \in \text{Lin}(x_1, \dots, x_n),$$

противоречие.

Свойство 5

Если $x_1, \dots, x_n \in V$ ЛНЗ, а $y \in V$ таков, что x_1, \dots, x_n, y — ЛЗ, то $y \in \text{Lin}(x_1, \dots, x_n)$.

Доказательство. Прямое следствие Свойства 4. □

Системы линейных уравнений

Определение

Пусть K — поле, $a_{i,j} \in K$ (где $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$), $b_1, \dots, b_n \in K$. Пусть x_1, \dots, x_m — **неизвестные**. Тогда **система линейных уравнений** (далее **СЛУ**) — это

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2, \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n. \end{cases}$$

СЛУ называется **однородной** (далее **ОСЛУ**), если $b_1 = \dots = b_n = 0$.

Элементарные преобразования СЛУ

- (I) Поменять местами два уравнения.
 - (II) К одному уравнению прибавить другое, умноженное на $\lambda \in K$.
 - (III) Умножить уравнение на $\lambda \in K$, отличное от 0.
- Везде умножение уравнения на число происходит вместе с правой частью.

Лемма 2

- 1) *Элементарные преобразования всех трех типов обратимы, то есть имеют обратные элементарные преобразования.*
- 2) *Элементарные преобразования не меняют решений СЛУ.*

Доказательство. 1) • Элементарное преобразование типа (I) само себе обратно.

- Рассмотрим элементарное преобразование типа (II), пусть мы к i -му уравнению прибавили j -е, умноженное на λ .
- Тогда обратное преобразование — прибавить к i -му уравнению j -е уравнение, умноженное на $-\lambda$.
- Наконец, обратное преобразование к умножению уравнения на $\lambda \neq 0$ — умножить его же на λ^{-1} .

- 2) • Очевидно, элементарное преобразование системы оставляет все ее решения (все уравнения останутся верными).
- Так как такое преобразование обратимо, добавятся новые решения не могут — иначе проведем обратное преобразование, и все новые решения сохранятся. \square

Определение

ОСЛУ приведена к ступенчатому виду, если каждое уравнение, имеющее ненулевые коэффициенты, имеет вид

$$x_{s_i} + c_{i,s_i+1}x_{s_i+1} + \dots + c_{m,k}x_m = 0,$$

причем $s_1 < s_2 < \dots < s_k$ (где k — наибольший номер уравнения, имеющего ненулевые коэффициенты).

Лемма 3

ОСЛУ можно привести элементарными преобразованиями к ступенчатому виду.

Доказательство. • Индукция по количеству неизвестных.

База для одного неизвестного очевидна — наша система имеет вид $ax_1 = 0$.

- Если $a \neq 0$, то на a можно поделить и получить $x_1 = 0$. Если же $a = 0$, система уже имеет ступенчатый вид.

Переход.

- Если все коэффициенты при x_1 равны 0, то достаточно привести к ступенчатому виду систему без x_1 , что можно сделать по индукционному предположению.
- Если не все коэффициенты $a_{i,1}$ равны 0, то переставим уравнения (с помощью элементарных преобразований типа (I)) так, чтобы $a_{1,1} \neq 0$, после чего поделим первое уравнение на $a_{1,1}$ — оно примет нужный нам вид $x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,m}x_m = 0$.
- Теперь для всех $k \in \{2, \dots, n\}$ вычтем из k уравнения новое первое уравнение, умноженное на $a_{k,1}$ — во всех уравнениях, кроме первого, исчезнет переменная x_1 .
- Далее останется применить к системе из всех уравнений, кроме первого, индукционное предположение.



Лемма 4

ОСЛУ, в которой неизвестных больше, чем уравнений, имеет нетривиальное решение (не все x_i равны 0).

Доказательство. • Приведем систему к ступенчатому виду.

• Будем считать, что обозначения как в определении. Пусть осталось k уравнений с ненулевыми коэффициентами. Тогда $s_1 < s_2 < \dots < s_k$ — не более чем $n < m$ номеров переменных.

• Остались переменные с номерами не из $\{s_1, \dots, s_k\}$. Положим все их равными 1.

• После чего последовательно вычислим: сначала x_{s_k} , потом $x_{s_{k-1}}$, и так далее, x_{s_1} .

• Переменную x_{s_i} мы вычисляем из i уравнения:

$$x_{s_i} = -(c_{i,s_i+1}x_{s_i+1} + \dots + c_{i,m}x_m),$$

все значения в правой части уже известны.



Лемма 5

Пусть V — линейное пространство над полем K , $n < m$,
 $a_1, \dots, a_n \in V$ и $y_1, \dots, y_m \in \text{Lin}(a_1, \dots, a_n)$. Тогда y_1, \dots, y_m
ЛЗ.

Доказательство. • Пусть $y_1 = \beta_{1,1}a_1 + \dots + \beta_{n,1}a_n, \dots,$
 $y_m = \beta_{1,m}a_1 + \dots + \beta_{n,m}a_n.$

• Мы хотим найти такие $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ (не все равные 0), что
 $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m = 0$. Это означает, что

$$0 = \lambda_1(\beta_{1,1}a_1 + \dots + \beta_{n,1}a_n) + \dots + \lambda_m(\beta_{1,m}a_1 + \dots + \beta_{n,m}a_n) =$$
$$(\beta_{1,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{1,m}\lambda_m)a_1 + \dots + (\beta_{n,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{n,m}\lambda_m)a_n.$$

• Для равенства нулю этого выражения достаточно, чтобы
были равны 0 коэффициенты при a_1, \dots, a_n . Это дает нам
ОСЛУ (относительно неизвестных $\lambda_1, \dots, \lambda_m$):

$$\begin{cases} \beta_{1,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{1,m}\lambda_m = 0, \\ \dots \\ \beta_{n,1}\lambda_1 + \dots + \beta_{n,m}\lambda_m = 0. \end{cases}$$

• В этой ОСЛУ неизвестных больше, чем уравнений. Значит,
она имеет нетривиальное решение — соответствующие
 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ дают линейную зависимость y_1, \dots, y_m .

Определение

1) *Базис* линейного пространства — это линейно независимая порождающая система векторов.

2) *Размерность* линейного пространства V (обозначение: $\dim(V)$) — это количество элементов в базисе.

Если пространство V имеет бесконечный базис, то $\dim(V) = \infty$.)

Отдельно скажем о размерности пространства, состоящего из 0 : $\dim(\{0\}) = 0$.

- Позже мы докажем существование базиса в конечно порожденном пространстве. А сейчас докажем корректность определения размерности.

Лемма 6

Размерность определена корректно, то есть, любые два базиса пространства V имеют одно и то же число элементов (любые два бесконечных базиса мы считаем равными по количеству элементов.)

Доказательство. • Пусть V имеет два базиса с разным числом векторов. Рассмотрим меньший из них — скажем, e_1, \dots, e_n .

• Тогда все вектора большего базиса принадлежат $V = \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$, а значит, больший базис ЛЗ по Лемме 5, противоречие. □

Лемма 7

Пусть e_1, \dots, e_n — базис линейного пространства V .

Тогда для любого $x \in V$ существует единственное представление в виде линейной комбинации

$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$.

Доказательство. • Так как базис является порождающей системой векторов, такое представление существует.

• Пусть есть два представления:

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n.$$

• Тогда $(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0$.

• Так как базис ЛНЗ, отсюда следует, что $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$, то есть два наших представления одинаковы. □

Теорема 1

Пусть V — конечно порожденное линейное пространство над полем K . Тогда V имеет базис. Более того, из любой конечной порождающей системы векторов V можно выделить базис.

Доказательство. • Пусть a_1, \dots, a_n — любая конечная порождающая система V (есть у конечно порожденного пространства).

• Если эти вектора ЛНЗ, то они — базис. Если же они ЛЗ, то по Свойству 3 ЛЗ векторов, один из них является линейной комбинацией остальных. Пусть, скажем,

$$a_n = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{n-1} a_{n-1}.$$

• Докажем, что a_1, \dots, a_{n-1} — тоже порождающая система векторов V . Пусть $x \in V$, тогда существует представление

$$\begin{aligned} x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \alpha_n (\beta_1 a_1 + \dots + \beta_{n-1} a_{n-1}) = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_n \beta_1) a_1 + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n \beta_{n-1}) a_{n-1}. \end{aligned}$$

• Таким образом, мы уменьшили порождающую систему на один вектор. Такие шаги не могут продолжаться бесконечно. Значит, в некоторый момент мы получим ЛНЗ порождающую систему векторов — то есть, базис.

Теорема 2

Пусть V — конечно порожденное линейное пространство над полем K , а векторы a_1, \dots, a_n ЛНЗ. Тогда эти векторы можно дополнить до базиса.

Доказательство. • Если a_1, \dots, a_n — порождающая система V , то это — базис.

- Иначе есть вектор $a_{n+1} \in V \setminus \text{Lin}(a_1, \dots, a_n)$.
- По свойству 4 ЛНЗ векторов, a_1, \dots, a_n, a_{n+1} ЛНЗ.
- Будем так действовать, пока это возможно.
- Пространство V имеет конечную порождающую систему — скажем, из m векторов. Тогда по Лемме 5 не существует множества более чем из m ЛНЗ векторов.
- Значит, наш процесс должен закончиться и в некоторый момент мы получим линейно независимую порождающую систему векторов — то есть, базис. □

Теорема 3

Пусть V — конечно порожденное линейное пространство над полем K , а $e_1, \dots, e_n \in V$. Тогда следующие три утверждения равносильны.

1° e_1, \dots, e_n — базис V .

2° e_1, \dots, e_n — минимальная порождающая система векторов в V .

3° e_1, \dots, e_n — максимальная ЛЗ система векторов в V .

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Если есть порождающая система f_1, \dots, f_m из $m < n$ векторов, то $e_1, \dots, e_n \in \text{Lin}(f_1, \dots, f_m)$ и по Лемме 5 вектора e_1, \dots, e_n ЛЗ, что не так.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть e_1, \dots, e_n — минимальная порождающая система векторов в V . По Теореме 1 из этих векторов можно выбрать базис, который также является порождающей системой векторов. Значит, в нем не может быть менее n векторов, то есть, e_1, \dots, e_n — базис.

$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Если есть ЛНЗ система f_1, \dots, f_m из $m > n$ векторов, то дополним ее до базиса (это можно сделать по Теореме 2). Тогда у V существуют два базиса с разным числом векторов (n и не менее чем m), что невозможно.

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть e_1, \dots, e_n — максимальная ЛНЗ система векторов в V . Ее можно дополнить до базиса, который тоже является ЛНЗ системой векторов, а значит, не может иметь более n векторов. Следовательно, e_1, \dots, e_n — базис. □

Лемма 8

Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — множество линейных подпространств линейного пространства V над полем K . Тогда $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ — тоже линейное подпространство V .

Доказательство. • Достаточно проверить замкнутость по сложению и умножению на число.

- Пусть $a, b \in U$. Тогда для всех $i \in I$ мы имеем $a, b \in U_i$.
- Следовательно, для всех $i \in I$ мы имеем $a + b \in U_i$, откуда следует, что $a + b \in U$.
- Пусть $\lambda \in K$. Тогда для всех $i \in I$ мы имеем $\lambda a \in U_i$, откуда следует, что $\lambda a \in U$. □

Определение

Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — множество линейных подпространств линейного пространства V над полем K . Тогда $\sum_{i \in I} U_i$ — это множество всех сумм вида $x_{i_1} + \dots + x_{i_n}$, где $i_j \in I$, $x_{i_j} \in U_{i_j}$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$ (число n не фиксировано).

- Другими словами, сумма линейных подпространств V — это множество всех конечных сумм элементов, взятых по одному из пространств, что мы складываем.

Лемма 9

Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — множество линейных подпространств линейного пространства V над полем K . Тогда $U = \sum_{i \in I} U_i$ — тоже линейное подпространство V .

Доказательство. • Достаточно проверить замкнутость по сложению и умножению на число.

• Пусть $a, b \in U$. Тогда существуют представления

$$a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}, \quad b = b_{i_1} + \cdots + b_{i_n},$$

где $i_1, \dots, i_n \in I$, $a_{i_j}, b_{i_j} \in U_{i_j}$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$ (индексы в суммах для a и b можно считать одинаковыми: при необходимости можно дополнить суммы нулевыми слагаемыми).

• Тогда $a_{i_j} + b_{i_j} \in U_{i_j}$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$, откуда следует, что $a + b = (a_{i_1} + b_{i_1}) + \cdots + (a_{i_n} + b_{i_n}) \in U$.

• Пусть $\lambda \in K$. Тогда $\lambda a_{i_j} \in U_{i_j}$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$, откуда следует, что $\lambda a = \lambda a_{i_1} + \cdots + \lambda a_{i_n} \in U$. □

Теорема 4

Пусть U, W — конечномерные линейные подпространства линейного пространства V над полем K . Тогда

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Доказательство. • Пусть v_1, \dots, v_k — базис $U \cap W$.

Дополним его до базиса U : $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n$.

• Также дополним базис $U \cap W$ до базиса W : $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m$.

• Тогда $\dim(U) = k + n$, $\dim(W) = k + m$,
 $\dim(U \cap W) = k$.

• Нам нужно доказать, что $\dim(U + W) = k + m + n$, для чего достаточно доказать, что $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m$ — базис $U + W$.

Утверждение 1

$v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m$ — порождающая система векторов $U + W$.

Доказательство. • Пусть $v \in U + W$, тогда $v = u + w$, где $u \in U, w \in W$. Тогда существуют представления

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n,$$

$$w = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_k v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m,$$

где $\alpha_1, \alpha'_1, \dots, \alpha_k, \alpha'_k, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m \in K$.

• Тогда $v = u + w = (\alpha_1 + \alpha'_1)v_1 + \dots + (\alpha_k + \alpha'_k)v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m$ — искомое представление. □

Утверждение 2

 $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m$ ЛНЗ.**Доказательство.** • Предположим, что

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m = 0.$$

• Нам нужно доказать, что все коэффициенты в этом представлении равны 0. Перепишем его в виде

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n = x = -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_m w_m. \quad (1)$$

• Тогда $x \in U$ (так как это линейная комбинация базисных векторов U) и $x \in W$ (так как это линейная комбинация базисных векторов W). Следовательно, $x \in U \cap W$.

• Значит, можно разложить x по базису $U \cap W$:

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \quad (2)$$

• Но (1) и (2) — два разложения x по базису U , а такое разложение единственно. Значит, $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$.

- Теперь можно переписать (1) в виде

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = x = -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_m w_m. \quad (3)$$

- Это два разложения x по базису W , но такое разложение также единственно. Следовательно, $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$, что и требовалось доказать. □

- Из Утверждений 1 и 2 немедленно следует, что $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m$ — базис $U + W$.

- Теорема доказана. □

Определение

Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — множество линейных подпространств линейного пространства V над полем K , $U = \sum_{i \in I} U_i$.

- Тогда U — *прямая сумма*, если из $x_{i_1} + \dots + x_{i_n} = 0$ (где $i_1, \dots, i_n \in I$ — различные индексы, $x_{i_j} \in U_{i_j}$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$) следует, что $x_{i_1} = \dots = x_{i_n} = 0$.
- Обозначение: $U = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

Свойство

Пусть $U = \bigoplus_{i \in I} U_i$, $x \in U$, $x \neq 0$. Тогда существует единственное представление вида $x = x_{i_1} + \dots + x_{i_n}$, где $i_1, \dots, i_n \in I$ — различные индексы, $x_{i_j} \in U_{i_j}$ и $x_{i_j} \neq 0$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. • Существование такого представления следует из определения суммы линейных пространств.

• Предположим, что есть два таких представления. Дополним их нулями так, чтобы суммировались элементы одних и тех же подпространств:

$$x = x_{i_1} + \dots + x_{i_n} = x'_{i_1} + \dots + x'_{i_n}.$$

• Тогда $0 = (x_{i_1} - x'_{i_1}) + \dots + (x_{i_n} - x'_{i_n})$.

• По определению прямой суммы, все слагаемые равны 0. Значит, $x_{i_1} = x'_{i_1}$, \dots , $x_{i_n} = x'_{i_n}$, то есть, наши представления совпадают. □

Критерий прямой суммы

Теорема 5

Пусть $\{U_i\}_{i \in I}$ — множество линейных подпространств линейного пространства V над полем K , $U = \sum_{i \in I} U_i$. Для

каждого $i \in I$ пусть $U'_i = \sum_{j \in I, j \neq i} U_j$ (сумма всех

подпространств, кроме U_i). Тогда $U = \bigoplus_{i \in I} U_i$, если и только

если $U_i \cap U'_i = \{0\}$ для каждого $i \in I$.

Доказательство. \Rightarrow . • Предположим, что $U_i \cap U'_i \ni x$, $x \neq 0$ для некоторого $i \in I$.

• Из $x \in U'_i$ следует, что существует представление $x = x_{j_1} + \dots + x_{j_n}$, где $x_{j_s} \in U_{j_s}$, $j_s \neq i$ для всех $s \in \{1, \dots, n\}$.

• Тогда $-x \in U_i$ и $0 = (-x) + x_{j_1} + \dots + x_{j_n}$ — представление, которого не может быть по определению прямой суммы, противоречие.

\Leftarrow . • Предположим, что U — не прямая сумма.

• Тогда существует представление $0 = x_{j_1} + \dots + x_{j_n}$, где $x_{j_s} \in U_{j_s}$, $x_{j_s} \neq 0$ для всех $s \in \{1, \dots, n\}$.

• Тогда $-x_{j_1} = x_{j_2} + \dots + x_{j_n} \in U'_{j_1}$, но при этом, очевидно, $-x_{j_1} \in U_{j_1}$. Таким образом, $U_{j_1} \cap U'_{j_1} \neq \{0\}$, противоречие. 

Теорема 6

Пусть U_1, \dots, U_n — линейные подпространства конечномерного линейного пространства V над полем K , а $U = \bigoplus_{i=1}^n U_i$. Тогда $\dim(U) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_n)$.

Доказательство. • Индукция по n .

База $n = 2$. В этом случае $U = U_1 \oplus U_2$ и $U'_1 = U_2$. По критерию прямой суммы, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, следовательно, $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$ и $\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

Переход $n - 1 \rightarrow n$. • Пусть $W = U'_n = U_1 + \dots + U_{n-1}$. Докажем, что сумма из определения W прямая.

• Для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$ определим $W'_i = \sum_{1 \leq j \leq n-1, j \neq i} U_j$.

Тогда $W'_i \subset U'_i$.

• По Теореме 5, из $W'_i \cap U_i \subset U'_i \cap U_i = \{0\}$ следует, что W — прямая сумма.

• Следовательно, $\dim(W) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_{n-1})$.

• Так как $W \cap U_n = U'_n \cap U_n = \{0\}$, сумма $U = W + U_n$ также прямая. Следовательно, $\dim(U) = \dim(W) + \dim(U_n) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_{n-1}) + \dim(U_n)$, что нам и нужно.

Следствие 1

Пусть U_1, \dots, U_n — линейные подпространства конечномерного линейного пространства V над полем K , а

$U = \bigoplus_{i=1}^k U_i$. Для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ пусть $e_1^i, \dots, e_{n_i}^i$ —

базис U_i . Тогда $e_1^1, \dots, e_{n_1}^1, \dots, e_1^k, \dots, e_{n_k}^k$ — базис U .

Доказательство. • Докажем, что $e_1^1, \dots, e_{n_1}^1, \dots, e_1^k, \dots, e_{n_k}^k$ — порождающая система векторов U .

• Любой вектор $x \in U$ представим в виде $x = x_1 + \dots + x_k$, где $x_i \in U_i$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$.

• Вектор $x_i \in U_i$ можно разложить по базису U_i : $x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i e_j^i$.

• Тогда $x = \sum_{i=1}^k (\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_j^i e_j^i)$ — искомое представление.

• Из любой порождающей системы векторов по Теореме 1 можно извлечь базис. Но количество векторов в базисе равно $\dim(U) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_k)$ — а именно столько векторов у нас и есть. Значит, наша система векторов и есть базис U .



Аффинные подпространства.

Определение

Пусть U — линейное подпространство линейного пространства V над полем K , $a \in V$. Тогда $U + a = \{x + a : x \in U\}$ — аффинное подпространство V .

Положим $\dim(U + a) := \dim(U)$.

- Таким образом, аффинное подпространство — это сдвиг линейного подпространства на вектор.
- Простейший пример, показывающий что это такое. Пусть $V = \mathbb{R}^2$ — стандартная евклидова плоскость. Тогда линейные подпространства V размерности 1 — это прямые, проходящие через 0, а аффинные подпространства — это все прямые.
- Здесь и далее U — линейное подпространство линейного пространства V над полем K , $a, b \in V$.

Свойство 1

$U + a = U + b$, если и только если $a - b \in U$.

Доказательство. \Rightarrow . Если $U + a = U + b$, то $a \in U + b$. Так как $a = b + (a - b)$, то $a - b \in U$.

\Leftarrow . • Пусть $a - b \in U$, а $x \in U + a$. Тогда существует такое $u \in U$, что $x = a + u$.

• Но $(a - b) + u \in U$ (линейное подпространство замкнуто по сложению), значит, $x = a + u = b + (a - b + u) \in U + b$. Таким образом, $U + a \subset U + b$.

• Так как $b - a \in U$, аналогично получается, что $U + b \subset U + a$. □

Свойство 2

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, $x_1, \dots, x_n \in U + a$.
Тогда $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in U + a$.

Доказательство. • Пусть $x_i = u_i + a$, где $u_i \in U$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

• Тогда $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \in U$ и

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n &= \lambda_1(u_1 + a) + \dots + \lambda_n(u_n + a) = \\ &= (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)a = u + a \in U + a. \end{aligned}$$



Свойство 3

Пусть $W \subset V$ таково, что для любых $w_1, w_2, w_3 \in W$ и таких $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, выполнено $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 \in W$. Тогда W — аффинное подпространство V .

Доказательство. • Зафиксируем $a \in W$. Докажем, что $U = W - a$ — линейное подпространство V . Для этого достаточно проверить замкнутость U по сложению векторов и умножению вектора на число.

• Пусть $x_1, x_2 \in U$. Тогда $x_1 = w_1 - a$, $x_2 = w_2 - a$, где $w_1, w_2 \in W$ и

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \in U &\iff (w_1 - a) + (w_2 - a) \in U \iff \\ (w_1 - a) + (w_2 - a) + a &\in W \iff w_1 + w_2 - a \in W. \end{aligned} \quad (1)$$

• Последнее утверждение в (1) верно: пусть $w_3 = a$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, тогда по условию $1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + (-1) \cdot a \in W$.

- Пусть $\lambda \in K$. Тогда

$$\lambda x_1 \in U \iff \lambda(w_1 - a) \in U \iff \lambda(w_1 - a) + a \in W \iff \lambda w_1 + (1 - \lambda)a \in W. \quad (2)$$

- Последнее утверждение в (2) верно: пусть $w_2 = w_3 = a$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1 - \lambda$, $\lambda_3 = 0$, тогда по условию $\lambda w_1 + (1 - \lambda)a \in W$.
- Следовательно, U — линейное подпространство V , а $W = U + a$ — аффинное подпространство. □

Определение

Пусть U — линейное подпространство линейного пространства V над полем K .

- **Факторпространство** $V/U = \{U + a : a \in V\}$.

- Будем использовать обозначение $\bar{a} := U + a$.

- Сложение и умножение в V/U определим так:

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}; \quad \lambda \bar{a} := \overline{\lambda a}.$$

- Введем отношение $a \sim b$ на V , означающее что $a + U = b + U$.

- По доказанному ранее, $a \sim b \iff a - b \in U$.

- Несложно проверить, что \sim — отношение эквивалентности, а классы эквивалентности — как раз аффинные подпространства вида $a + U$.

Лемма 10

- 1) Сложение и умножение в V/U определены корректно.
- 2) V/U с этими операциями является линейным пространством над полем K .

Доказательство. • 1) • Пусть $\bar{a} = \overline{a'}$, $\lambda \in K$. Тогда $a - a' \in U$.

- Для обоснования корректности сложения нам нужно доказать:

$$\overline{a + b} = \overline{a' + b} \iff (a + b) - (a' + b) = a - a' \in U.$$

- Доказательство того, что от замены b на $b' \sim b$ результат не изменится, аналогично.

- Для обоснования корректности умножения нам нужно доказать:

$$\overline{\lambda a} = \overline{\lambda a'} \iff \lambda a - \lambda a' = \lambda(a - a') \in U.$$

2) Ассоциативность и коммутативность сложения, обе дистрибутивности, ассоциативность умножения, умножение на 1 напрямую следуют из аналогичных свойств в V .

- Класс $\bar{0} = 0 + U = U$ очевидно подходит в качестве **0-вектора**.

- **Обратный вектор** определяется как $-\bar{a} := \overline{-a}$, что несложно проверить.

Теорема 7

Пусть U — линейное подпространство конечномерного линейного пространства V над полем K . Тогда $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$.

Доказательство. • Пусть u_1, \dots, u_k — базис U . Дополним его до базиса V : $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n$.

• Тогда $\dim(U) = k$, $\dim(V) = k + n$. Нам нужно доказать, что $\dim(V/U) = n$, для чего достаточно доказать, что $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ — базис V/U .

Утверждение 1

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ — порождающая система векторов V/U .

Доказательство. • Пусть $\bar{x} \in V/U$, тогда существует представление

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_k \in K$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \overline{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k} = \\ &= \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n + \overline{\beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n,\end{aligned}$$

так как $\beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k \in U$.

Утверждение 2

 $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ ЛНЗ.

Доказательство. • Предположим, что $\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0}$. Это означает, что

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n} &= \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0} \\ \iff v &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in U. \end{aligned} \quad (1)$$

• Тогда вектор v можно разложить по базису U :

$$v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k \quad (2).$$

• (1) и (2) — два разложения v по базису u_1, \dots, u_k , v_1, \dots, v_n пространства V , но такое разложение единственно.

• Значит, коэффициенты этих двух разложений совпадают, что означает, что $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

• Таким образом, $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ ЛНЗ. □

• Из Утверждений 1 и 2 следует, что $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ — базис V/U , откуда следует Теорема. □