

Алгебра. ИТМО. 1 курс, 2024-25

Глава 0. Основные понятия

1. Кольцо, поле, типы колец.
2. Свойства 0, 1 и обратных элементов. Вычитание и деление.
3. Подкольцо и подполе.
4. Гомоморфизмы колец. Ядро и образ гомоморфизма.
5. Типы гомоморфизмов. Мономорфизм и ядро.
6. Отображение, обратное к изоморфизму — изоморфизм.
7. Изоморфные кольца.
8. Идеал. Ядро гомоморфизма является идеалом.
9. Идеал и обратимые элементы. Идеалы в поле. Гомоморфизм из поля — инъекция.
10. Идеал, порожденный множеством элементов. Главный идеал.
11. Сравнения по модулю идеала. Вычеты.
12. Факторкольцо **13.** Теорема о гомоморфизме колец.

1. Комплексные числа

1. Вещественная и мнимая часть, умножение, сложение, норма, модуль.
2. Поле комплексных чисел.
3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Изменение модуля и аргумента при перемножении комплексных чисел. Формула Муавра.
4. Вложение вещественных чисел в комплексные.
5. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из 1.

2. Целые числа

1. Делимость. Свойства. Теорема о делении с остатком
2. НОД. Свойства.
3. Алгоритм Евклида. Следствия из алгоритма Евклида.
4. Линейное представление НОД.
5. НОД нескольких чисел через НОД двух чисел. Линейное представление НОД нескольких чисел.
6. Взаимно простые числа. Свойства.
7. Простые числа, свойства. Бесконечность количества простых.
8. Основная теорема арифметики в \mathbb{Z} .
9. Каноническое разложение. Количество натуральных делителей числа.
10. Представление НОД чисел через их канонические разложения.
11. Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными.
12. Идеалы в \mathbb{Z}
13. Линейное представление НОД: доказательство существования с помощью идеала.
14. Сравнения по модулю натурального числа, свойства. Вычеты.
15. Полная система вычетов, свойства.
16. Приведенная система вычетов, свойства.
17. Теорема Эйлера.
18. Мультипликативность функции Эйлера.
19. Функция Эйлера: значение на степени простого числа, явный вид.
20. Сумма функции Эйлера по делителям числа.
21. Кольцо вычетов и его обратимые элементы. Поле вычетов по простому модулю.
22. Алгоритм поиска обратного вычета. Решение сравнения с одним неизвестным.
23. Делимость на попарно взаимно простые числа.
24. Китайская теорема об остатках.
25. Алгоритмы поиска решения для КТО.

26. Функция Мёбиуса. Сумма функции Мёбиуса по промежуточным делителям.
27. Формула обращения Мёбиуса, аддитивный вариант.