

Алгебра. Практика. 2024-25

Занятие 1. 09.09.2024.

0. Пусть K — кольцо, $a \in K$. Докажите, что $a \cdot 0 = 0$.
1. Выполните деление: $\frac{2+1i}{1-2i}$.
2. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 4x + 5 = 0$.
3. Найдите модуль и аргумент числа $-\sqrt{3} + i$.
4. Пусть $a = \cos(\frac{5\pi}{7}) + i \sin(\frac{5\pi}{7})$ и $b = \cos(\frac{4\pi}{7}) + i \sin(\frac{4\pi}{7})$.
 - а) Найдите $(a + b)^4$.
 - б) Найдите все корни 3 степени из $(a + b)$.
5. Комплексное число z таково, что $z + \frac{1}{z} = 2 \cos(\alpha)$ (где α известно). Найдите $z^n + \frac{1}{z^n}$.
6. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -1$, $|z| = 1$. Докажите, что существует такое вещественное число t , что $z = \frac{1-ti}{1+ti}$.

Занятие 2. 16.09.2024.

1. Пусть $x + iy = (s + it)^n$. Докажите, что $x^2 + y^2 = (s^2 + t^2)^n$.
2. Решите уравнение:
 - а) $z^5 = \bar{z}$; б) $z^5 + \bar{z} = 0$.
3. Найдите НОД и его линейное представление с помощью алгоритма Евклида:
 - а) $(2453, 2007)$;
 - б) $(2376, 702)$.
4. Последовательность чисел Фибоначчи определяется соотношениями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ при $n \geq 1$.
 - а) Найдите (F_n, F_{n+1}) .
 - б) Найдите линейное представление НОД (F_n, F_{n+1}) .
5. Докажите, что все натуральные числа, имеющие нечетное число натуральных делителей — это точные квадраты
6. Пусть $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n , взаимно простых с n . Докажите, что $\varphi(n) \div 2$ при $n > 2$.

Занятие 3. 30.09.2024.

1. Решите в целых числах уравнение.
 - а) $258x - 172y = 112$;
 - б) $209x - 513y = 76$.
2. Натуральное число n не имеет собственных делителей, больших 1 и не превосходящих \sqrt{n} . Докажите, что $n \in \mathbb{P}$.
3. Докажите, что простых чисел вида $4k - 1$ бесконечно много.
4. Докажите, что $d(n)$ (количество натуральных делителей n) мультипликативна (то есть $d(ab) = d(a)d(b)$ для взаимно простых натуральных a и b).

5. Найдите вычет обратный 17 по модулю 336.
6. Решите сравнение: а) $91x \equiv 154 \pmod{112}$; а) $76x \equiv 232 \pmod{220}$.
7. а) Верно ли, что $2\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов?
б) Опишите все идеалы в кольца $2\mathbb{Z}$.

Занятие 4. 07.10.2024.

1. Решите систему сравнений
а)
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$
2. Докажите, что функция Мёбиуса μ мультипликативна.
3. Число $n \in \mathbb{N}$ имеет 15 натуральных делителей. Сколько простых делителей может иметь n ?
4. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ пусть $S_j(n) = C_n^j + C_n^{j+4} + \dots$ (сумма всех биномиальных коэффициентов с номерами, имеющими остаток j от деления на 4).
а) Докажите, что $S_0 - S_2 = \operatorname{Re}((1+i)^n)$.
б) Найдите S_0, S_1, S_2 и S_3 .
5. Число $\varepsilon \in \mathbb{C}$ называется *первообразным* корнем из 1 степени n , если $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^k \neq 1$ при $k < n$.
а) Найдите сумму первообразных корней степени p из 1, где $p \in \mathbb{P}$.
б) Найдите сумму первообразных корней степени $p_1 p_2 \dots p_k$ из 1, где $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ — разные.

Упражнения для самостоятельной тренировки перед КР 1.

1. Решите в целых числах уравнение $561x - 171y = 24$.
2. Найдите вычет, обратный к 117 по модулю 484.
3. Решите систему сравнений
а)
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 37 \pmod{41} \\ x \equiv 7 \pmod{85} \end{cases}$$

Занятие 5. 21.10.2024.

1. вещественные числа p, q таковы, что $x^4 + px + q \div x^2 + 10x + 1$. Найдите p и q .
2. С помощью алгоритма Евклида, найдите $(x^7 + x^2 + 1, x^{12} - 1)$ и его линейное представление.
3. При каких n многочлен $x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$?
4. Найдите все многочлены степени 4, дающие остаток $2x$ при делении на $(x-1)^2$ и остаток $3x$ при делении на $(x-2)^3$.

5. Найдите $(x^m - 1, x^n - 1)$.

Занятие 6. 28.10.2024.

1. Какую кратность корня 1 может иметь многочлен $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$?

2. Пусть $n > m > 0, c > 0$. Докажите, что многочлен $ax^n + bx^m + c$ не может иметь корня кратности 3 и более.

3. Пусть $n_k > n_{k-1} > \dots > n_0$. Докажите, что многочлен $a_k x^{n_k} + a_{k-1} x^{n_{k-1}} + \dots + a_0 x^{n_0}$ не может иметь ненулевого корня кратности более k .

4. Многочлен

а) $f(x) \in \mathbb{C}[x]$;

б) $f(x) \in K[x]$, где K — поле

таков, что $f(x^n) \vdots x - 1$. Докажите, что $f(x^n) \vdots (x^n - 1)$.

Занятие 7. 11.11.2024.

1. Найдите интерполяционный многочлен по точкам:

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5,$$

$$y_0 = 3, y_1 = -10, y_2 = 5, y_3 = 7, y_4 = 8.$$

2. Найдите интерполяционный многочлен по точкам:

$$x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = i, x_3 = -i,$$

$$y_0 = 3, y_1 = 4, y_2 = 1, y_3 = 1.$$

3. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$. Вычислите

а) $\frac{1}{(3-\alpha_1)} + \frac{1}{(3-\alpha_2)} + \frac{1}{(3-\alpha_3)}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$.

б) $\frac{1}{(3-\alpha_1)^2} + \frac{1}{(3-\alpha_2)^2} + \frac{1}{(3-\alpha_3)^2}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$.

4. $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен с $\deg(f) < n$, а $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — корни степени n из 1. Известно, что $f(\varepsilon_1) = y_1, \dots, f(\varepsilon_n) = y_n$. Докажите, что $f(0) = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$.

6. Пусть $\varphi(t) = (t - x_1) \dots (t - x_n)$, числа x_1, \dots, x_n различны, $n > 3$. Найдите $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\varphi'(x_i)}$.