

Алгебра. Глава 7. Матрицы и определители

Д. В. Карпов

2025

Определение

- Пусть K — коммутативное кольцо, $m, n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $M_{m,n}(K)$ множество **матриц** с m строками и n столбцами, коэффициенты которых принадлежат кольцу K .
- При $m = n$ (для квадратных матриц $n \times n$) используют обозначение $M_n(K)$ вместо $M_{n,n}(K)$.
- Матрица $A \in M_{m,n}(K)$ имеет вид $\{a_{i,j}\}_{i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}}$, где все $a_{i,j} \in K$.

Сложение матриц. Для $A, B \in M_{m,n}(K)$ зададим матрицу $A + B \in M_{m,n}(K)$ формулой

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (a + b)_{i,j} := a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Умножение матриц. Для $A \in M_{m,n}(K)$ и $B \in M_{n,\ell}(K)$ зададим матрицу $A \cdot B \in M_{m,\ell}(K)$ формулой

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, \ell\} \quad (a \cdot b)_{i,j} := \sum_{s=1}^n a_{i,s} b_{s,j}.$$

- Очевидно, сложение матриц ассоциативно и коммутативно (так как сложение поэлементное, свойства наследуются из K).

0-матрица имеет все коэффициенты, равные 0.

Обратная по сложению матрица $-A$ задается формулой

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (-a)_{i,j} := -a_{i,j}$$

Свойство 1

Умножение матриц ассоциативно.

Доказательство. • Пусть $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,\ell}(K)$,
 $C \in M_{\ell,k}(K)$.

• Так как умножение в K ассоциативно, имеем:

$$\begin{aligned} ((ab)c)_{s,t} &= \sum_{j=1}^{\ell} (ab)_{s,j} c_{j,t} = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^n a_{s,i} b_{i,j} \right) \cdot c_{j,t} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\ell} a_{s,i} b_{i,j} c_{j,t} = \sum_{i=1}^n a_{s,i} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\ell} b_{i,j} \cdot c_{j,t} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{s,i} \cdot (bc)_{i,t} = (a(bc))_{s,t}. \end{aligned}$$

• Таким образом, соответствующие коэффициенты матриц $(AB)C$ и $A(BC)$ одинаковы.



Определение

Пусть K — кольцо с 1. Определим матрицу $E_n \in M_n(K)$ формулами $a_{i,i} = 1$, $a_{i,j} = 0$ при $i \neq j$.

Свойство 2

Для любой матрицы $B \in M_{n,\ell}(K)$ выполнено $E_n \cdot B = B$.

Для любой матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ выполнено $A \cdot E_n = A$.

- Оба равенства легко проверяются.

Теорема 1

Пусть K — коммутативное кольцо, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $M_n(K)$ — кольцо. Если K — кольцо с 1, то и $M_n(K)$ тоже.

Доказательство. • Сложение коммутативно и ассоциативно, нейтральный элемент (0-матрица) и обратный элемент по сложению определены.

- Умножение ассоциативно (Свойство 1).
- Если K — кольцо с 1, то $E_n \in M_n(K)$ — нейтральный элемент по умножению (Свойство 2).

- Осталось проверить **дистрибутивность**. Пусть $A, B, C \in M_n(K)$.

$$\begin{aligned}((a + b)c)_{s,t} &= \sum_{i=1}^n (a + b)_{s,i} c_{i,t} = \sum_{i=1}^n (a_{s,i} c_{i,t} + b_{s,i} c_{i,t}) = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{s,i} c_{i,t} + \sum_{i=1}^n b_{s,i} c_{i,t} = (ac)_{s,t} + (bc)_{s,t}.\end{aligned}$$

- Таким образом, соответствующие коэффициенты матриц $(A + B)C$ и $AC + BC$ одинаковы, а значит, $(A + B)C = AC + BC$.
- Дистрибутивность $C(A + B) = CA + CB$ проверяется аналогично. □

Определитель

Определение

Пусть K — коммутативное кольцо, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(K)$.

Тогда **определитель** матрицы A — это

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

где $\text{sign}(\sigma) := (-1)^{l(\sigma)}$ — **знак** подстановки σ .

- Строки матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ обозначаются A_1, \dots, A_m , а столбцы — $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$.
- Столбцы и строки удобно рассматривать как вектора из линейных пространств K^n и K^m соответственно.
- Определитель квадратной матрицы $A \in M_n(K)$ удобно рассматривать как функцию от n аргументов — строк этой матрицы: $\det(A_1, \dots, A_n)$.
- Можно рассматривать определитель и как функцию от столбцов матрицы: $\det(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$.

Элементарные преобразования матриц

- (I) Поменять местами две строки.
- (II) К одной строке прибавить другую, умноженную на $\lambda \in K$.
- (III) Умножить строку на $\lambda \in K$, отличное от 0.

• Аналогичные элементарные преобразования можно выполнять и со столбцами матриц.

Лемма 1

Все три элементарных типа преобразования обратимы, то есть имеют обратные элементарные преобразования.

Доказательство. • Элементарное преобразование типа (I) само себе обратно.

• Рассмотрим элементарное преобразование типа (II), пусть мы к i -й строке прибавили j -ю, умноженную на λ .

• Тогда обратное преобразование — прибавить к i -й строке j -ю, умноженную на $-\lambda$.

• Наконец, обратное преобразование к умножению строки на $\lambda \neq 0$ — умножить ее же на λ^{-1} . □

Свойства определителя

Свойство 1

При элементарном преобразовании типа I определитель меняет знак.

Доказательство. • Пусть $A, A' \in M_n(K)$, причем A' получена из A перестановкой i и j строк ($A'_i = A_j$, $A'_j = A_i$, остальные строки у матриц совпадают).

• Для $\sigma \in S_n$ положим $\sigma' := \sigma \cdot (ij)$. Понятно, что σ пробегает все значения из S_n , если и только если σ' пробегает все значения из S_n . По Лемме 6.8, $\text{sign}(\sigma') = -\text{sign}(\sigma)$. Тогда

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{\sigma' \in S_n} \text{sign}(\sigma') \cdot a'_{1,\sigma'(1)} \cdots a'_{i,\sigma'(i)} \cdots a'_{j,\sigma'(j)} \cdots a'_{n,\sigma'(n)} = \\ &= \sum_{\sigma' \in S_n} \text{sign}(\sigma') \cdot a_{1,\sigma'(1)} \cdots a_{j,\sigma'(i)} \cdots a_{i,\sigma'(j)} \cdots a_{n,\sigma'(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma') \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{j,\sigma(j)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{j,\sigma(j)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = -\det(A). \quad \square \end{aligned}$$

Свойство 2

Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен 0.

Доказательство. Пусть $A_i = A_j$. Тогда перемена местами этих двух строк не меняет матрицу, но должна по Свойству 1 менять знак определителя. \square

Свойство 3

Пусть $A, A' \in M_n(K)$, причем A' получена из A умножением i строки на $\lambda \in K$ ($A'_i = \lambda A_i$, остальные строки у матриц совпадают). Тогда $\det(A') = \lambda \det(A)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a'_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{i,\sigma(i)} \cdots a'_{n,\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots (\lambda \cdot a_{i,\sigma(i)}) \cdots a_{n,\sigma(n)} = \lambda \det(A). \quad \square \end{aligned}$$

Свойство 4

Определитель матрицы с нулевой строкой равен 0.

Свойство 5

(Разложение определителя по строке.) Пусть $A, A', A'' \in M_n(K)$, причем эти матрицы совпадают во всех строках, кроме i -й, а $A_i = A'_i + A''_i$. Тогда $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots (a'_{i,\sigma(i)} + a''_{i,\sigma(i)}) \cdots a_{n,\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) (a'_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{i,\sigma(i)} a'_{n,\sigma(n)} + a''_{1,\sigma(1)} \cdots a''_{i,\sigma(i)} a''_{n,\sigma(n)}) = \\ &= \det(A') + \det(A'') \quad \square\end{aligned}$$

Свойство 6

При элементарном преобразовании типа II определитель сохраняется.

Доказательство. • Пусть $\lambda \in K$, $A, A' \in M_n(K)$, причем A' получена из A преобразованием i строки: $A'_i = A_i + \lambda A_j$ (остальные строки у матриц совпадают, $j \neq i$).

- Пусть матрица A^* совпадает с A во всех строках, кроме i , а $A^*_i = \lambda A_j$.
- По Свойствам 3 и 2

$$\begin{aligned}\det(A^*) &= \det(A^*_1, \dots, A^*_i, \dots, A^*_j, \dots, A^*_n) = \\ &= \det(A_1, \dots, \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) = \\ &= \lambda \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) = 0.\end{aligned}$$

- По Свойству 5

$$\begin{aligned}\det(A') &= \det(A'_1, \dots, A'_i, \dots, A'_j, \dots, A'_n) = \\ &= \det(A_1, \dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) = \\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, \lambda A_j, \dots, A_j, \dots, A_n) = \\ &= \det(A) + \det(A^*) = \det(A). \quad \square\end{aligned}$$

Определение

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$. Транспонированная матрица

$A^T \in M_{n,m}(K)$ — это матрица с элементами $a_{i,j}^T := a_{j,i}$ (для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$)

Теорема 2

Пусть $A \in M_n(K)$. Тогда $\det(A^T) = \det(A)$.

Доказательство. • По определению

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)}^T \cdots a_{n,\sigma(n)}^T =$$
$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \quad (*)$$

- Чтобы посчитать $\det(A)$, нужно сложить те же произведения, что в (*), вот только с какими знаками?
- Нужно переупорядочить $a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ так, чтобы первые индексы шли в порядке $1, 2, \dots, n$ (а не $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$).
- Это означает, что к первым индексам нужно применить подстановку σ^{-1} , она же применится ко вторым индексам, и мы получим $a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$.

- Понятно, что σ пробегает все значения из S_n , если и только если σ^{-1} пробегает все значения из S_n .
- Так как по Теореме 6.3, $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$, мы можем продолжить (*):

$$\begin{aligned}\det(A^T) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \text{sign}(\sigma^{-1}) \cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \det(A). \quad \square\end{aligned}$$

- Можно определить аналоги элементарных преобразований строк для столбцов.
- По Теореме 2 понятно, что аналоги всех свойств 1 – 6 определителя верны и для столбцов вместо строк.

Минор и алгебраическое дополнение

Определение

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$ и $k \leq \min(m, n)$.

- Выделим строки с номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и столбцы с номерами $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.
- На их пересечении находится k^2 элементов, составим из них матрицу, не меняя порядка строк и столбцов. Определитель этой матрицы Δ называется *минором порядка k* .

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$, $k < n$, а Δ — минор со строками $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и столбцами $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

- Вычеркнем указанные строки и столбцы, после чего в остальных $n - k$ строках и $n - k$ столбцах аналогично определим минор Δ' порядка $n - k$ — это *дополнительный минор* для Δ .
- *Алгебраическое дополнение* минора Δ — это $A_{\Delta} = (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \Delta'$.

Теорема Лапласа

Теорема 3

Пусть $A \in M_n(K)$, $k < n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Тогда $\det(A)$ равен сумме $\Delta \cdot A_\Delta$ по всем минорам Δ в строках i_1, i_2, \dots, i_k (при всех возможных выборах k столбцов).

Доказательство.

Утверждение 1

Сумма $\Delta \cdot A_\Delta$ по всем минорам Δ в строках i_1, \dots, i_k — это в точности сумма (с некоторыми знаками) произведений, входящих в $\det(A)$.

Доказательство. • Рассмотрим

$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ и конкретное произведение $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$, входящее в определитель.

- Для каждой из строк i_1, i_2, \dots, i_k отметим столбец с номером $\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_k)$ соответственно.
- Мы получили k столбцов, в которых расположены перемножаемые элементы, упорядочим их по возрастанию — пусть получится $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

- Обозначим через Δ минор со строками i_1, i_2, \dots, i_k и столбцами j_1, j_2, \dots, j_k . Тогда произведение $a_{i_1, \sigma(i_1)} \cdots a_{i_k, \sigma(i_k)}$ входит в минор Δ (с некоторым знаком).
- Элементы вида $a_{s, \sigma(s)}$ при $1 \leq s \leq n$, $s \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ попадут не в столбцы с номерами j_1, \dots, j_k , следовательно, произведение этих $n - k$ элементов войдет в дополнительный минор Δ' , а значит, и в алгебраическое дополнение A_Δ (опять же, с некоторым знаком).
- Таким образом, $a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)}$ входит в произведение $\Delta \cdot A_\Delta$ для столбцов j_1, j_2, \dots, j_k и не входит в другие аналогичные слагаемые.
- Наоборот, рассмотрим минор Δ в столбцах j_1, \dots, j_k и любое произведение из $\Delta \cdot A_\Delta$.
- В этом произведении в каждой строке взято ровно по одному элементу матрицы (для строк i_1, \dots, i_k — в миноре Δ , для остальных строк — в A_Δ), в каждом столбце взято тоже ровно по одному элементу матрицы (для столбцов j_1, \dots, j_k — в миноре Δ , для остальных столбцов — в A_Δ).
- Значит, это произведение с некоторым знаком входит в $\det(A)$ и мы получаем обратное соответствие.



- Таким образом, достаточно доказать:

Утверждение 2

Для каждого минора Δ в строках i_1, \dots, i_k все произведения из $\Delta \cdot A_\Delta$ имеют такой же знак, какой они имеют в $\det(A)$.

Доказательство. • Рассмотрим конкретный минор Δ в строках $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и столбцах $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

- Для удобства мы переделаем элементарными преобразованиями матрицу A в матрицу B так, чтобы минор Δ попал в верхний левый угол, и при этом порядок строк и порядок столбцов из Δ не поменялся, а также порядок остальных строк и порядок остальных столбцов не поменялся.

- Сначала займемся строками: строка i_1 всплывает наверх (на место строки 1), меняясь местами последовательно со строками $i_1 - 1, \dots, 2, 1$ — всего $i_1 - 1$ обмен.

- Потом аналогично строка i_2 всплывает на 2 место, делая $i_2 - 2$ обмена, и так далее, строка i_k всплывает на k место за $i_k - k$ обменов.

- Аналогично, столбцы j_1, \dots, j_k двигаются налево, делая $j_1 - 1, \dots, j_k - k$ обменов.

- В итоге получилась матрица B , а каждое из выполненных элементарных преобразований меняло знак определителя, поэтому,

$$\det(B) = (-1)^{(i_1-1)+\dots+(i_k-k)+(j_1-1)+\dots+(j_k-k)} \det(A) = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} \det(A).$$

- В этой матрице минор Δ занимает левый верхний угол, а его дополнительный минор — по построению, это по-прежнему Δ' — в правом нижнем углу.

- Поэтому, алгебраическое дополнение Δ в матрице B считается как

$$B_{\Delta} = (-1)^{1+\dots+k+1+\dots+k} \Delta' = \Delta' = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} A_{\Delta}.$$

- Итак, $\det B = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} \det(A)$ и $\Delta \cdot B_{\Delta} = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} \Delta \cdot A_{\Delta}$.

- Поэтому, нам достаточно доказать Утверждение 2 для матрицы B .

- Итак, рассмотрим $\Delta \cdot B_\Delta = \Delta \cdot \Delta'$.
- Как мы знаем, $\Delta = \sum_{\tau \in S_k} (-1)^{l(\tau)} b_{1,\tau(1)} \cdots b_{k,\tau(k)}$.
- С учетом того, что строки и столбцы в Δ' имеют в B номера $k+1, \dots, n = k + (n-k)$, этот определитель можно переписать как

$$\Delta' = \sum_{\tau' \in S_{n-k}} (-1)^{l(\tau')} b_{k+1,k+\tau'(1)} \cdots b_{k+(n-k),k+\tau'(n-k)}.$$

- Для конкретных τ и τ' произведение

$$b_{1,\tau(1)} \cdots b_{k,\tau(k)} b_{k+1,k+\tau'(1)} \cdots b_{k+(n-k),k+\tau'(n-k)}$$

входит в $\det(B)$ со знаком $(-1)^{l(\sigma)}$, где σ — подстановка, переставляющая $1, \dots, k$ как τ и переставляющая $k+1, \dots, n = k + (n-k)$ как $k + \tau'$.

- Но инверсий между блоками из первых k чисел и последних $n-k$ чисел в σ нет (первые k чисел не превосходят k , а все следующие больше k), поэтому, $l(\sigma) = l(\tau) + l(\tau')$, что нам и нужно:

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{k,\sigma(k)} b_{k+1,\sigma(k+1)} \cdots b_{n,k+\sigma(n)}. \quad \square$$

- Из Утверждения 1 и Утверждения 2 следует Теорема. □

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$. Для $i, j \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через $A_{i,j}$ алгебраическое дополнение элемента $a_{i,j}$ (как минора порядка 1). Это минор, полученный из A вычеркиванием i строки и j столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Следствие 1

Пусть $A \in M_n(K)$, $s, t \in \{1, \dots, n\}$, $s \neq t$. Тогда

$$1) \quad \sum_{i=1}^n a_{s,i} A_{s,i} = \det(A);$$

$$2) \quad \sum_{i=1}^n a_{t,i} A_{s,i} = 0.$$

Доказательство. 1) Теорема 3 для разложения по s строке.

2) • Пусть A' получена из A заменой s строки на t (то есть $A'_s = A_t$ и $A'_j = A_j$ при $j \neq s$).

• Тогда $A'_{s,i} = A_{s,i}$ и $a'_{s,i} = a_{t,i}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

• Так как матрица A' имеет две одинаковые строки и по пункту 1 имеем

$$0 = \det(A') = \sum_{i=1}^n a'_{s,i} A'_{s,i} = \sum_{i=1}^n a_{t,i} A_{s,i}.$$



- Утверждения, аналогичные Теореме 3 и Следствию 1, верны и для столбцов вместо строк (транспонирование матрицы меняет местами строки и столбцы, но не меняет определитель).
- Таким образом, определитель можно раскладывать как по строкам, так и по столбцам.

Ступенчатые матрицы

Определение

Пусть A_1, \dots, A_k — квадратные матрицы, $A_i \in M_{n_i}(K)$,
 $n = n_1 + \dots + n_k$, $A \in M_n(K)$.

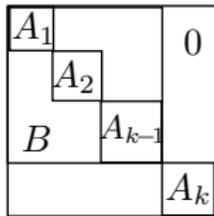
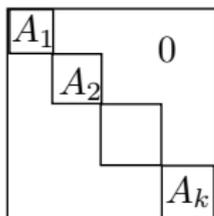
- Будем говорить, что $A \in M^+(A_1, \dots, A_k)$, если в матрице A по диагонали расположены квадратные блоки A_1, \dots, A_k , а все коэффициенты сверху от них равны 0.

- Будем говорить, что $A \in M^-(A_1, \dots, A_k)$, если в матрице A по диагонали расположены квадратные блоки A_1, \dots, A_k , а все коэффициенты снизу от них равны 0.

- Матрицы из

$M(A_1, \dots, A_k) := M^+(A_1, \dots, A_k) \cup M^-(A_1, \dots, A_k)$

называются **ступенчатыми**.



Теорема 4

Пусть $A \in M(A_1, \dots, A_k)$. Тогда $\det(A) = \prod_{i=1}^k \det(A_i)$.

Доказательство. • Индукция по k . База для $k = 1$ очевидна.

Переход $k - 1 \rightarrow k$. Пусть $k \geq 2$, а матрица $B \in M(A_1, \dots, A_{k-1})$ — как на рис. справа. Тогда $A \in M(B, A_k)$.

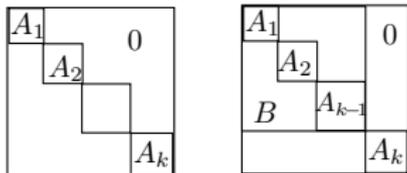
• Пусть $m = n_1 + \dots + n_{k-1}$. Тогда применим теорему Лапласа для разложения матрицы A по строкам $1, \dots, m$.

• Так как определитель матрицы с нулевым столбцом равен 0, в этих строках есть только один ненулевой минор порядка m — это $\det(B)$.

• Тогда по Теореме 3 и индукционному предположению

$$\det(A) = \det(B) \det(A_k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \det(A_i) \right) \cdot \det(A_k) = \prod_{i=1}^k \det(A_i).$$

□



Теорема 5

Пусть $A, B \in M_n(K)$. Тогда $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Доказательство. • Рассмотрим ступенчатую матрицу

$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E_n & B \end{pmatrix}$. (Здесь $-E_n$ — матрица с -1 по главной диагонали и остальными 0 .)

- Тогда $C \in M^+(A, B)$ и $\det(C) = \det(A)\det(B)$ по Теореме 4.
- Элементарными преобразованиями столбцов типа II мы переведем C в матрицу $D \in M_{2n}(K)$ так, чтобы в правой нижней четверти B заменилась на нулевую матрицу.
- Для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ столбец $C^{(n+k)}$ имеет n нулей, а далее располагается столбец $B^{(k)}$.
- Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ столбец $C^{(i)}$ сверху содержит $A^{(i)}$, а нижние n его элементов — это -1 на позиции $n+i$ и остальные 0 .

- Для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ сделаем следующие операции
- Прибавим $\sum_{i=1}^n b_{i,k} C^{(i)}$ к столбцу $C^{(n+k)}$ (каждое прибавление — элементарное преобразование типа 2, не меняет определитель).
- В результате из $C^{(n+k)}$ получился столбец $D^{(n+k)}$, нижние k элементов которого — нули. (элемент $c_{n+s, n+k} = b_{s,k}$ обнуляется при прибавлении $b_{s,k} C^{(s)}$ и не меняется при остальных преобразованиях.)
- Верхние k элементов столбца $C^{(n+k)}$ были нулями. В результате преобразований для каждого $s \in \{1, \dots, n\}$ получилось

$$d_{s, n+k} = \sum_{i=1}^n a_{s,i} \cdot b_{i,k} = (ab)_{s,k}.$$

- Таким образом, $D = \begin{pmatrix} A & AB \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$.

- Применим к D n элементарных преобразований столбцов типа I: поменяем местами столбцы $D^{(k)}$ и $D^{(n+k)}$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$.

- Получится матрица

$$D^* = \begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & -E_n \end{pmatrix} \in M^-(AB, E_n).$$

- Так как каждое элементарное преобразование типа I меняет знак определителя и по Теореме 4 имеем:

$$\det(D^*) = \det(AB) \det(-E_n) = (-1)^n \det(AB) \quad \text{и}$$

$$\det(D^*) = (-1)^n \det(D) = (-1)^n \det(C) = (-1)^n \det(A) \det(B),$$

откуда следует, что $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. □

- Далее везде K — поле.

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$. **Взаимная матрица** $\tilde{A} \in M_n(K)$ задается формулой $\tilde{a}_{i,j} := A_{j,i}$ для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

- Для $\lambda \in K$ и $A \in M_n(K)$ через λA обозначается матрица, полученная из A умножением всех коэффициентов на λ .

Лемма 2

Для любой матрицы $A \in M_n(K)$ выполнено
 $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$.

Доказательство.

$$(a \cdot \tilde{a})_{s,t} = \sum_{i=1}^n a_{s,i} \cdot \tilde{a}_{i,t} = \sum_{i=1}^n a_{s,i} \cdot A_{t,i} = \begin{cases} \det(A), & \text{при } s = t \\ 0, & \text{при } s \neq t \end{cases}$$

по Следствию 1. Значит, $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot E_n$.

$$(\tilde{a} \cdot a)_{s,t} = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{s,i} \cdot a_{i,t} = \sum_{i=1}^n a_{i,t} \cdot A_{i,s} = \begin{cases} \det(A), & \text{при } s = t \\ 0, & \text{при } s \neq t \end{cases}$$

по аналогу Следствия 1 для столбцов. Значит,
 $\tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$.

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$.

- Матрица A — **обратимая справа**, если существует такая $B \in M_n(K)$, что $AB = E_n$.
- Матрица A — **обратимая слева**, если существует такая $C \in M_n(K)$, что $CA = E_n$.
- Обратимая и слева, и справа матрица называется **обратимой**, или **невырожденной**. Остальные матрицы — **необратимые**, или **вырожденные**.
- Если $B \in M_n(K)$ такова, что $AB = BA = E_n$, то B называется **обратной** к A и применяется обозначение $A^{-1} = B$.
- Если обратная матрица к A существует, то она единственна: мы знаем, что обратный элемент по умножению к обратимому элементу любого кольца ровно один.

Теорема 6

- 1) Обратимые матрицы — это в точности матрицы, имеющие ненулевой определитель.
- 2) Обратимая слева (или справа) матрица обратима.

Доказательство. 1) • Пусть $A, B \in M_n(K)$, $AB = E_n$. Тогда по Теореме 5

$$\det(A) \det(B) = \det(AB) = \det(E_n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \det(A) \neq 0, \\ \det(B) \neq 0. \end{cases}$$

- Таким образом, матрица с нулевым определителем не может быть обратной ни слева, ни справа.
- Наоборот, пусть $\det(A) \neq 0$, а $B = \det(A)^{-1} \cdot \tilde{A}$.
- По Лемме 2 мы имеем $AB = BA = E_n$. Значит, A обратима.

2) Выше доказано, что обратимая слева или справа матрица имеет ненулевой определитель, а значит, она обратима. \square

Строчный и столбцовый ранг матрицы

Определение

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$.

- **Строчный ранг матрицы** A — это $r_s(A) := \dim(\text{Lin}(A_1, \dots, A_m))$.
- **Столбцовый ранг матрицы** A — это $r^s(A) := \dim(\text{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}))$.
- Наша цель — доказать, что $r_s(A) = r^s(A)$ для любой матрицы A . Это число называется **рангом** A и обозначается через $\text{rk}(A)$.

Лемма 3

- 1) *Строчный ранг сохраняется при элементарных преобразованиях строк.*
- 2) *Столбцовый ранг сохраняется при элементарных преобразованиях столбцов.*

Доказательство. • Утверждения аналогичны, достаточно доказать первое.

- Пусть матрица $A' \in M_{n,m}$ получена из A элементарным преобразованием строк. Пусть $L = \text{Lin}(A_1, \dots, A_n)$ и $L' = \text{Lin}(A'_1, \dots, A'_n)$.
- Достаточно доказать, что $L = L'$, тогда $r_s(A) = \dim(L) = \dim(L') = r_s(A')$.
- Если это преобразование типа I, то строки остаются теми же (просто в другом порядке), значит, $L = L'$.
- Пусть это преобразование типа III, скажем, $A'_i = \lambda A_i$ для $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ а остальные строки матриц совпадают.
- Тогда $A'_i = \lambda A_i \in L$, значит, $L' \subset L$.
- Так как элементарные преобразования обратимы, аналогично $L \subset L'$, а значит, $L = L'$.
- Пусть это преобразование типа II, скажем, $A'_i = A_i + \lambda A_j$ для $\lambda \in K$, а остальные строки матриц совпадают.
- Тогда $A'_i = A_i + \lambda A_j \in L$, значит, $L' \subset L$.
- Так как элементарные преобразования обратимы, аналогично $L \subset L'$, а значит, $L = L'$. □

Лемма 4

$A, B \in M_{m,n}(K)$, причем B получена из A элементарным преобразованием строк, $1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$.

Тогда

$$\lambda_1 A^{(s_1)} + \dots + \lambda_k A^{(s_k)} = 0 \iff \lambda_1 B^{(s_1)} + \dots + \lambda_k B^{(s_k)} = 0.$$

Доказательство. • Положим $c_{i,j} := a_{i,s_j}$ и $d_{i,j} := b_{i,s_j}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$. Рассмотрим ОСЛУ

$$\begin{cases} c_{1,1}y_1 + \dots + c_{1,k}y_k = 0 \\ \dots \\ c_{m,1}y_1 + \dots + c_{m,k}y_k = 0 \end{cases} \quad (*) \quad \text{и} \quad \begin{cases} d_{1,1}y_1 + \dots + d_{1,k}y_k = 0 \\ \dots \\ d_{m,1}y_1 + \dots + d_{m,k}y_k = 0 \end{cases} \quad (**).$$

• Так как B получена из A элементарным преобразованием строк, ОСЛУ $(**)$ получена из $(*)$ элементарным преобразованием.

• По Лемме 5.2, решения ОСЛУ $(*)$ и $(**)$ — одни и те же.

• Для завершения доказательства достаточно отметить, что

$$\lambda_1 A^{(s_1)} + \dots + \lambda_k A^{(s_k)} = 0 \iff y_1 = \lambda_1, \dots, y_k = \lambda_k \text{ — решение } (*)$$

и

$$\lambda_1 B^{(s_1)} + \dots + \lambda_k B^{(s_k)} = 0 \iff y_1 = \lambda_1, \dots, y_k = \lambda_k \text{ — решение } (**).$$



Лемма 5

1) *Столбцовый ранг сохраняется при элементарных преобразованиях строк.*

2) *Строчный ранг сохраняется при элементарных преобразованиях столбцов.*

Доказательство. • Утверждения аналогичны, достаточно доказать первое.

• Пусть $A, B \in M_{m,n}(K)$, причем B получена из A элементарным преобразованием строк.

• Пусть $L = \text{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ и $L' = \text{Lin}(B^{(1)}, \dots, B^{(n)})$.

• По Теореме 5.1 из $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ можно выбрать базис L — пусть это $A^{(s_1)}, \dots, A^{(s_k)}$. Тогда $r^{(s)}(A) = k$.

• Тогда и $B^{(s_1)}, \dots, B^{(s_k)}$ ЛНЗ (если $\lambda_1 B^{(s_1)} + \dots + \lambda_k B^{(s_k)} = 0$, то по Лемме 4 и $\lambda_1 A^{(s_1)} + \dots + \lambda_k A^{(s_k)} = 0$, откуда $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$).

• Значит, $r^{(s)}(B) \geq k = r^{(s)}(A)$.

• Так как элементарные преобразования обратимы, аналогично доказывается, что $r^{(s)}(A) \geq r^{(s)}(B)$.

Определение

Для $r \leq \min(m, n)$ пусть $E^r \in M_{m,n}(K)$ — матрица, в которой $e_{i,i}^r = 1$ для всех $i \in \{1, \dots, r\}$, а все остальные коэффициенты матрицы равны 0.

Лемма 6

Любую матрицу $A \in M_{m,n}(K)$ можно привести элементарными преобразованиями к матрице E^r для некоторого $r \leq \min(m, n)$.

Доказательство. • Мы будем менять матрицу, не переименовывая ее.

- Если все элементы матрицы равны 0, то $A = E^0$.
- Если в матрице есть ненулевой элемент, то можно считать, что $a_{1,1} \neq 0$ (иначе поменяем местами строки и столбцы так, чтобы ненулевой элемент оказался на этой позиции).
- Далее поделим 1 строку на $a_{1,1}$, получим новую матрицу, в которой $a_{1,1} = 1$.

- Для всех $i \in \{2, \dots, m\}$ заменим строку A_i на $A_i - a_{i,1}A_1$. В результате этих элементарных преобразований в левом столбце все элементы, кроме $a_{1,1} = 1$ будут равны 0.
- Теперь для всех $j \in \{2, \dots, n\}$ заменим столбец $A^{(j)}$ на $A^{(j)} - a_{1,j}A^{(1)}$. В результате этих элементарных преобразований в первой строке все элементы, кроме $a_{1,1} = 1$ будут равны 0. Элементы левого столбца не изменятся.
- Теперь рассмотрим подматрицу A' , полученную удалением 1 строки и 1 столбца. Аналогичными действиями меньшую матрицу A' можно привести к виду $E^{r'}$.
- Выполним те же преобразования, что в матрице A' , со столбцами $2 - n$ и строками $2 - m$ матрицы A . В результате 1 строка и 1 столбец не изменятся, и мы получим матрицу $E^{r'+1}$. □

Теорема 7

Для любой матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ выполнено
 $r_s(A) = r^s(A)$.

Доказательство. • По Лемме 6 для некоторого $r \leq \min(m, n)$ можно элементарными преобразованиями привести A к E^r .

• Очевидно, $r_s(E^r) = r^s(E^r) = r$.

• По Леммам 3 и 5 мы имеем

$$r_s(A) = r_s(E^r) = r = r^s(E^r) = r^s(A). \quad \square$$

• Теперь мы знаем, что ранг матрицы определен корректно, и его можно вычислять как размерность пространства строк этой матрицы, так и как размерность пространства ее столбцов.

• Если $A \in M_{m,n}(K)$, то $\text{rk}(A) \leq m$ и $\text{rk}(A) \leq n$.

Лемма 7

При элементарных преобразованиях наибольший порядок ненулевого минора матрицы не изменяется.

Доказательство. • Пусть $A, A' \in M_{m,n}(K)$, причем A' получена из A элементарным преобразованием.

• Можно считать, что это преобразование строк (иначе транспонируем матрицу, те же самые миноры останутся ненулевыми по Теореме 2, а строки поменяются местами со столбцами).

Утверждение

Если у матрицы A нет ненулевых миноров порядка k , то и у матрицы A' нет ненулевых миноров порядка k .

Доказательство. • Пусть Δ' — ненулевой минор порядка k матрицы A' , а Δ — минор A в тех же строках и столбцах. По условию $\Delta = 0$.

- Тогда $\Delta' \neq \Delta$ не является минором A , значит, содержит хотя бы одну из строк над которыми произведено элементарное преобразование.
- Рассмотрим три случая.

Случай 1: элементарное преобразование имеет тип III.

- Пусть строка матрицы A умножена на $\lambda \in K$. Тогда $\Delta' = \lambda\Delta = 0$ по Свойству 3 определителя, противоречие.

Случай 2: элементарное преобразование имеет тип I.

- Пусть, скажем, $A'_i = A_j$ и $A'_j = A_i$.
- Если минор Δ' содержит части обеих строк A'_i и A'_j , то в миноре Δ они просто стоят в обратном порядке и $\Delta' = \Delta = 0$ по Свойству 1 определителя, противоречие.
- Пусть Δ' содержит часть A'_i , но не содержит часть A'_j .
- Так как часть A'_i — это аналогичная часть A_j , в этом случае матрица A также имеет минор Δ^* с точно такими же строками и столбцами (нужно вместо строки A_i взять A_j), возможно, расставленными в другом порядке.
- Тогда $\Delta' = \pm\Delta^* = 0$, противоречие.

Случай 3: элементарное преобразование имеет тип II.

- Пусть, скажем, $A'_i = A_i + \lambda A_j$.
- Пусть $\Delta' = \det(B')$, $\Delta = \det(B)$, где $B, B' \in M_k(K)$ — соответствующие матрицы. Тогда эти матрицы содержат части строк A_i и A'_i соответственно.

Теорема 8

Для любой матрицы $A \in M_{m,n}(K)$ ее ранг равен наибольшему порядку ненулевого минора в A .

Доказательство. • По Лемме 6 матрицу A можно привести элементарными преобразованиями к матрице E^r для некоторого $r \leq \min(m, n)$.

- Тогда $\text{rk}(A) = \text{rk}(E^r) = r$.
- С другой стороны, наибольший порядок ненулевого минора в E^r — это, очевидно, r . По Лемме 7, это верно и для A . \square

Следствие 2

Матрица $A \in M_n(K)$ обратимая, если и только если $\text{rk}(A) = n$.

Доказательство. \Rightarrow . Если A — обратимая, то $\det(A) \neq 0$ по Теореме 6. Значит, максимальный порядок ненулевого минора равен n , тогда и $\text{rk}(A) = n$ по Теореме 8.

\Leftarrow . Если $\text{rk}(A) = n$, то по Теореме 8 матрица $A \in M_n(K)$ имеет ненулевой минор порядка n . Значит, $\det(A) \neq 0$ и по Теореме 6 матрица A обратима. \square

Матрицы элементарных преобразований

- Пусть $A \in M_{m,n}(K)$.
- Элементарные преобразования матрицы A можно представить в виде умножения A на матрицы специального вида.

Элементарное преобразование I типа

- Пусть $s, t \in \{1, \dots, m\}$, $s \neq t$. Рассмотрим матрицу $E_m^{s,t} \in M_m(K)$, полученную из E_m переменой позиций двух 1:

$e^{s,t}(s, t) = e^{s,t}(t, s) = 1$, $e^{s,t}(i, i) = 1$ при $i \notin \{s, t\}$,
остальные коэффициенты равны 0.

- Нетрудно проверить, что $E_m^{s,t} \cdot A$ — это матрица, полученная из A перестановкой s и t строк.
- Наоборот, Пусть $s, t \in \{1, \dots, n\}$, определим аналогично матрицу $E_n^{s,t} \in M_n(K)$.
- Тогда $A \cdot E_n^{s,t}$ — это матрица, полученная из A перестановкой s и t столбцов.

Элементарное преобразование II типа

- Пусть $s, t \in \{1, \dots, m\}$, $s \neq t$, $\lambda \in K$. Рассмотрим матрицу $E_m^{s,t,\lambda} \in M_m(K)$, полученную из E_m изменением одного 0 на λ :

$e^{s,t,\lambda}(s, t) = \lambda$ (остальные коэффициенты как в единичной матрице E_m).

- Нетрудно проверить, что $A' = E_m^{s,t,\lambda} \cdot A$ — это матрица, полученная из A преобразованием II типа $A'_s = A_s + \lambda A_t$ (остальные строки в матрицах A и A' совпадают).
- Наоборот, Пусть $s, t \in \{1, \dots, n\}$, определим аналогично матрицу $E_n^{s,t,\lambda} \in M_n(K)$.
- Тогда $B = A \cdot E_n^{s,t,\lambda}$ — это матрица, полученная из A преобразованием II типа $B^{(s)} = A^{(s)} + \lambda A^{(t)}$ (остальные столбцы в матрицах A и B совпадают).

Элементарное преобразование III типа

- Пусть $s \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Рассмотрим матрицу $E_m^{s,\lambda} \in M_m(K)$, полученную из E_m изменением одной 1 на λ :

$e_m^{s,\lambda}(s, s) = \lambda$ (остальные коэффициенты как в единичной матрице E_m).

- Нетрудно проверить, что $A' = E_m^{s,\lambda} \cdot A$ — это матрица, полученная из A умножением s строки на λ .

- Наоборот, Пусть $s \in \{1, \dots, n\}$, определим аналогично матрицу $E_n^{s,\lambda} \in M_n(K)$.

- Тогда $A' = A \cdot E_n^{s,\lambda}$ — это матрица, полученная из A умножением s столбца на λ .

- Пусть $A \in M_n(K)$. По Лемме б матрицу A можно привести элементарными преобразованиями к виду E^r , где $r \leq n$.
- Если $r < n$, то $\text{rk}(A) = r < n$ и матрица A по Следствию 2 необратима.
- Пусть $r = n$, произведены элементарные преобразования строк с матрицами P_1, \dots, P_k (в указанном порядке) и элементарные преобразования столбцов с матрицами Q_1, \dots, Q_ℓ (в указанном порядке). Тогда

$$P_k \dots P_1 \cdot A \cdot Q_1 \dots Q_\ell = E_n \Rightarrow$$

$$A = P_1^{-1} \dots P_k^{-1} \cdot E_n \cdot Q_\ell^{-1} \dots Q_1^{-1} \Rightarrow A^{-1} = Q_1 \dots Q_\ell \cdot P_k \dots P_1.$$

- Каждую матрицу можно элементарными преобразованиями строк привести к **ступенчатому виду**: пусть $s_1 < s_2 < \dots < s_k$, тогда i строка матрицы для $i \in \{1, \dots, k\}$ будет иметь вид: $a_{i,j} = 0$ при $j < s_i$, $a_{i,s_i} = 1$, далее произвольные коэффициенты;

строки с номерами более k будут нулевыми. (Алгоритм для СЛУ из Леммы 5.3 легко применяется для матриц.)

- Если $A \in M_n(K)$ — невырожденная матрица, то $k = n$ и $s_i = i$ для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ (иначе A имеет нулевую строку, а значит, $\det(A) = 0$, что не так).
- Значит, A приводится элементарными преобразованиями строк к **верхне-треугольному** виду: на главной диагонали 1, под ней 0.
- Теперь элементарными преобразованиями строк несложно обнулить верхний треугольник (все элементы над главной диагональю).
- Таким образом, мы приведем A к единичной матрице элементарными преобразованиями только строк, что бывает удобно.
- Соответственно, формула обратной матрицы будет иметь вид $A^{-1} = P_k \dots P_1$.

Матричная запись СЛУ

- Пусть K — поле, $a_{i,j} \in K$ (где $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$)
Рассмотрим СЛУ с неизвестными x_1, \dots, x_m :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2, \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n. \end{cases} \quad (*)$$

Определение

- Матрица системы** $(*)$ — это матрица $A \in M_{n,m}(K)$ с коэффициентами $a_{i,j}$. Положим $X = (x_1, \dots, x_m)^T$ — **столбец неизвестных**, $B = (b_1, \dots, b_n)^T$.
- $AX = B$ — **матричная запись** системы $(*)$.
- $(A|B)$ — **Расширенная матрица** системы $(*)$ (справа добавлен столбец B).
- Система $(*)$ называется **совместной**, если она имеет решение.
- ОСЛУ всегда совместна, так как имеет нулевое решение.

Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 9

СЛУ $AX = B$ совместна, если и только если $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$.

Доказательство. • $AX = B$ совместна

$$\iff \exists X \in K^m : AX = B \iff$$

$$\exists x_1, \dots, x_m \in K : x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_m A^{(m)} = B$$

$$\iff B \in \text{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \iff$$

$$\text{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) = \text{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}, B) \iff$$

$$\dim(\text{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})) = \dim(\text{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}, B))$$

$$\iff \text{rk}(A) = \text{rk}(A|B).$$

• Равенство двух линейных оболочек эквивалентно равенству их размерностей (предпоследний переход), так как одна из них является линейным подпространством другой.

Пространство решений однородной системы линейных уравнений.

- Как нам известно из Леммы 5.3, любую ОСЛУ можно привести к ступенчатому виду, от этого множество решений не меняется.
- Итак, мы имеем ОСЛУ в ступенчатом виде: пусть $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq m$,

$$\begin{cases} x_{s_1} + a_{1,s_1+1}x_{s_1+1} + \dots & + a_{1,m}x_m = 0, \\ x_{s_2} + a_{2,s_2+1}x_{s_2+1} + \dots & + a_{2,m}x_m = 0, \\ \dots & \\ & x_{s_k} + a_{k,s_k+1}x_{s_k+1} + \dots + a_{k,m}x_m = 0. \end{cases} \quad (*)$$

- Назовем **главными** все переменные, кроме x_{s_1}, \dots, x_{s_k} .

Лемма 8

Пусть A — матрица системы (*). Тогда $\text{rk}(A) = k$.

Доказательство. • $\text{rk}(A) = \dim(\text{Lin}(A_1, \dots, A_k))$. Таким образом, нам нужно доказать, что все строки матрицы A ЛНЗ.

- Сделаем это индукцией по k . База $k = 1$ очевидна. Докажем переход.

- Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ таковы, что $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k = 0$.
- В столбце s_1 есть 1 в строчке A_1 , остальные коэффициенты равны 0. Значит, $\lambda_1 = 0$.
- Теперь $\lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k = 0$ и по индукционному предположению имеем $\lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, то есть, строки A ЛНЗ. □

Лемма 9

Решения ОСЛУ $AX = 0$ (*) с $A \in M_{n,m}(K)$ образуют линейное подпространство K^m .

Доказательство. • Пусть $U \subset K^m$ — множество всех решений. Тогда $X \in U \iff AX = 0$.

- Пусть $X^1, X^2 \in U, \lambda \in K$.
- Тогда $A(X^1 + X^2) = A(X^1) + A(X^2) = 0 + 0 = 0$, значит, $X^1 + X^2 \in U$.
- Тогда $A(\lambda X^1) = \lambda A(X^1) = \lambda 0 = 0$, значит, $\lambda X^1 \in U$.
- По Лемме 5.1 получаем, что U — линейное подпространство K^m . □

Определение

U называется **пространством решений** системы (*).

- Напомним: пусть $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq m$,

$$\begin{cases} x_{s_1} + a_{1,s_1+1}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = 0, \\ x_{s_2} + a_{2,s_2+1}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m = 0, \\ \dots \\ x_{s_k} + a_{k,s_k+1}x_2 + \dots + a_{k,m}x_m = 0. \end{cases} \quad (*)$$

- **Главные переменные** — все, кроме x_{s_1}, \dots, x_{s_k} .

Лемма 10

Для любого набора значений главных переменных существует единственное решение системы () с такими значениями.*

Доказательство. • Из k уравнения однозначно вычисляется x_{s_k} (все переменные с большими номерами нам известны).

• Потом из $k - 1$ уравнения однозначно вычисляется $x_{s_{k-1}}$, и так далее, однозначно находятся значения всех неглавных переменных. □

• Если в решении (*) все главные переменные равны 0, то и все остальные тоже равны 0 (это следует из Леммы 10, а кроме того, несложно проверить напрямую).

Теорема 10

Пусть U — пространство решений ОСЛУ $AX = 0$ (*) с m неизвестными. Тогда $\dim(U) = m - \text{rk}(A)$.

Доказательство. • Так как $\text{rk}(A) = \dim(\text{Lin}(A_1, \dots, A_k)) = k$, достаточно доказать, что $\dim(U)$ равняется количеству главных переменных.

- Пронумеруем главные переменные: $x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-k}}$.
- Определим решение $r^s \in U$: Положим $r_{i_s}^s = 1$ и $r_{i_j}^s = 0$ при $j \in \{1, \dots, m-k\}, j \neq s$. После чего по Лемме 10 однозначно определим значения неглавных переменных.
- Докажем, что r^1, \dots, r^{m-k} — базис U .

Порождающая система. • Пусть $x \in U$. Рассмотрим $x' = x_{i_1} r^1 + \dots + x_{i_{m-k}} r^{m-k}$.

- По Лемме 9, $x' \in U$.
- Заметим, что $x'_{i_s} = \sum_{j=1}^{m-k} x_{i_j} r_{i_s}^j = x_{i_s} r_{i_s}^s = x_{i_s}$ для всех $s \in \{1, \dots, m-k\}$.
- Таким образом, $x, x' \in U$ — два решения (*), в которых совпадают все значения главных переменных.
- По Лемме 10 тогда $x = x'$. Значит, $x \in \text{Lin}(r^1, \dots, r^{m-k})$.

Вектора r^1, \dots, r^{m-k} — ЛНЗ.

- Пусть $\alpha_1 r^1 + \dots + \alpha_{m-k} r^{m-k} = 0$.

- Тогда для любого $s \in \{1, \dots, m-k\}$

$$\alpha_1 r_{i_s}^1 + \dots + \alpha_{m-k} r_{i_s}^{m-k} = 0.$$

- Так как $r_{i_s}^j = 0$ при $j \neq s$ и $r_{i_s}^s = 1$, отсюда следует, что $\alpha_s = 0$.

- Таким образом, r^1, \dots, r^{m-k} — ЛНЗ, а следовательно — базис пространства решений системы (*).

- Следовательно, $\dim(U) = m - k = m - \text{rk}(A)$. □

Определение

Фундаментальная система решений ОСЛУ $AX = 0$ — это любой базис ее пространства решений.

Решения неоднородной СЛУ

- Рассмотрим совместную СЛУ $AX = B$ (*) с m неизвестными и соответствующую ей ОСЛУ $AX = 0$ (**).
- Как мы знаем, решения ОСЛУ (**) образуют линейное пространство — пространство решений U .

Лемма 11

Множество решений W системы () — аффинное подпространство K^m . Если U — пространство решений системы (**), а X^0 — решение (*), то $W = U + X^0$.*

Доказательство. • Достаточно доказать второе утверждение.

- Пусть $X' \in W$. Тогда $A(X' - X^0) = AX' - AX^0 = B - B = 0$, значит, $X' - X^0 \in U$.
- Наоборот, пусть $X' \in U + X^0$.
- Тогда $X' - X^0 \in U$, значит, $AX' = AX^0 + A(X' - X^0) = B + 0 = B$, следовательно, $X' \in W$.
- Таким образом, $W = U + X^0$. □