

Алгебра. Глава 8. Линейные отображения

Д. В. Карпов

2025

- Далее везде U и V — линейные пространства над одним и тем же полем K .

Определение

1) Отображение $\varphi : U \rightarrow V$ называется **линейным отображением**, если оно является гомоморфизмом линейных пространств, то есть,

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) \text{ для всех } \alpha, \beta \in K \text{ и } x, y \in U.$$

2) **Ядро** линейного отображения φ — это

$$\ker(\varphi) = \{x \in U : \varphi(x) = 0\}.$$

3) **Образ** линейного отображения φ — это

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \{y \in V : \exists x \in U \varphi(x) = y\}.$$

Лемма 1

Пусть $\varphi : U \rightarrow V$ — линейное отображение. Тогда:

- 1) $\ker(\varphi)$ — линейное подпространство U ;
- 2) $\operatorname{Im}(\varphi)$ — линейное подпространство V .

Доказательство. 1) • Достаточно доказать, что $\ker(\varphi)$ замкнуто по взятию линейной комбинации.

- Пусть $x, x' \in \ker(\varphi)$ и $\alpha, \beta \in K$.
- Тогда $\varphi(\alpha x + \beta x') = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x') = 0$, а значит, $\alpha x + \beta x' \in \ker(\varphi)$.

2) • Достаточно доказать, что $\operatorname{Im}(\varphi)$ замкнут по взятию линейной комбинации.

- Пусть $y, y' \in \operatorname{Im}(\varphi)$ и $\alpha, \beta \in K$.
- Тогда существуют такие $x, x' \in U$, что $y = \varphi(x)$ и $y' = \varphi(x')$.
- Следовательно,

$$\varphi(\alpha x + \beta x') = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x') = \alpha y + \beta y',$$

а значит, $\alpha y + \beta y' \in \operatorname{Im}(\varphi)$.

Соответствие линейных отображений и матриц

- Пусть U и V — линейные пространства над полем K , в которых зафиксированы базисы $u_1, \dots, u_m$ и $v_1, \dots, v_n$ соответственно.
- Тогда любой $x \in U$ представляется как столбец $x = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m = (x_1, \dots, x_m)^T$ (столбец координат в разложении по базису, здесь $x_1, \dots, x_m \in K$).
- Аналогично $y \in V$ представляется в виде $y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n = (y_1, \dots, y_n)^T$.
- Пусть $\varphi : U \rightarrow V$ — линейное отображение.
- Подставим в φ базисные вектора пространства U и разложим результаты по базису V :

$$\begin{aligned}\varphi(u_1) &= (a_{1,1}, \dots, a_{n,1})^T = A^{(1)}, \dots, \varphi(u_i) = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})^T = A^{(i)}, \\ &\dots, \varphi(u_m) = (a_{1,m}, \dots, a_{n,m})^T = A^{(m)}.\end{aligned}$$

- Тогда $A = (A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \in M_{n,m}(K)$ (матрица с указанными столбцами) — **матрица** отображения φ в фиксированных нами базисах.

- Смысл этой матрицы в том, что если $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in U$ (координаты в базисе $u_1, \dots, u_m$), то $\varphi(x) = A \cdot (x_1, \dots, x_m)^T = (y_1, \dots, y_n)^T$ — координаты $\varphi(x)$ в базисе $v_1, \dots, v_n$.
- Проверим это:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x_1 u_1 + \dots + x_m u_m) = x_1 \varphi(u_1) + \dots + x_m \varphi(u_m) = \\ &= A^{(1)} x_1 + \dots + A^{(m)} x_m = A \cdot (x_1, \dots, x_m)^T.\end{aligned}$$

- Таким образом, при фиксированных базисах линейное отображение — это просто умножение на матрицу.
- Как правило, оно записывается в виде $Ax = y$, где вектора $x \in U$ и $y \in V$ — столбцы коэффициентов в разложении по фиксированным нами базисам.

- Наоборот, представим вектора из U и V как столбцы координат, пусть $A \in M_{m,n}(K)$.
- Несложно понять, что отображение $\varphi : U \rightarrow V$, заданное формулой $\varphi(x) = Ax$, является линейным и в данных базисах будет иметь как раз матрицу A .
- Линейность проверяется тривиально, а, подставив $x = u_i$ — столбец из нулей и одной единицы на i месте, мы получим, что i столбец матрицы отображения должен быть как раз $A^{(i)}$.
- Таким образом, при фиксации базисов U и V существует биекция между линейными отображениями из U в V и матрицами из $M_{m,n}(K)$ (каждому отображению соответствует его матрица).

Композиция линейных отображений. Связь с умножением матриц

Теорема 1

Пусть U, V, W — конечномерные линейные пространства над полем K , а $\varphi : U \rightarrow V$ и $\psi : V \rightarrow W$ — линейные отображения, имеющие в фиксированных базисах пространств матрицы A_φ и A_ψ соответственно. Тогда композиция $\psi \cdot \varphi$ имеет в этих же базисах матрицу $A_\psi \cdot A_\varphi$.

• Пусть $\dim U = m$, $\dim(V) = n$, $\dim W = \ell$. Тогда $A_\psi \in M_{\ell,n}(K)$ и $A_\varphi \in M_{n,m}(K)$, то есть, произведение матриц $A_\psi \cdot A_\varphi$ определено корректно.

Доказательство Теоремы 1. • Все вектора в нашем доказательстве записаны как столбцы координат в соответствующем фиксированном базисе.

• Тогда для $x \in U$ имеем

$$(\psi \cdot \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(A_\varphi x) = (A_\psi \cdot A_\varphi)x,$$

откуда следует утверждение теоремы.



Теорема 2

Пусть $\varphi : U \rightarrow V$ — линейное отображение, U — конечномерное линейное пространство. Тогда $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim(U)$.

Доказательство. • Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис $\ker(\varphi)$.

• Дополним его до базиса U : $e_1, \dots, e_k, u_1, \dots, u_m$.

• Тогда любой вектор $x \in U$ единственным образом представляется в виде

$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m$, а значит,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(e_i) + \sum_{i=1}^m \beta_i \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^m \beta_i \varphi(u_i).$$

• Таким образом, $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$ — порождающая система векторов в $\operatorname{Im}(\varphi)$.

- Докажем, что вектора $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$ ЛНЗ.

- Пусть $\sum_{i=1}^m \beta_i \varphi(u_i) = 0$.

- Пусть $x = \sum_{i=1}^m \beta_i u_i$. Тогда $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i \varphi(u_i) = 0$.

- Следовательно, $x \in \ker(\varphi)$, а значит, вектор x можно разложить по базису $\ker(\varphi)$: пусть $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$.

- Таким образом, мы имеем два разложения вектора x по базису $e_1, \dots, e_k, u_1, \dots, u_m$ пространства U :

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^m \beta_i u_i.$$

- Но эти два разложения должны совпадать! Следовательно, $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$.

- Таким образом, вектора $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$ ЛНЗ, то есть, это базис $\text{Im}(\varphi)$.

- Следовательно,
 $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)) = k + m = \dim(U)$.



Теорема 3

Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над полем K , в которых фиксированы базисы, а $\varphi : U \rightarrow V$ — линейное отображение с матрицей A . Тогда $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \operatorname{rk}(A)$.

Доказательство. • Как обычно, пусть $\dim(U) = m$, а $u_1, \dots, u_m$ — базис U . Тогда

$$\operatorname{rk}(A) = \dim(\operatorname{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})) = \dim(\operatorname{Lin}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m))).$$

• А теперь заметим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Lin}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)) &= \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(u_i) : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \right\} = \\ &= \left\{ \varphi\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i\right) : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \right\} = \{\varphi(x) : x \in U\} = \operatorname{Im}(\varphi), \end{aligned}$$

так как U — множество всевозможных линейных комбинаций векторов своего базиса. □

- Непосредственно из Теорем 2 и 3 можно сделать следующее заключение.

Следствие 1

Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над полем K , в которых фиксированы базисы, $\dim(U) = m$, а $\varphi : U \rightarrow V$ — линейное отображение с матрицей A . Тогда $\dim(\ker(\varphi)) = m - \operatorname{rk}(A)$.

- Покажем, как применять соответствие матриц и линейных отображений для доказательства утверждения “чисто про матрицы”.

Определение

Пусть $\varphi : U \rightarrow V$ — линейное отображение, а W — линейное подпространство U . Тогда $\varphi|_W : W \rightarrow V$ — **сужение** φ на подпространство W (то же самое отображение, применяемое только для элементов W).

- Очевидно, $\varphi|_W$ — линейное отображение и $\operatorname{Im}(\varphi|_W) \subset \operatorname{Im}(\varphi)$.

Теорема 4

Пусть $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,\ell}(K)$. Тогда
 $\text{rk}(AB) \leq \min(\text{rk}(A), \text{rk}(B))$.

Доказательство. • Рассмотрим линейные отображения
 $\varphi : K^n \rightarrow K^m$, заданное формулой $\varphi(x) = Ax$ и линейное
отображения $\psi : K^\ell \rightarrow K^n$, заданное формулой
 $\psi(y) = By$.

- Как мы знаем, эти отображения имеют в стандартных базисах пространств матрицы A и B соответственно.
- По Теореме 1 композиция $\varphi \cdot \psi : K^\ell \rightarrow K^m$ — линейное отображение с матрицей AB .

- По Теореме 3 мы имеем

$$\text{rk}(B) = \dim(\text{Im}(\psi)), \quad \text{rk}(A) = \dim(\text{Im}(\varphi)) \quad \text{и}$$

$$\text{rk}(AB) = \dim(\text{Im}(\varphi \cdot \psi)).$$

- Нам достаточно доказать два неравенства:
 $\text{rk}(AB) \leq \text{rk}(A)$ и $\text{rk}(AB) \leq \text{rk}(B)$.

Утверждение 1

$$\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk}(A).$$

Доказательство. • Отметим, что $\varphi \cdot \psi = \varphi|_{\operatorname{Im}(\psi)}$.

• Поэтому, $\operatorname{Im}(\varphi \cdot \psi) \subset \operatorname{Im}(\varphi)$, а значит, и
 $\dim(\operatorname{Im}(\varphi \cdot \psi)) \leq \dim(\operatorname{Im}(\varphi))$. □

Утверждение 2

$$\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk}(B).$$

Доказательство. • Так как $\varphi \cdot \psi = \varphi|_{\operatorname{Im}(\psi)} : \operatorname{Im}(\psi) \rightarrow K^m$,
мы по Теореме 2 имеем

$$\dim(\operatorname{Im}(\varphi \cdot \psi)) + \dim(\ker(\varphi \cdot \psi)) = \dim(\operatorname{Im}(\psi)), \quad \text{откуда}$$

$$\operatorname{rk}(AB) = \dim(\operatorname{Im}(\varphi \cdot \psi)) \leq \dim(\operatorname{Im}(\psi)) = \operatorname{rk}(B). \quad \square$$

• Теорема 4 доказана. □

Кольцо линейных операторов $\text{End}(V)$, связь с кольцом матриц

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем K . Тогда $\text{End}(V)$ — множество всех линейных отображений из V в себя, которые мы будем называть *линейными операторами* на V .

- В $\text{End}(V)$ мы определим сложение (поэлементное: $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$) и умножение — композицию.
- Пусть $\dim(V) = n$. Зафиксируем базис V , каждому линейному оператору $\varphi \in \text{End}(V)$, как мы знаем, соответствует матрица $A_\varphi \in M_n(K)$ в этом базисе.
- Далее мы не будем говорить про базис, все матрицы в этом разделе именно в нем.

- Опишем несколько свойств биекции оператор — матрица. Первые два свойства очевидны.

Свойство 1

Пусть $\varphi \in \text{End}(V)$ и $k \in K$. Тогда $k\varphi \in \text{End}(V)$ (это отображение, заданное формулой $(k\varphi)(x) := k\varphi(x)$) и $A_{k\varphi} = k \cdot A_\varphi$ (все элементы матрицы A_φ умножаются на k).

Свойство 2

Пусть $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$. Тогда $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.

- Третье свойство следует из Теоремы 1 (о матрице композиции линейных отображений).

Свойство 3

Пусть $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$. Тогда $A_{\varphi \cdot \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

Теорема 5

Пусть V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$.
Тогда $\text{End}(V)$ — кольцо с единицей, причем $\text{End}(V) \simeq M_n(K)$.

Доказательство. • Мы знаем, что отображение $f : \text{End}(V) \rightarrow M_n(k)$, заданное формулой $f(\varphi) := A_\varphi$, является биекцией и согласовано с операциями $+$ и $\cdot$ в кольцах.

- Очевидно, f^{-1} также согласовано с операциями в кольцах.
- Следовательно, все нужные нам свойства сложения (коммутативность, ассоциативность, 0 и обратный элемент) в $\text{End}(V)$ следуют из аналогичных свойств в $M_n(k)$.
- Так, 0 в $\text{End}(V)$ — это отображение с нулевой матрицей, которое отображает все элементы V в 0, а $-\varphi$ задается в каждой точке формулой $(-\varphi)(x) := -(\varphi(x))$.
- Аналогично, дистрибутивность и все нужные нам свойства умножения в $\text{End}(V)$ следуют из аналогичных свойств в $M_n(K)$.
- Отметим, что единицей в $\text{End}(V)$ будет, как и положено, тождественное отображение id с матрицей $A_{\text{id}} = E_n$.
- Теперь понятно, что f — изоморфизм колец $\text{End}(V)$ и $M_n(k)$.

- В этом разделе пусть V — конечномерное линейное пространство над полем K , в котором зафиксирован базис.
- Таким образом, каждому линейному оператору $\varphi \in \text{End}(V)$ соответствует матрица $A_\varphi \in M_n(K)$ и это соответствие — биекция.

Определение

Линейный оператор $\varphi \in \text{End}(V)$ — **обратимый**, если существует φ^{-1} (то есть, если φ — биекция).

Лемма 2

Пусть $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ таковы, что $A_\psi = (A_\varphi)^{-1}$. Тогда φ — обратимый и $\psi = (\varphi)^{-1}$.

Доказательство. • По Теореме 1 оператор $\varphi \cdot \psi \in \text{End}(V)$ имеет матрицу $A_{\varphi \cdot \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi = E_n$.

- Следовательно, $\varphi \cdot \psi = \text{id}$. Аналогично, $\psi \cdot \varphi = \text{id}$.
- Значит, $\psi = (\varphi)^{-1}$.



Теорема 6

Если $\varphi \in \text{End}(V)$ — обратимый, то $\varphi^{-1} \in \text{End}(V)$ и $A_{\varphi^{-1}} = (A_\varphi)^{-1}$.

Доказательство. • Для доказательства линейности φ^{-1} достаточно проверить, что для любых $a, b \in K$ и $x, y \in V$

$$\varphi^{-1}(ax + by) = a\varphi^{-1}(x) + b\varphi^{-1}(y) \quad (*)$$

• Так как φ — биекция, для этого достаточно доказать, что, применив к левой и правой частям (*) оператор φ , мы получим одно и то же:

$$\varphi(\varphi^{-1}(ax + by)) = ax + by \quad \text{и}$$

$$\varphi(a\varphi^{-1}(x) + b\varphi^{-1}(y)) = a\varphi(\varphi^{-1}(x)) + b\varphi(\varphi^{-1}(y)) = ax + by.$$

• Остается заметить, что $A_\varphi \cdot A_{\varphi^{-1}} = A_{\varphi \cdot \varphi^{-1}} = A_{\text{id}} = E_n$ и, аналогично, $A_{\varphi^{-1}} \cdot A_\varphi = E_n$, откуда следует, что $A_{\varphi^{-1}} = (A_\varphi)^{-1}$. □

Координаты вектора в разных базисах

- Пусть V — линейное пространство над полем K , а $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ — два его базиса.
- Каждый вектор $x \in V$ единственным образом представляется в виде столбцов координат по каждому из базисов — скажем, $(x_1, \dots, x_n)^T$ и $(x'_1, \dots, x'_n)^T$.
- Мы покажем, как из столбца координат вектора по одному базису получить столбец координат по другому базису.
- Разложим базисные векторы второго базиса по первому:

$$e'_1 = c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + \dots + c_{n,1}e_n, \dots,$$

$$e'_i = c_{1,i}e_1 + c_{2,i}e_2 + \dots + c_{n,i}e_n, \dots,$$

$$e'_n = c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + \dots + c_{n,n}e_n.$$

- Напишем цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x &= x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n = \\ x'_1 (c_{1,1} e_1 + c_{2,1} e_2 + \dots + c_{n,1} e_n) &+ \dots + x'_n (c_{1,n} e_1 + c_{2,n} e_2 + \dots + c_{n,n} e_n) = \\ (x'_1 c_{1,1} + \dots + x'_n c_{1,n}) e_1 &+ \dots + (x'_1 c_{n,1} + \dots + x'_n c_{n,n}) e_n, \end{aligned}$$

откуда, ввиду единственности разложения по базису, делаем вывод $x_i = (c_{1,1}x'_1 + \dots + c_{i,n}x'_n)$.

• Вспомнив про правила умножения матриц, получаем формулу

$$(x_1, \dots, x_n)^T = C(x'_1, \dots, x'_n)^T, \quad \text{где} \quad C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}.$$

• Матрица C называется **матрицей перехода** от базиса $e'_1, \dots, e'_n$ к базису $e_1, \dots, e_n$. Докажем ряд свойств матриц перехода.

Свойство 1

Матрица перехода невырождена. Если C — матрица перехода от базиса $e'_1, \dots, e'_n$ к базису $e_1, \dots, e_n$, то матрица перехода от базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $e'_1, \dots, e'_n$ — это C^{-1} .

Доказательство. • Обозначим матрицу перехода от базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $e'_1, \dots, e'_n$ через D .

• Тогда для любого $x \in V$ мы можем записать его координаты в этих базисах, как выше и заметить, что

$$(x_1, \dots, x_n)^T = C(x'_1, \dots, x'_n)^T \quad \text{и} \quad (x'_1, \dots, x'_n)^T = D(x_1, \dots, x_n)^T,$$

откуда

$$(x_1, \dots, x_n)^T = C(x'_1, \dots, x'_n)^T = CD(x_1, \dots, x_n)^T \quad \text{и}$$

$$(x'_1, \dots, x'_n)^T = D(x_1, \dots, x_n)^T = DC(x'_1, \dots, x'_n)^T.$$

• Так как это верно для любых столбцов координат, $DC = CD = E^n$ (умножение на CD или DC — это id), откуда следует, что $D = C^{-1}$.

Свойство 2

Пусть V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$. Тогда, для любого фиксированного базиса $e_1, \dots, e_n$, любая невырожденная матрица $C \in M_n(K)$ является матрицей перехода от какого-то базиса к $e_1, \dots, e_n$.

Доказательство. • Рассмотрим базис $e'_1, \dots, e'_n$, координаты векторов которого в исходном базисе $e_1, \dots, e_n$ — столбцы матрицы C (то есть, $e'_1 = C^{(1)}, \dots, e'_n = C^{(n)}$).

• Эти вектора линейно независимы: так как C — невырожденная матрица, то

$$\dim(V) = n = \operatorname{rk}(C) = \dim(\operatorname{Lin}(C^{(1)}, \dots, C^{(n)})).$$

• Любые n ЛНЗ векторов в n -мерном пространстве V образуют его базис, в частности, $e'_1, \dots, e'_n$ — базис V .

• По построению матрицы перехода понятно, что матрица перехода от базиса $e'_1, \dots, e'_n$ к базису $e_1, \dots, e_n$ будет в точности C .

Матрицы оператора в разных базисах

- Пусть $\varphi \in \text{End}(V)$, где V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$.
 - Мы знаем, что при каждом фиксированном базисе оператору φ соответствует его матрица. Как связаны матрицы одного оператора в разных базисах?
 - Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ — два базиса V , а векторам соответствуют столбцы координат (без штрихов — по первому базису, со штрихами — по второму).
 - Пусть A и A' — матрицы φ в этих базисах. Тогда равенство $y = \varphi(x)$ можно переписать в двух видах:

$$(y_1, \dots, y_n)^T = A \cdot (x_1, \dots, x_n)^T \quad \text{и}$$

$$(y'_1, \dots, y'_n)^T = A' \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T.$$
 - Пусть C — матрица перехода от $e'_1, \dots, e'_n$ к $e_1, \dots, e_n$.
 - Тогда C^{-1} — матрица перехода от $e_1, \dots, e_n$ к $e'_1, \dots, e'_n$.
- Поэтому
- $$(y'_1, \dots, y'_n)^T = A' \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T = A' C^{-1} (x_1, \dots, x_n)^T \quad \text{и}$$
- $$(y_1, \dots, y_n)^T = C (y'_1, \dots, y'_n)^T = C A' \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T = C A' C^{-1} (x_1, \dots, x_n)^T.$$
- Ввиду единственности матрицы отображения φ в базисе $e_1, \dots, e_n$ следует, что $A = C A' C^{-1}$ и $A' = C^{-1} A C$.

Определение

Матрицы $A, A' \in M_n(K)$ называются *подобными*, если существует такая невырожденная матрица $C \in M_n(K)$, что $A = CA'C^{-1}$.

- Несложно понять, что подобие матриц — отношение эквивалентности. Таким образом, все матрицы из $M_n(K)$ разбиваются на классы эквивалентности, состоящие из попарно подобных матриц.

Теорема 7

Пусть $\varphi \in \text{End}(V)$, где V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$. Тогда матрицы φ во всех возможных базисах образуют класс попарно подобных матриц из $M_n(K)$.

Доказательство. • Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ и матрицу A отображения φ в этом базисе.

- Уже доказано, что матрицы φ в других базисах подобны A .
- Рассмотрим произвольную матрицу, подобную A — скажем, $C^{-1}AC$, где $C \in M_n(K)$ — невырожденная матрица.
- Тогда C — это матрица перехода от нашего фиксированного базиса к другому, и в этом базисе φ имеет матрицу как раз $C^{-1}AC$.

- Пусть V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$, базис считаем фиксированным.
- Пусть $\varphi \in \text{End}(V)$, а $A \in M_n(K)$ — матрица φ .
- Рассмотрим многочлен $f(t) \in K[t]$, пусть $f(t) = c_m t^m + \dots + c_0$.
- Мы научимся подставлять в многочлен f матрицу A и линейный оператор φ :
$$f(A) := c_m A^m + \dots + c_1 A + c_0 E_n,$$
$$f(\varphi) := c_m \varphi^m + \dots + c_1 \varphi + c_0 \text{id}.$$
- $f(A)$ — матрица из $M_n(K)$. Умножение матрицы на число (выражение типа $c_1 A$) — это умножение всех ее коэффициентов на это число.
- $f(\varphi)$ — это линейный оператор из $\text{End}(V)$. Результат умножения оператора на число (выражение типа $c_1 \varphi$) — это оператор, значения которого во всех точках умножены на это число.

Лемма 3

Оператор $f(\varphi)$ в нашем фиксированном базисе имеет матрицу $f(A)$.

Доказательство. • При сложении линейных отображений матрицы складываются, при композиции — перемножаются.

• При умножении линейного отображения на число $c \in K$ все его значения умножаются на это число, а значит, и значения на базисных векторах, но тогда и матрица отображения умножится на c . □

• Умножение в $M_n(K)$ и в $\text{End}(V)$ не коммутативно. Но многочлены от одного и того же оператора (матрицы) — коммутируют.

Лемма 4

Пусть $f, g \in K[t]$.

1) Для любого $\varphi \in \text{End}(V)$ выполнено
 $f(\varphi) \cdot g(\varphi) = g(\varphi) \cdot f(\varphi)$.

2) Для любой $A \in M_n(K)$ выполнено $f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A)$.

Доказательство. • Ввиду Леммы 3 достаточно доказать пункт 2.

- Пусть $f(t) = c_m t^m + \dots + c_0$ и $g(t) = d_k t^k + \dots + d_0$.
- Так как

$$(c_i A^i) \cdot (d_j A^j) = c_i d_j A^{i+j} = d_j c_i A^{i+j} = (d_j A^j) \cdot (c_i A^i),$$

можно написать цепочку преобразований (везде считаем, что $A^0 = E_n$):

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \left(\sum_{i=0}^m c_i A^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^k d_j A^j \right) = \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^k (c_i A^i)(d_j A^j) = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^m (d_j A^j)(c_i A^i) = \\ &= \left(\sum_{j=0}^k d_j A^j \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^m c_i A^i \right) = g(A)f(A). \quad \square \end{aligned}$$

- Пусть V — линейное пространство над полем K , а $\varphi \in \text{End}(V)$.

Определение

Подпространство $W < V$ называется φ -инвариантным, если

$$\varphi(W) = \{\varphi(x) : x \in W\} \subset W.$$

- Вскоре мы увидим много примеров инвариантных подпространств и поймем, насколько это важное понятие. Начнем с простого свойства.

Свойство

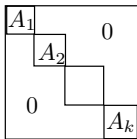
Если W — φ -инвариантное подпространство, то $\varphi|_W \in \text{End}(W)$.

Доказательство. По определению φ -инвариантного подпространства, $\varphi|_W : W \rightarrow W$. Условие линейности наследуется от φ .



Определение

Пусть K – поле $A_1, \dots, A_m$ – квадратные матрицы, $A_i \in M_{n_i}(K)$. Обозначим через $\text{diag}(A_1, \dots, A_m)$ квадратную матрицу из $M_{n_1+\dots+n_m}(K)$, в которой по главной диагонали последовательно стоят квадратные блоки $A_1, \dots, A_m$, а все остальные элементы равны 0.



Лемма 5

Пусть V – линейное пространство над полем K , $\varphi \in \text{End}(V)$, а $V_1, \dots, V_m$ – φ -инвариантные подпространства V , причем $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$.

Зафиксируем в каждом подпространстве V_i базис $e_1^i, \dots, e_{k_i}^i$, пусть A_i – матрица отображения $\varphi_i = \varphi|_{V_i}$ в этом базисе.

Тогда в базисе $e_1^1, \dots, e_{k_1}^1, \dots, e_1^m, \dots, e_{k_m}^m$ отображение φ имеет матрицу $\text{diag}(A_1, \dots, A_m)$.

Доказательство. • Как строится матрица A отображения φ в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$? Ее j столбцом будет $A^{(j)} = \varphi(e_j)$.

• Пусть j^i — номер базисного вектора e_j^i , входящего в базис φ -инвариантного подпространства V_i . Подставим его и получим:

$$A^{(j^i)} = \varphi(e_j^i) \in V_i.$$

• Элемент из V_i раскладывается по его базису $e_1^i, \dots, e_{k_i}^i$, а значит, в разложении по объединенному базису пространства V , мы получим коэффициенты 0 при всех векторах, кроме этих (так как разложение по базису единственно!).

• Следовательно,
$$A^{(j^i)} = \varphi(e_j^i) = \sum_{s=1}^{k_i} a_{s^i, j^i} e_{s^i} =$$

$$(0, \dots, 0, a_{1^i, j^i}, \dots, a_{k_i^i, j^i}, 0, \dots, 0)^T.$$

• Так как $\varphi(e_j^i) = \varphi_i(e_j^i)$, на места столбцов, соответствующих векторам из базиса $e_1^i, \dots, e_{k_i}^i$, будут вписаны соответствующие столбцы матрицы A_i (эти столбцы как раз и образованы коэффициентами в разложении векторов $\varphi(e_j^i)$ по указанному базису пространства V_i), а все остальные коэффициенты матрицы A в указанных столбцах — нули. $\square$

Характеристический многочлен оператора

- V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$, а $\varphi \in \text{End}(V)$.

Определение

Пусть A — любая матрица оператора φ .

Характеристический многочлен оператора φ — это $\chi_\varphi(t) := \det(A - tE_n)$ (переменная из поля K , $\chi_\varphi \in K[t]$).

Свойство 1

Определение характеристического многочлена оператора корректно, то есть, не зависит от выбора матрицы оператора.

Доказательство. • Пусть A' — другая матрица оператора φ .

- Тогда $A' = C^{-1}AC$ для некоторой невырожденной матрицы $C \in M_n(K)$, следовательно,

$$\begin{aligned} \det(A' - tE_n) &= \det(C^{-1}AC - tE_n) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}(tE_n)C) = \\ &= \det(C^{-1}(A - tE_n)C) = \det(C^{-1}) \det(A - tE_n) \det(C) = \det(A - tE_n). \end{aligned}$$



Свойство 2

$\deg(\chi_\varphi) = n$, старший коэффициент равен $(-1)^n$, а свободный член равен $\det(A)$.

Доказательство. • По диагонали матрицы $A - tE_n$ стоят коэффициенты $a_{i,i} - t$, остальные коэффициенты t не содержат.

• Следовательно, t может быть максимум в степени n , и в такой степени получается ровно в одном случае — в произведении диагональных элементов, с коэффициентом $(-1)^n$.

• Для вычисления свободного члена подставим $t = 0$ и получим $\det(A)$. □

• Итак, $\chi_\varphi(t) = (-1)^n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + \det(A)$.

• Коэффициент c_{n-1} также имеет смысл.

Определение

След матрицы $A \in M_n(K)$ — это $\text{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n}$ (сумма элементов на главной диагонали).

Теорема 8

Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$, $\varphi \in \text{End}(V)$. Тогда $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.

Неверное доказательство. • Пусть $\dim(V) = n$, а $A \in M_n(K)$ — матрица отображения φ .

- Тогда $\chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n)$.
- Имеем $\chi_\varphi(A) = \det(A - AE_n) = \det(0_n) = 0$.
- Таким образом, оператор $\chi_\varphi(\varphi)$ имеет нулевую матрицу, а значит, $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.
- Найдите ошибку и не повторяйте ее на экзамене!



Доказательство Теоремы 8. • Обозначим через $B(t)$ взаимную матрицу к $A - tE_n$ (здесь t — переменная, принимающая значения из поля K).

• Тогда $b(t)_{i,j} = (A - tE_n)_{j,i}$ — минор порядка $n - 1$ матрицы $A - tE_n$, который, очевидно, является многочленом от t степени не более чем $n - 1$ (в подматрице $A - tE_n$, полученной вычеркиванием i строки и j столбца остается не более чем $n - 1$ элемент вида $a_{l,l} - t$, остальные не содержат переменную t).

• Поэтому существуют такие матрицы

$$B_0, \dots, B_{n-1} \in M_n(K), \text{ что } B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + \dots + B_1t + B_0.$$

• Пусть $\chi_\varphi(t) = c_nt^n + \dots + c_1t + c_0$ (нам известно, что $\deg(\chi_\varphi) = \dim(V) = n$). Тогда

$$(c_nt^n + \dots + c_1t + c_0)E_n = \chi_\varphi(t) \cdot E_n = \det(A - tE_n) \cdot E_n = B(t) \cdot (A - tE_n) = (B_{n-1}t^{n-1} + \dots + B_1t + B_0) \cdot (A - tE_n)$$

(третий переход следует из Леммы 7.2).

- В левой и правой частях равенства

$$(c_n t^n + \dots + c_1 t + c_0) E_n =$$

$(B_{n-1} t^{n-1} + \dots + B_1(t) + B_0) \cdot (A - t E_n)$ коэффициенты
при каждой степени t должны совпадать:

$$c_n E_n = -B_{n-1} \Rightarrow c_n A^n = -B_{n-1} A^n,$$

$$c_{n-1} E_n = B_{n-1} A - B_{n-2} \Rightarrow c_{n-1} A^{n-1} = B_{n-1} A^n - B_{n-2} A^{n-1},$$

...

$$c_1 E_n = B_1 A - B_0 \Rightarrow c_1 A^1 = B_1 A^2 - B_0 A,$$

$$c_0 E_n = B_0 A.$$

- Сложив синие равенства, получим:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(A) &= c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 E_n = \\ &= -B_{n-1} A^n + (B_{n-1} A^n - B_{n-2} A^{n-1}) + \dots + (B_1 A^2 - B_0 A) + B_0 A = 0. \end{aligned}$$

- Таким образом, оператор $\chi_\varphi(\varphi)$ имеет нулевую матрицу, а значит, $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.



Минимальный многочлен оператора.

- Пусть V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$, $\psi \in \text{End}(V)$.
- Пусть $I(\psi)$ — множество всех таких многочленов $f \in K[t]$, что $f(\psi) = 0$.

Свойство 1

$I(\psi)$ — идеал в $K[t]$.

Доказательство. • Достаточно проверить замкнутость $I(\psi)$ по сложению и умножению на многочлены из $K[t]$.

- Пусть $f, g \in I(\psi)$. Тогда $(f + g)(\psi) = f(\psi) + g(\psi) = 0 + 0 = 0$, а значит, $f + g \in I(\psi)$.
- Пусть $f \in I(\psi)$, $h \in K[t]$. Тогда $(fh)(\psi) = f(\psi) \cdot h(\psi) = 0 \cdot h(\psi) = 0$, а значит, $fh \in I(\psi)$. □
- Как мы знаем, любой идеал в $K[t]$ — главный. Рассмотрим любой многочлен f такой, что $I(\psi) = f \cdot K[t]$ (то есть, порождающий $I(\psi)$).
- Тогда для любого другого многочлена $g \in K[t]$, порождающего $I(\psi)$, очевидно, выполнено $f \div g$ и $g \div f$, то есть, эти два многочлена ассоциированы (отличаются умножением на константу).

- Следовательно, многочлены, порождающие $I(\psi)$ — это в точности многочлены вида cf . Ровно один из них имеет единичный старший коэффициент, мы обозначим его через Irr_ψ и будем называть **минимальным многочленом** оператора ψ .

Свойство 2

$$\chi_\psi : \text{Irr}_\psi.$$

Доказательство. • По теореме Гамильтона-Кэли мы знаем, что $\chi_\psi(\psi) = 0$, то есть, $\chi_\psi \in I(\psi)$.

- Все многочлены из идеала $I(\psi)$ делятся на Irr_ψ . □

Собственные числа, векторы и подпространства

• Пусть V — линейное пространство над полем K ,
 $\dim(V) = n$, $\psi \in \text{End}(V)$.

Определение

1) Число $\lambda \in K$ называется **собственным числом** оператора ψ , если существует такой ненулевой вектор $x \in V$, что $\psi(x) = \lambda \cdot x$. В этом случае говорят, что x — **собственный вектор** числа λ .

2) Пусть λ — собственное число оператора ψ . Множество V_λ , состоящее из всех собственных векторов числа λ и вектора 0 , называется **собственным подпространством** числа λ .

3) Множество всех собственных чисел оператора ψ называется его **спектром** и обозначается через $\text{Spec}(\psi)$.

Лемма 6

V_λ — линейное подпространство V .

Доказательство. • Пусть $x, y \in V_\lambda$, $\alpha, \beta \in K$.

• Нам достаточно проверить, что $\alpha x + \beta y \in V_\lambda$. Сделаем это:

$$\psi(\alpha x + \beta y) = \alpha \psi(x) + \beta \psi(y) = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y).$$



Теорема 9

$\text{Spec}(\psi)$ состоит в точности из корней характеристического многочлена $\chi_\psi(t)$.

Доказательство. • Зафиксируем базис V , пусть A — матрица ψ в этом базисе.

- Пусть $\lambda \in \text{Spec}(\psi)$, $x \in V_\lambda$, $x \neq 0$. Тогда $\psi(x) = \lambda x = \lambda \cdot \text{id}(x)$.
- Следовательно, $(\psi - \lambda \text{id})(x) = 0$, то есть $x \in \ker(\psi - \lambda \text{id})$.
- Значит, $\ker(\psi - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$ и $\dim \ker(\psi - \lambda \text{id}) \neq 0$.
- Оператор $\psi - \lambda \text{id}$ имеет матрицу $A - \lambda E_n$ и по Следствию 1 $\text{rk}(A - \lambda E_n) = n - \dim(\ker(\psi - \lambda \text{id})) < n$.
- Тогда по Следствию 7.2 имеем $\chi_\psi(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0$.
- Наоборот, пусть $0 = \chi_\psi(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$.
- Тогда по Следствию 7.2 $n > \text{rk}(A - \lambda E_n) = n - \dim(\ker(\psi - \lambda \text{id})) \Rightarrow \dim(\ker(\psi - \lambda \text{id})) > 0$.
- Следовательно, существует ненулевой вектор $x \in \ker(\psi - \lambda \text{id})$.
- Это означает, что $\psi(x) = \lambda x$, то есть $\lambda \in \text{Spec}(\psi)$.



Теорема 10

Пусть V — линейное пространство над полем K , $\psi \in \text{End}(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \text{Spec}(\psi)$ — различные собственные числа, а x_i — собственный вектор λ_i . Тогда $x_1, \dots, x_k$ линейно независимы.

Доказательство. • Предположим противное и найдем из этих векторов нетривиальную нулевую линейную комбинацию с минимальным количеством ненулевых коэффициентов:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s = 0. \quad (*)$$

• Подействуем на левую и правую часть $(*)$ оператором ψ :

$$0 = \psi(0) = \psi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s) = \alpha_1 \psi(x_1) + \dots + \alpha_s \psi(x_s) = \lambda_1 \alpha_1 x_1 + \dots + \lambda_s \alpha_s x_s. \quad (**)$$

• Вычтем из $(**)$ умноженное на λ_s равенство $(*)$ и получим:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s)x_1 + \dots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s)x_{s-1} = 0.$$

• Так как собственные числа различны, все коэффициенты в этой линейной комбинации отличны от 0, но тогда ее существование противоречит выбору $(*)$. □

Диагонализируемые операторы и матрицы

Определение

Пусть V — линейное пространство над полем K , $\psi \in \text{End}(V)$.

- Оператор ψ — *диагонализируемый*, если в некотором базисе имеет *диагональную* матрицу (то есть матрицу, в которой все элементы не на главной диагонали равны 0).
- Матрица $A \in M_n(K)$ называется *диагонализируемой*, если она имеет подобную диагональную матрицу.
- Матрица $A \in M_n(K)$ является диагонализируемой, если и только если оператор умножения на A в каком-либо базисе является диагонализируемым.

Теорема 11

Пусть V — линейное пространство над полем K , $\psi \in \text{End}(V)$, $\text{Спес}(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Тогда следующие три утверждения равносильны.

1° Оператор ψ — диагонализируемый.

$$2^\circ V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}.$$

3° V имеет базис, состоящий из собственных векторов ψ .

Доказательство. $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. • Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V , причем e_i — собственный вектор числа λ_i (возможно, не все эти собственные числа различны).

• Тогда $\psi(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$, поэтому, матрица ψ в этом базисе имеет вид $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$. • Пусть матрица ψ в базисе $e_1, \dots, e_n$ — это $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

• Тогда $\psi(e_i) = \lambda_i e_i$, причем, очевидно, $e_i \neq 0$.

Следовательно, λ_i — собственное число, а e_i — его собственный вектор.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. • Пусть $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$.

• Выделим базис в каждом из пространств $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$, тогда каждый из этих базисов состоит из собственных векторов ψ , а объединение всех этих k базисов по свойствам прямой суммы дает базис V .

$3^\circ \Rightarrow 2^\circ$. • Мы знаем, что $W = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$ — линейное подпространство V (эта сумма прямая по Следствию 2).

• Пусть $m_i = \dim(V_{\lambda_i})$. Тогда

$$\dim(V) \geq \dim(W) = \sum_{i=1}^k \dim(V_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^k m_i.$$

• С другой стороны, пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V , состоящий из собственных векторов.

• Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ в V_{λ_i} лежит не более чем m_i векторов из базиса (так как они линейно независимы).

• Значит, $\dim(V) \leq \sum_{i=1}^k m_i$, откуда следует, что

$\dim(V) = \dim(W)$, а значит, $V = W$.



- Пусть V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$, $\varphi \in \text{End}(V)$.
- Если прямая сумма собственных пространств оператора φ равна V , в некотором базисе этот оператор имеет диагональную матрицу, с которой очень удобно иметь дело.
- А что же делать, когда эта сумма меньше V ? Нам придется определить понятие, расширяющее собственное пространство.

Определение

Пусть $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$. Тогда

$$V(\lambda) = \{x \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (\varphi - \lambda \text{id})^k(x) = 0\} \quad -$$

корневое пространство собственного числа λ оператора φ .

- В этом определении много сложного и неудобного — например, есть квантор существования, от которого мы вскоре избавимся.

Свойство 0

$V(\lambda)$ — подпространство V .

Доказательство. • Пусть $x, y \in V(\lambda)$, $\alpha, \beta \in K$.

- Нам надо доказать, что $\alpha x + \beta y \in V(\lambda)$.
- По определению, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $(\varphi - \lambda \text{id})^k(x) = (\varphi - \lambda \text{id})^k(y) = 0$,

• Тогда и

$$(\varphi - \lambda \text{id})^k(\alpha x + \beta y) = \alpha(\varphi - \lambda \text{id})^k(x) + \beta(\varphi - \lambda \text{id})^k(y) = 0,$$

откуда следует, что $\alpha x + \beta y \in V(\lambda)$. □

Свойство 1

Собственное пространство V_λ — подпространство корневого пространства $V(\lambda)$.

Доказательство. • Достаточно доказать, что $V_\lambda \subset V(\lambda)$.

- Пусть $x \in V_\lambda$. Тогда $\varphi(x) = \lambda x$, откуда следует, что $(\varphi - \lambda \text{id})(x) = 0$, то есть, подходит $k = 1$. □

Лемма 7

Пусть $\psi \in \text{End}(V)$, $x \in V$. Пусть $k \in \mathbb{N}$ — минимальное такое число, что $\psi^k(x) = 0$. Тогда $x, \psi(x), \dots, \psi^{k-1}(x)$ — ЛНЗ векторы. В частности, $k \leq n$.

Доказательство. • Пусть $x, \psi(x), \dots, \psi^{k-1}(x)$ ЛЗ, то есть,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \psi^i(x) = 0, \quad \text{не все } \alpha_i = 0 \quad (*)$$

- Пусть ℓ — минимальный такой индекс, что $\alpha_\ell \neq 0$. Тогда сумму в $(*)$ можно начинать с индекса ℓ .
- Применим к обеим частям равенства $(*)$ оператор $\psi^{k-1-\ell}$ и получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \psi^{k-1-\ell}(0) = \psi^{k-1-\ell} \left(\sum_{i=\ell}^{k-1} \alpha_i \psi^i(x) \right) = \\ &= \alpha_\ell \psi^{k-1}(x) + \sum_{i=\ell+1}^{k-1} \alpha_i \psi^{k-1-\ell+i}(x) = \alpha_\ell \psi^{k-1}(x). \end{aligned}$$

- Последний переход верен, так как $k-1-\ell+i \geq k$ при $i \geq \ell+1$, а значит, $\psi^{k-1-\ell+i}(x) = 0$.
- Полученное равенство не может быть верным, так как $\alpha_\ell \neq 0$ и $\psi^{k-1}(x) \neq 0$.
- Поскольку в n -мерном линейном пространстве V нельзя выбрать более n ЛНЗ векторов, $k \leq n$.



- Теперь мы готовы избавиться от квантора существования в определении корневого пространства.

Свойство 2

$$V(\lambda) = \{x \in V : (\varphi - \lambda \text{id})^n(x) = 0\}.$$

Доказательство. • Из определения следует, что

$$V(\lambda) \supset \{x \in V : (\varphi - \lambda \text{id})^n(x) = 0\}.$$

- Наоборот, пусть $x \in V(\lambda)$.
- Рассмотрим минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что $(\varphi - \lambda \text{id})^k(x) = 0$ (такое k существует по определению).
- По Лемме 7 мы имеем $k \leq n$.
- Значит, и $(\varphi - \lambda \text{id})^n(x) = 0$. □

Лемма 8

Пусть $f, g \in K[t]$ — взаимно простые многочлены. Пусть V — линейное пространство над полем K , а $x \in V$ и $\psi \in \text{End}(V)$ таковы, что $(f(\psi))(x) = (g(\psi))(x) = 0$. Тогда $x = 0$.

Доказательство. • Вспомним, что НОД двух многочленов представляется в виде их линейной комбинации.

- Поэтому, существуют такие многочлены $p, q \in K[t]$, что $fp + qg = 1$.
- Подставив в это равенство оператор ψ и получим $(pf)(\psi) + (qg)(\psi) = \text{id}$.
- Применим обе части последнего, операторного равенства к вектору x :

$$\begin{aligned} x = \text{id}(x) &= ((pf)(\psi))(x) + ((qg)(\psi))(x) = \\ &= (p(\psi))((f(\psi))(x)) + (q(\psi))((g(\psi))(x)) = \\ &= (p(\psi))(0) + (q(\psi))(0) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 12

Пусть V — линейное пространство над полем K ,
 $\varphi \in \text{End}(V)$, $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Тогда $\sum_{i=1}^k V(\lambda_i)$ —
прямая сумма.

Доказательство. • Пусть $W_i = \sum_{j \neq i} V(\lambda_j)$.

- По критерию прямой суммы нам достаточно доказать, что $W_i \cap V(\lambda_i) = \{0\}$.
- Пусть $x \in W_i \cap V(\lambda_i)$. Тогда $(\varphi - \lambda_i \text{id})^n(x) = 0$, так как $x \in V(\lambda_i)$.
- С другой стороны, $x = \sum_{j \neq i} x_j$, где $x_j \in V(\lambda_j)$.

Следовательно, $(\varphi - \lambda_j \text{id})^n(x_j) = 0$.

- Рассмотрим многочлен $f(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^n$. Тогда

$$\begin{aligned} (f(\varphi))(x) &= \sum_{j \neq i} (f(\varphi))(x_j) = \\ &= \sum_{j \neq i} \left(\prod_{s \notin \{i, j\}} (\varphi - \lambda_s \text{id})^n \right) \left((\varphi - \lambda_j \text{id})^n (x_j) \right) \\ &= \sum_{j \neq i} \left(\prod_{s \notin \{i, j\}} (\varphi - \lambda_s \text{id})^n \right) (0) = 0. \end{aligned}$$

- Мы использовали Лемму 4: операторные многочлены от одного и того же оператора коммутируют.
- Очевидно, $(t - \lambda_i)^n$ и $f(t)$ взаимно просты (мы знаем разложение f на линейные множители и среди них нет $t - \lambda_i$).
- Следовательно, по Лемме 8 мы имеем $x = 0$. □

Теорема 13

Пусть V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$,
 $\varphi \in \text{End}(V)$, $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ и

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

1) $V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i).$

2) Корневые пространства φ -инвариантны.

Доказательство. • Пусть $f_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{m_j}.$

• Понятно, что $(f_1, \dots, f_k) = 1$ (мы знаем разложение каждого из этих многочленов на линейные множители, и ни один из них не является общим для всех k многочленов, значит, эти многочлены взаимно просты в совокупности).

• Тогда по теореме о линейном представлении НОД существуют такие многочлены $h_1, \dots, h_k \in K[t]$, что $h_1 f_1 + \dots + h_k f_k = 1.$

• Подставив в это равенство оператор φ , мы получим

$$(h_1 f_1)(\varphi) + \dots + (h_k f_k)(\varphi) = \text{id}. \quad (1)$$

- Для линейного отображения $\psi \in \text{End}(V)$ и $X \subset V$ мы будем использовать обозначение $\psi(X) = \{\psi(x) : x \in X\}$.
- Пусть $W_i = ((h_i f_i)(\varphi))(V)$.
- Подставив в качестве аргумента в (1) пространство V , мы получим

$$V = \text{id}(V) = \left(\sum_{i=1}^k (h_i f_i)(\varphi) \right)(V) = \sum_{i=1}^k \left((h_i f_i)(\varphi) \right)(V) = \sum_{i=1}^k W_i. \quad (2)$$

- Докажем утверждение 1 теоремы.
- По Теореме 12 сумма корневых подпространств оператора φ — прямая. Значит $\bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i) < V$.
- С другой стороны, мы знаем, $V = \sum_{i=1}^k W_i$.
- Но $\sum_{i=1}^k W_i$ — подмножество $\bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$, так как $W_i < V(\lambda_i)$.
- Это возможно лишь при $V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$.
- Следовательно, $\dim(V) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)\right) = \sum_{i=1}^k \dim(V(\lambda_i))$.
- Вместе с этим, так как $\dim(W_i) \leq \dim(V(\lambda_i))$,

$$\dim(V) = \dim\left(\sum_{i=1}^k W_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \dim(W_i) \leq \sum_{i=1}^k \dim(V(\lambda_i)).$$
- Следовательно, для всех $i \in \{1, \dots, k\}$ мы имеем $\dim(V(\lambda_i)) = \dim(W_i)$, откуда ввиду $W_i \leq V(\lambda_i)$ следует, что $W_i = V(\lambda_i)$.

- Докажем утверждение 2 теоремы.
- Так как мы доказали, что $W_i = V(\lambda_i)$, нам достаточно доказать, что W_i — φ -инвариантно.
- Проверим это. Действительно, пусть $y \in W_i$, тогда $y = ((h_i f_i)(\varphi))(x)$, где $x \in V$.
- Следовательно,

$$\varphi(y) = \varphi\left(((h_i f_i)(\varphi))(x)\right) = ((h_i f_i)(\varphi))(\varphi(x)) \in W_i,$$

так как $\varphi(x) \in V$, а $W_i = ((h_i f_i)(\varphi))(V)$.



Теорема 14

Пусть V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$,
 $\varphi \in \text{End}(V)$, $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ и

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) Пусть $\varphi_i = \varphi|_{V(\lambda_i)}$. Тогда оператор $\varphi_i \in \text{End}(V(\lambda_i))$ имеет единственное собственное число — λ_i .
- 2) $\dim(V(\lambda_i)) = m_i$.

Доказательство. 1) • Подчеркнем, что формулировка пункта 1 корректна, так как $V(\lambda_i)$ — это φ -инвариантное пространство по Теореме 13.

- Предположим противное, пусть $\mu \in \text{Spec}(\varphi_i)$, $\mu \neq \lambda_i$, а x — собственный вектор μ .
- Тогда $(\varphi - \mu \text{id})(x) = 0$.
- С другой стороны, так как $x \in V(\lambda_i)$, мы имеем $(\varphi - \lambda_i \text{id})^n(x) = 0$.
- Очевидно, многочлены $t - \mu$ и $(t - \lambda_i)^n$ взаимно просты, откуда по Лемме 8 имеем $x = 0$, противоречие с определением собственного вектора.

2) • По Теореме 13 $V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$.

- В каждом пространстве $V(\lambda_i)$ зафиксируем свой базис, пусть A_i — матрица отображения φ_i в этом базисе.
- По Лемме 5 тогда в базисе V , полученном объединением зафиксированных выше базисов, отображение φ имеет матрицу $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$.
- Пусть $n_i = \dim(V(\lambda_i))$. Тогда

$$\begin{aligned} (-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i} &= \chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n) = \\ &= \det(\text{diag}(A_1, \dots, A_k) - t \cdot \text{diag}(E_{n_1}, \dots, E_{n_k})) = \\ &= \det(\text{diag}(A_1 - tE_{n_1}, \dots, A_k - tE_{n_k})) = \prod_{i=1}^k \det(A_i - tE_{n_i}) = \\ &= \prod_{i=1}^k \chi_{\varphi_i}(t). \quad (*) \end{aligned}$$

- По пункту 1, $\text{Spec}(\varphi_i) = \{\lambda_i\}$.
- Тогда по Теореме 9 многочлен $\chi_{\varphi_i}(t)$ имеет единственный корень λ_i .

- По формуле (*)

$$(-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^k \chi_{\varphi_i}(t).$$

- Так как для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ $\chi_{\varphi_i}(t)$ имеет единственный корень λ_i , остается единственная возможность:

$$\chi_{\varphi_i}(t) = (-1)^{m_i} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

- Подставим это в формулу (*):

$$(-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^k \chi_{\varphi_i}(t) = \prod_{i=1}^k (-1)^{n_i} (t - \lambda_i)^{n_i}.$$

- Следовательно, $\dim(V(\lambda_i)) = m_i$.



Определение

Пусть $U < V$.

- Вектора $e_1, \dots, e_s$ из V *линейно независимы над U* , если никакая их нетривиальная линейная комбинация не лежит в U .
- *Относительный базис* V над U — это $\dim(V) - \dim(U)$ линейно независимых над U векторов.

Свойство 1

$e_1, \dots, e_r \in V$ ЛНЗ над U , если и только если $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_r}$ ЛНЗ в факторпространстве V/U .

Доказательство. Очевидно ввиду того, что равенство нулю линейной комбинации $\overline{e_1}, \dots, \overline{e_r}$ в V/U равносильно принадлежности U аналогичной линейно комбинации векторов $e_1, \dots, e_r$ в V . □

Свойство 2

$e_1, \dots, e_r$ — *относительный базис V над U* , если и только если $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$ — *базис V/U* .

Доказательство. К Свойству 1 нужно лишь добавить, что по доказанному в главе Линейные пространства $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$. □

Свойство 3

Относительный базис V над U — максимальное множество векторов из V , ЛНЗ над U .

Если $e_1, \dots, e_s \in V$ линейно независимы над U , то эти вектора можно дополнить до относительного базиса V над U .

Доказательство. Воспользуемся Свойствами 1 и 2 а также тем, что любое ЛНЗ множество в V/U можно дополнить до базиса. □

Разбиение корневого пространства на ядра

- Пусть V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$, $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$, а m — кратность корня λ в характеристическом многочлене $\chi_\varphi(t)$.

- Тогда $\dim(V(\lambda)) = m$ по Теореме 14.

- Пусть $\psi = \varphi - \lambda \text{id}$.

- Введем обозначения

$$W_0 := \{0\}, \quad W_i := \ker(\psi^i) \text{ для } i \in \mathbb{N}.$$

- Понятно, что $W_0 \leq W_1 \leq \dots \leq W_n = V(\lambda)$ (последнее равенство следует из свойства корневых пространств).

- Пусть ℓ — минимальное такое натуральное число, что $W_\ell = V(\lambda)$.

- Так как $W_i \leq V(\lambda)$, мы имеем $V(\lambda) = W_\ell = W_{\ell+1} = \dots$, поэтому, все последующие ядра после W_ℓ не будут меняться.

- Введем обозначения

$$p_i := \dim(W_i) \text{ (здесь } i \in \{0, \dots, \ell\}),$$

$$r_i := p_i - p_{i-1} \text{ (здесь } i \in \{1, \dots, \ell\}).$$

- Отметим, что количество векторов в относительном базисе W_ℓ по W_{t-1} равно

$$\dim(W_\ell) - \dim(W_{t-1}) = \sum_{i=t}^{\ell} (\dim(W_i) - \dim(W_{i-1})) = \sum_{i=t}^{\ell} r_i.$$

Лемма 9

Пусть $2 \leq t \leq \ell$ и у нас есть таблица, строки которой занумерованы числами от t до ℓ . В строке с номером s стоят вектора $e_1^s, \dots, e_{r_s}^s \in W_s$. Предположим, что для каждого $s \in \{t, \dots, \ell\}$ вектора в s строке ЛНЗ над W_{s-1} . Тогда все записанные в таблице вектора, а также $\psi(e_1^t), \dots, \psi(e_{r_t}^t)$ вместе ЛНЗ над W_{t-2} . В частности, эти вектора можно дополнить до относительного базиса W_ℓ над W_{t-2} .

Доказательство. • Предположим противное. Пусть

$$\sum_{s=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_i^s e_i^s + \sum_{j=1}^{r_t} \beta_j \psi(e_j^t) = w, \quad \text{где } w \in W_{t-2}, \quad (*)$$

причем не все коэффициенты α_i^s и β_j равны 0.

- Разберем два случая: не все коэффициенты α_i^s равны 0 или все они равны 0.

Случай 1: не все α_i^s равны 0.

- Пусть q — наибольшее такое число, что существует отличный от 0 индекс α_i^q .
- Тогда $\alpha_i^s = 0$ при $s > q$ и в первой сумме из (*) можно вести суммирование до q вместо ℓ .
- Подействуем на обе части (*) оператором ψ^{q-1} и получим:

$$0 = \psi^{q-1}(w) = \sum_{j=1}^{r_t} \beta_j \psi^q(e_j^t) + \sum_{s=t}^q \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_i^s \psi^{q-1}(e_i^s) =$$
$$\sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q \psi^{q-1}(e_i^q) = \psi^{q-1} \left(\sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q e_i^q \right),$$

откуда следует, что $\sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q e_i^q \in W_{q-1}$, противоречие с условием.

Случай 2: все α_j^s равны 0.

- Тогда существует $\beta_j \neq 0$, а вся первая сумма из (*) — нулевая и (*) превращается в

$$w = \sum_{j=1}^{r_t} \beta_j \psi(e_j^t) = \psi\left(\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t\right).$$

- Тогда $0 = \psi^{t-2}(w) = \psi^{t-1}\left(\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t\right).$

- Следовательно, $\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t \in W_{t-1}$, противоречие с условием. □

Следствие 3

Для всех $t \in \{2, \dots, \ell\}$ выполнено $r_{t-1} \geq r_t$.

Доказательство. • Из Леммы 9 следует, что

$$r_t + \sum_{j=t}^{\ell} r_j \leq \dim(W_{\ell}) - \dim(W_{t-2}) = \sum_{j=t-1}^{\ell} r_j,$$

откуда следует, что $r_{t-1} \geq r_t$. □

Лемма 10

Пусть $2 \leq t \leq \ell$ и у нас есть таблица, строки которой занумерованы числами от t до ℓ . В строке с номером i стоят вектора $e_1^i, \dots, e_{r_i}^i \in W_i$. Предположим, что для каждого $i \in \{t, \dots, \ell\}$ вектора в строках с i по ℓ образуют относительный базис W_ℓ над W_{i-1} . Пусть T — множество, состоящее из всех векторов в таблице, а также $\psi(e_1^t), \dots, \psi(e_{r_t}^t)$. Тогда вектора из T можно дополнить до относительного базиса W_ℓ над W_{t-2} , дописав $r_{t-1} - r_t$ векторов из W_{t-1} .

Доказательство. • Пусть $s = r_{t-1} - r_t$. По Следствию 3, $s \geq 0$.

• По Лемме 9 вектора из T ЛНЗ над W_{t-2} и их можно дополнить до относительного базиса W_ℓ над W_{t-2} векторами $x_1, \dots, x_s \in W_\ell$. (Нужно в точности s векторов, как видно из вычислений Следствия 3.)

• Так как $e_1^t, \dots, e_{r_t}^t, \dots, e_1^\ell, \dots, e_{r_\ell}^\ell$ — относительный базис W_ℓ по W_{t-1} .

• Поэтому, в факторпространстве W_ℓ/W_{t-1} для любого $q \in \{1, \dots, s\}$ мы имеем

$$\bar{x}_q = \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \beta_{i,q}^j \bar{e}_i^j, \quad \text{где все } \beta_{i,q}^j \in K.$$

• Положим $y_q = x_q - \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \beta_{i,q}^j e_i^j. \quad (*)$

• Тогда $\bar{y}_q = 0$ в W_{ℓ}/W_{t-1} , значит, $y_q \in W_{t-1}$.

• Докажем, что $y_1, \dots, y_s \in W_{t-1}$ также дополняют вектора из T до относительного базиса W_{ℓ} над W_{t-2} .

• Для этого достаточно показать, что все эти вектора ЛНЗ над W_{t-2} . Пусть это не так и

$$\sum_{i=1}^s \gamma_i y_i + \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \delta_i^j e_i^j + \sum_{i=1}^{r_t} \alpha_i \psi(e_i^t) = w \in W_{t-2},$$

где все $\gamma_i, \alpha_i, \delta_i^j \in K$ и не все они равны 0.

• Из Леммы 9 следует, что не все $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ равны 0.

• Подставив для каждого y_i выражение $(*)$, после приведения подобных членов, получим

$$\sum_{i=1}^s \gamma_i x_i + \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \varepsilon_i^j e_i^j + \sum_{i=1}^{r_t} \alpha_i \psi(e_i^t) = w \in W_{t-2},$$

где $\varepsilon_i^j = \delta_i^j + \sum_{q=1}^s \gamma_q \beta_{i,q}^j$.

• Но по выбору $x_1, \dots, x_s$ тогда $\gamma_1 = \dots = \gamma_s = 0$,
противоречие.



Разбиение корневого пространства собственного числа оператора на Жордановы клетки

- Пусть V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$, $\varphi \in \text{End}(V)$, $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$, а m — кратность корня λ в характеристическом многочлене $\chi_\varphi(t)$.
- Тогда $\dim(V(\lambda)) = m$.
- Мы научимся выбирать такой базис корневого пространства $V(\lambda)$, в котором матрица $\varphi|_{V(\lambda)}$ имеет достаточно простой вид — диагональ из **Жордановых клеток**.
- Пусть $\psi = \varphi - \lambda \text{id}$.
- Введем обозначения $W_0 = \{0\}$, $W_i = \ker(\psi^i)$ для $i \in \mathbb{N}$.
- Мы доказали, что существует такое минимальное натуральное число ℓ , что $W_\ell = V(\lambda)$, тогда $W_0 \leq W_1 \leq \dots \leq W_\ell = V(\lambda) = W_{\ell+1} = W_{\ell+2} = \dots$.
- Введем обозначения $p_i = \dim(W_i)$ (здесь $i \in \{0, \dots, \ell\}$), а $r_i = p_i - p_{i-1}$ (здесь $i \in \{1, \dots, \ell\}$).
- По Следствию 3, $1 \leq r_\ell \leq r_{\ell-1} \leq \dots \leq r_1$, следовательно,

$$\ell \leq \sum_{i=1}^{\ell} r_i = \sum_{i=1}^{\ell} (p_i - p_{i-1}) = p_\ell - p_0 = \dim(W_\ell) = \dim(V(\lambda)) = m.$$

Шаг 1: ищем базисы ядер W_i .

• Сначала находим базис W_1 (назовем его B_1), потом дополняем его до базиса W_2 (назовем это дополнение B_2), и так далее, пока не дополним до базиса W_ℓ (последнее дополнение — это B_ℓ).

Шаг 2: построение и заполнение лестницы.

- Высота лестницы ℓ , на i ступени будут вектора из W_i , ширина i ступени равна r_i .
- Суммарное количество клеток в лестнице равно m . В строках с s по ℓ будет $r_s + \dots + r_\ell$ векторов — как раз столько, сколько должно быть в относительном базисе W_ℓ над W_{s-1} .
- Опишем процедуру заполнения лестницы. Будем делать это сверху вниз так, чтобы под каждым вектором e был выписан вектор $\psi(e)$ и для всех $s \in \{1, \dots, \ell\}$ вектора в строках с s по ℓ образовывали относительный базис W_ℓ по W_{s-1} .

W_ℓ	e_1^ℓ	e_2^ℓ	$e_{r_\ell}^\ell$			
$W_{\ell-1}$	$\psi(e_1^\ell)$	$\psi(e_2^\ell)$	$\psi(e_{r_\ell}^\ell)$	$e_{r_\ell+1}^{\ell-1}$	$e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1}$	
$W_{\ell-2}$	$\psi^2(e_1^\ell)$	$\psi^2(e_2^\ell)$	$\psi^2(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi(e_{r_\ell+1}^{\ell-1})$	$\psi(e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1})$	$e_{r_{\ell-2}}^{\ell-2}$

...

W_1	$\psi^{\ell-1}(e_1^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_2^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_\ell+1}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-3}(e_{r_{\ell-2}}^{\ell-1})$	...	e_1^1
-------	---------------------------	---------------------------	----------------------------------	--	--	--	-----	---------

База: ℓ строка. В верхней строке лестницы выписываем вектора из $B_\ell = \{e_1^\ell, \dots, e_{r_\ell}^\ell\}$.

Переход $s \rightarrow s-1$. Пусть строки $s, \dots, \ell$ уже заполнены, обозначим вектора в s строке через $e_1^s, \dots, e_{r_s}^s$.

- В $s-1$ строке под каждым вектором e_i^s запишем вектор $\psi(e_i^s)$ (очевидно, $e_i^s \in W_s \Rightarrow \psi(e_i^s) \in W_{s-1}$).
- По Лемме 10 все выписанные вектора можно дополнить до относительного базиса W_ℓ по W_{s-2} , добавив недостающие $r_{s-1} - r_s$ векторов из W_{s-1} (на самом деле эти вектора можно выбрать даже из B_{s-1}).

W_ℓ	e_1^ℓ	e_2^ℓ	$e_{r_\ell}^\ell$			
$W_{\ell-1}$	$\psi(e_1^\ell)$	$\psi(e_2^\ell)$	$\psi(e_{r_\ell}^\ell)$	$e_{r_\ell+1}^{\ell-1}$	$e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1}$	
$W_{\ell-2}$	$\psi^2(e_1^\ell)$	$\psi^2(e_2^\ell)$	$\psi^2(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi(e_{r_\ell+1}^{\ell-1})$	$\psi(e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1})$	$e_{r_{\ell-2}}^{\ell-2}$
...						
W_1	$\psi^{\ell-1}(e_1^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_2^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_\ell+1}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-3}(e_{r_{\ell-2}}^{\ell-1})$
						$e_{r_1}^1$

- Итак, пусть все клетки лестницы заполнены.
- Спустившись до первого этажа, мы получим относительный базис W_ℓ над $W_0 = \{0\}$, а это просто базис W_ℓ , который нам и будет нужен — так называемый жорданов базис.

Шаг 3: Жордановы клетки собственного числа λ .

- Рассмотрим любой столбец лестницы. Пусть $e_1, \dots, e_q$ — его вектора снизу вверх ($e_1 \in W_1$).
- По построению, тогда $\psi(e_1) = 0$ и $\psi(e_i) = e_{i-1}$ для $i \in \{2, \dots, q\}$.
- Пусть $U_q = \text{Lin}(e_1, \dots, e_q)$. Тогда из доказанного понятно, что U_q — ψ -инвариантное подпространство и линейное отображение $\psi|_{U_q}$ имеет в базисе $e_1, \dots, e_q$ матрицу

$$J_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(над главной диагональю — диагональ из 1, все остальные 0 — вспомните, как строится матрица отображения!).

- Так как $\varphi = \psi + \lambda \text{id}$, это отображение имеет в базисе $e_1, \dots, e_q$ матрицу

$$J_q(\lambda) = J_q + \lambda E_q = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

(на главной диагонали λ , над главной диагональю — диагональ из 1, все остальные 0).

- Матрица $J_q(\lambda)$ называется *жордановой клеткой размера q числа λ* , а U_q — *клеточным пространством* оператора φ .
- Таким образом, каждому столбцу лестницы для числа λ соответствует жорданова клетка, а их общее количество равно длине нижней строки лестницы — это, кстати, $\dim(V_\lambda)$ (размерность собственного пространства).
- Суммарный размер клеток с собственным числом λ — это количество клеток в лестнице, то есть, m — кратность λ .
- Размер максимальной клетки с числом λ — это высота лестницы ℓ .

Построение ЖНФ оператора φ .

Теорема 15

Пусть V — линейное пространство над полем K , $\dim(V) = n$, $\varphi \in \text{End}(V)$, $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ и характеристический многочлен раскладывается на линейные множители:

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Тогда оператор φ в некотором базисе имеет **Жорданову нормальную форму** — матрицу, на диагонали которой стоят жордановы клетки, а все остальные элементы равны 0.

Доказательство. • Нужно выполнить описанный алгоритм для каждого собственного числа.

- В итоге матрица оператора, суженного на каждое из корневых пространств, будет объединением нескольких жордановых клеток.

- По Теореме 13, в нашем случае V есть прямая сумма корневых пространств всех собственных чисел.

- Тогда, объединив построенные базисы для всех корневых пространств, мы получим **жорданов базис**, в котором матрица оператора и будет **Жордановой нормальной формой**. 

- У ЖНФ оператора на главной диагонали стоят собственные числа, на диагонали над главной в некоторых клетках стоят 1, а во всех остальных клетках стоят 0.