Алгебра. Практика. 2024-25

Занятие 1. 09.09.2024.

0. Пусть K — кольцо, $a \in K$. Докажите, что $a \cdot 0{=}0$.

1. Выполните деление: $\frac{2+1i}{1-2i}$.

2. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 4x + 5 = 0$.

3. Найдите модуль и аргумент числа $-\sqrt{3} + i$.

4. Пусть $a = \cos(\frac{5\pi}{7}) + i\sin(\frac{5\pi}{7})$ и $b = \cos(\frac{4\pi}{7}) + i\sin(\frac{4\pi}{7})$.
а) Найдите $(a+b)^4$.
б) Найдите все корни 3 степени из $(a+b)$.

5. Комплексное число z таково, что $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$ (где α известно). Найдите $z^n + \frac{1}{z^n}$.

6. Пусть $z \in$ C, $z \neq -1$, $|z| = 1$. Докажите, что существует такое вещественное число t, что $z = \frac{1-ti}{1+ti}$.

Занятие 2. 16.09.2024.

1. Пусть $x + iy = (s+it)^n$. Докажите, что $x^2 + y^2 = (s^2 + t^2)^n$.

2. Решите уравнение:
а) $z^5 = \overline{z}$; б) $z^5 + \overline{z} = 0$.

3. Найдите НОД и его линейное представление с помощью алгоритма Евклида:
а) $(2453, 2007)$;
б) $(2376, 702)$.

4. Последовательность чисел Фибоначчи определяется соотношениями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ при $n \geq 1$.
а) Найдите (F_n, F_{n+1}).
б) Найдите линейное представление НОД (F_n, F_{n+1}).

5. Докажите, что все натуральные числа, имеющие нечетное число натуральных делителей — это точные квадраты

6. Пусть $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Докажите, что $\varphi(n) \,\vdots\, 2$ при $n > 2$.

Занятие 3. 30.09.2024.

1. Решите в целых числах уравнение.
а) $258x - 172y = 112$;
б) $209x - 513y = 76$.

2. Натуральное число n не имеет собственных делителей, больших 1 и не превосходящих $\sqrt{n}$. Докажите, что $n \in \mathbb{P}$.

3. Докажите, что простых чисел вида $4k - 1$ бесконечно много.

4. Докажите, что $d(n)$ (количество натуральных делителей n) мультипликативна (то есть $d(ab) = d(a)d(b)$ для взаимно простых натуральных a и b).

5. Найдите вычет обратный 17 по модулю 336.

6. Решите сравнение: а) $91x \equiv 154 \pmod{112}$; а) $76x \equiv 232 \pmod{220}$.

7. а) Верно ли, что $2\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов?

б) Опишите все идеалы в кольца $2\mathbb{Z}$.

Занятие 4. 07.10.2024.

1. Решите систему сравнений

а) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$;

2. Докажите, что функция Мёбиуса μ мультипликативна.

3. Число $n \in \mathbb{N}$ имеет 15 натуральных делителей. Сколько простых делителей может иметь n?

4. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $j \in \{0,1,2,3\}$ пусть $S_j(n) = \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{j} + \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{j+4} + \ldots$ (сумма всех биномиальных коэффициентов с номерами, имеющими остаток j от деления на 4).

а) Докажите, что $S_0 - S_2 = \mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^\mathrm{n})$.

б) Найдите S_0, S_1, S_2 и S_3.

5. Число $\varepsilon \in \mathrm{C}$ называется *первообразным* корнем из 1 степени n, если $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^k \neq 1$ при $k < n$.

а) Найдите сумму первообразных корней степени p из 1, где $p \in \mathbb{P}$.

б) Найдите сумму первообразных корней степени $p_1 p_2 \ldots p_k$ из 1, где $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$ — разные.

Упражнения для самостоятельной тренировки перед КР 1.

1. Решите в целых числах уравнение $561x - 171y = 24$.

2. Найдите вычет, обратный к 117 по модулю 484.

3. Решите систему сравнений

а $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 37 \pmod{41} \\ x \equiv 7 \pmod{85} \end{cases}$.

Занятие 5. 21.10.2024.

1. Вещественные числа p, q таковы, что $x^4 + px + q \vdots x^2 + 10x + 1$. Найдите p и q.

2. С помощью алгоритма Евклида, найдите $(x^7 + x^2 + 1, x^{12} - 1)$ и его линейное представление.

3. При каких n многочлен $x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

4. Найдите все многочлены степени 4, дающие остаток $2x$ приделении на $(x-1)^2$ и остаток $3x$ при делении на $(x-2)^3$.

5. Найдите (x^m-1, x^n-1).

Занятие 6. 28.10.2024.

1. Какую кратность корня 1 может иметь многочен $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$?

2. Пусть $n>m>0$, $c>0$. Докажите, что многочлен ax^n+bx^m+c не может иметь корня кратности 3 и более.

3. Пусть $n_k>n_{k-1}>\ldots>n_0$. Докажите, что многочлен $a_kx^{n_k}+a_{k-1}x^{n_{k-1}}+\ldots+a_0x^{n_0}$ не может иметь ненулевого корня кратности более k.

4. Многочлен
а) $f(x)\in\mathbb{C}[x]$;
б) $f(x)\in K[x]$, где K — поле
таков, что $f(x^n)\,\vdots\,x-1$. Докажите, что $f(x^n)\,\vdots\,(x^n-1)$.

Занятие 7. 11.11.2024.

1. Найдите интерполяционный многочлен по точкам:
$x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$,
$y_0=3$, $y_1=-10$, $y_2=5$, $y_3=7$, $y_4=8$.

2. Найдите интерполяционный многочлен по точкам:
$x_0=1$, $x_1=-1$, $x_2=i$, $x_3=-i$,
$y_0=3$, $y_1=4$, $y_2=1$, $y_3=1$.

3. Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ — корни многочлена x^3+3x+1. Вычислите
а) $\frac{1}{(3-\alpha_1)}+\frac{1}{(3-\alpha_2)}+\frac{1}{(3-\alpha_3)}$, где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ — корни многочлена x^3+3x+1.
б) $\frac{1}{(3-\alpha_1)^2}+\frac{1}{(3-\alpha_2)^2}+\frac{1}{(3-\alpha_3)^2}$, где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ — корни многочлена x^3+3x+1.

4. $f(x)\in$ C[x] — многочлен с $\deg(f)<n$, а $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ — корни степени n из 1. Известно, что $f(\varepsilon_1)=y_1$, ..., $f(\varepsilon_n)=y_n$. Докажите, что $f(0)=\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}$.

6. Пусть $\varphi(t)=(t-x_1)\ldots(t-x_n)$, числа $x_1,\ldots,x_n$ различны, $n>3$. Найдите $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\varphi'(x_i)}$.

Занятие 8. 18.11.2024.

1. Разложите в сумму простейших в $\mathbb{C}(x)$ и в $\mathbb{R}(x)$:
а) $\frac{x}{x^4-1}$;
б) $\frac{x}{x^n-1}$, где $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

2. Разложите в сумму простейших $\frac{x^3}{(x^2-1)^2}$.

3. а) Найдите многочлен деления круга $\Phi_p(t)$, где $p\in\mathbb{P}$.
б) Найдите многочлен деления круга $\Phi_{p^k}(t)$, где $p\in\mathbb{P}$.

Занятие 9-10. 02.12.2024.

1. Решите квадратное сравнение $x^2+4x+6 \equiv 0 \pmod{17}$.

2. Найдите рациональные корни многочлена $2x^3+3x^2+6x-4$.

3. Докажите, что уравнение $x^3=1$ в $\mathbb{Z}_p$ имеет три решения при $p \equiv 1 \pmod 3$ и одно решение при $p \equiv 2 \pmod 3$.

4. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k+1$.

5. Многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ с $\deg(f) \leq n$ принимает целые значения в точках k, $k+1$, $\ldots$, $k+n$, где $k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

---

6. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ таков, что $f(1)=111$ и $f(4)=117$. Докажите, что f не имеет $\mathbb{Z}$ корней.

7. Докажите, что многочлен x^4+2x^2+3x+1 неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

8. Даны различные целые числа $a_1,\ldots,a_n$. Докажите, что многочлен $f(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_n)-1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$

а) при нечетном n; б) при четном n.

9. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что многочлен $\Phi_p(x)=x^{p-1}+\ldots+x+1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

Занятие 12. 6.12.2021.

1. Вектора x,y,z линейно независимы. Являются ли линейно независимыми следующие тройки векторов:

а) $x+y$, $x+z$, $y+z$;

б) $x-y$, $x-z$, $y-z$?

2. Какие из данных подмножеств K^3 (где K — поле) являются линейными подпространствами? А какие аффинными?

а) $\{(2z+2x, z+x, z-x) \,:\, x,z \in K\}$.

б) $\{(2z+2, z+x+3, z-x) \,:\, x,z \in K\}$.

3. Пусть V_1,V_2,V_3 — линейные подпространства линейного пространства V, причем V_1 — подпространство V_3. Докажите, что $(V_1+V_2)\cap V_3 = V_1+V_2\cap V_3$.

4. Пусть U,W — аффинные подпространства линейного пространства V. Докажите, что $U+W$ — тоже аффинное подпространства V.

5. Пусть W — k-мерное аффинное подпространство V (то есть $W=U+a$, где $a \in V$, а U — линейное подпространство размерности k).

а) Докажите, что в W любые $k+2$ вектора линейно зависимы.

а) Докажите, что при $W \neq U$ в W есть $k+1$ ЛНЗ вектор.

Занятие 13. 22.12.2021.

1. Пусть $(G,\cdot)$ — группа. Зададим операцию $* : G\times G \to G$ формулой $a*b := b\cdot a$. Докажите, что $(G,*)$ — группа.

2. Докажите, что $\mathrm{ord(g)}=\mathrm{ord(g^{-1})}$ для любого элемента $g \in G$.

3. Группа G такова, что $a^2 = e$ для любого $a \in G$. Докажите, что G абелева.

4. Пусть G — конечная группа, $|G|$ четно. Докажите, что существует такой $a \in G$, что $a \neq e$ и $a^2 = e$.

5. Какие элементы C_n порождают ее при

а) $n \in \mathbb{P}$;

б) произвольном n?

2 семестр. Занятие 1. 06.02.2023.

0. Докажите, что группа простого порядка — циклическая.

1. Докажите, что $A_n \lhd S_n$.

2. Группа $H < S_n$ содержит хотя бы одну нечетную подстановку. Докажите, что H содержит поровну четных и нечетных подстановок.

3. Докажите, что A_n порождается циклами длины 3.

4. Элементы каких порядков есть в

а) S_{11};

б) A_{11}?

5. Найдите все подгруппы S_4. Разбейте их на классы попарно изоморфных.

2 семестр. Занятие 3. 13.02.2023.

1. Пусть A, B, C — группы, а $\varphi : A \to B$ и $\psi : B \to C$ — гомоморфизмы групп.

а) Докажите, что если $\psi \cdot \varphi$ — мономорфизм, то и φ — мономорфизм.

б) Докажите, что если $\psi \cdot \varphi$ — эпиморфизм, то и ψ — эпиморфизм.

2. а) Докажите, что $[S_n, S_n] < A_n$.

б) Докажите, что $[S_n, S_n] = A_n$.

3. $H < G$, $(G : H) = 2$. Докажите, что $H \lhd G$.

4. G — группа, $|G| = pq$, гда $p, q \in \mathbb{P}$, $p < q$. Пусть $H < G$, $|H| = q$. Докажите, что $H \lhd G$.

2 семестр. Занятие 4. 27.02.2022.

1. Пусть K — коммутативное кольцо с 1. Найдите все матрицы $A \in M_n(K)$, которые коммутируют со всеми матрицами (то есть, $AB = BA$ для любой $B \in M_n(K)$).

2. С каким знаком входит в определитель матрицы $n \times n$ произведение элементов *побочной диагонали* (содержащей элементы $a_{n,1}$, $a_{n-1,2}$, $\dots a_{1,n}$)?

3. Матрица $A \in M_n(\mathrm{C})$ такова, что $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$. Докажите, что $\det(A) \in \mathbb{R}$.

4. Найдите определитель : $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

5. Найдите определитель (числа $a_1, \dots, a_n$ считаются известными): $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ & & & \dots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

2 семестр. Занятие 5. 05.03.2024.

1. Найдите определитель : $\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ & & \dots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}$.

2. Найдите определитель : $\begin{vmatrix} c & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & c & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & a & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & c \end{vmatrix}$.

3. Найдите определитель : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mathrm{C}_2^1 & \mathrm{C}_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mathrm{C}_3^1 & \mathrm{C}_3^2 & \mathrm{C}_3^3 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ 1 & \mathrm{C}_\mathrm{n}^1 & \mathrm{C}_\mathrm{n}^2 & \mathrm{C}_\mathrm{n}^3 & \dots & \mathrm{C}_\mathrm{n}^{\mathrm{n}-1} \end{vmatrix}$.

2 семестр. Занятие 6. 18.03.2025.

1. Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм групп, причем группа H — абелева. Докажите, что $\ker(\varphi) \supset [G, G]$.

2. Пусть G — абелева группа, $|G| = pq$, где p, q — различные простые числа. Докажите, что G — циклическая группа.

3. Порождается ли группа S_6 подстановками (246) и (123456)?

2 семестр. Занятие 7. 01.04.2025.

1. Какие из этих двух отображений являются линейными? Для тех, что линейны, найдите матрицу в стандартных базисах пространств.

а) $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = (3x_1 - x_4, 3x_2 - 5x_3, x_2)^T$.

б) $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = (3x_1 - x_2^2, x_3, x_4)^T$.

2. Найдите собственные числа матрицы $\begin{matrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$

3. Докажите, что многочлены с комплексными коэффициентами степени не более 3 образуют линейное пространство а) над $\mathbb{C}$ б) над $\mathbb{R}$ и найдите его размерность.

4. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$, W — его аффинное, но не линейное подпространство, а $e_1, e_2, \ldots, e_n \in W$. Пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ таковы, что $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in W$. Докажите, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

5. Пусть $V_1, V_2 \leq V$ — линейные пространства над полем K. Докажите, что $(V_1 + V_2)/V_1 \simeq V_2/(V_1 \cap V_2)$.

2 семестр. Занятие 9. 08.04.2024.

1. Матрицы $A \in M_{m.n}(K)$ и $B \in M_{n.m}(K)$ таковы, что $ABA = A$. Докажите, что $\mathrm{rk(A)} \leq \mathrm{rk(B)}$.

2. Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над K, а $\varphi : U \to V$ — линейное отображение, где $V_1 \leq V$. Докажите, что Докажите, что $\varphi^{-1}(V_1) = \{x \in U \ : \ \varphi(x) \in V_1\}$ — линейное подпространство U.

3. Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над K, а $\psi : U \to V$ — линейное отображение. Для каждого из двух следущих равенств, докажите или опровергните его. Если равенство неверное, то докажите вместо него верное включение (в одну из сторон) и приведети контрпример к обратному включению.

а) Если $U_1, U_2 \leq U$, то $\psi(U_1 \cap U_2) = \psi(U_1) \cap \psi(U_2)$.

б) Если $V_1, V_2 \leq V$, то $\psi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \psi^{-1}(V_1) \cap \psi^{-1}(V_2)$.

2 семестр. Занятие 10. 15.04.2025.

1. Найдите ЖНФ оператора, заданного следующей матрицы, а также Жорданов базис.

$$\begin{matrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

2. Матрица $J_n(\lambda)$ — это жорданова клетка $n \times n$ с λ на диагонали. Найдите $(J_n(\lambda))^k$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

2 семестр. Занятие 11. 22.04.2025.

2. Матрица $J_n(\lambda)$ — это жорданова клетка $n \times n$ с λ на диагонали. Найдите $(J_n(\lambda))^k$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

3. Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над K, а $\psi : U \to V$ — линейное отображение. Для каждого из двух следущих равенств, докажите или опровергните его. Если равенство неверное, то докажите вместо него верное включение (в одну из сторон) и приведети контрпример к обратному включению.

а) Если $U_1, U_2 \leq U$, то $\psi(U_1 \cap U_2) = \psi(U_1) \cap \psi(U_2)$.

б) Если $V_1, V_2 \leq V$, то $\psi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \psi^{-1}(V_1) \cap \psi^{-1}(V_2)$.

---

1. Приведите квадратичную форму к диагональному виду невырожденным преобразованием переменных: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 2x_1x_2 + x_3x_4 - x_1x_5 + 6x_6^2$.

2. Пусть V — конечномерное линейное пространство над K, а $\psi \in \mathrm{End(V)}$ — обратимый оператор.

а) Докажите, что $0 \notin \mathrm{Spec}(\psi)$.

б) Пусть $\mathrm{Spec}(\psi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{k}\}$. Найдите $\mathrm{Spec}(\psi^{-1})$.

в) Пусть кратность каждого собственного числа λ_i у оператора ψ равна m_i. найдите кратности собственных чисел ψ^{-1}.

2 семестр. Занятие 11. 29.04.2022.

3. Пусть $A \in M_n(\mathrm{C})$, $k \in \mathbb{N}$, $A^k = E_n$.

а) Докажите, что все собственные числа A — корни из 1.

б) Докажите, что A диагонализируема.

1. Пусть K — поле, а $\varphi : K[t] \to K[t]$ — оператор дифференцирования (то есть, $\varphi(f) = f'$).

а) Докажите, что $\varphi \in \mathrm{End(K[t])}$.

б) Докажите, что $U = \{f \in K[t] \,:\, f''' = 0\}$ является φ-инвариантным подпространством.

2. Пусть $U_1 < U_2 < V$ — линейные пространства.

а) Докажите, что $U_2/U_1 < V/U_1$.

б) Докажите, что $(V/U_1)/(U_2/U_1) \simeq V/U_2$.

3. Пусть V — линейное пространство над C, $\varphi \in \mathrm{End(V)}$. Найдите ЖНФ оператора φ, если:

а) $\chi_\varphi(t) = (t-1)^n$, $\dim(\ker(\varphi - id) = k$ и $\dim(\ker((\varphi - id)^2) = k + 1$;

б) $\varphi = \psi^2$, где ψ имеет матрицу, состоящую из одной жордановой клетки собственного числа 1.