

Будем считать, что мы имеем дело с линейным пространством над  $\mathbb{C}$ , чтобы характеристический многочлен нашего оператора раскладывался на линейные множители, и было выполнено условие теоремы о существовании ЖНФ.

Как мы обычно задаем линейный оператор  $\varphi$ ? Квадратной матрицей  $A$ , только не очень хорошей.

Ниже по пунктам изложим алгоритм построения ЖНФ. В лекциях можно увидеть подробности.

### 0. ПОИСК СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ.

Нужно посчитать  $\chi_\varphi(t) = \det(A - tE)$  и найти его корни. Как это сделать? Ну, мы же умеем считать определитель!

Итак, теперь мы знаем  $\text{Spec}(\varphi)$  и кратности всех собственных чисел. Дальнейшие действия проводятся отдельно для каждого собственного числа.

Пусть  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$  имеет кратность  $m$ . Далее мы покажем, что делать с числом  $\lambda$ .

#### 1. ПОСТРОЕНИЕ ЯДЕР $W_i$ .

Пусть  $\psi = \varphi - \text{lid}$ , тогда его матрица  $B = A - \lambda E_n$ . Введем обозначения  $W_0 = \{0\}$ ,  $W_i = \ker(\psi^i)$  для  $i \in \mathbb{N}$ . Мы знаем что существует такое минимальное натуральное число  $\ell$ , что  $W_\ell = V(\lambda)$ , тогда  $W_0 \subseteq W_1 \subseteq \dots \subseteq W_\ell = W_{\ell+1} = W_{\ell+2} = \dots$  (далее  $W_\ell$  искать ядра бессмысленно).

Сначала ищем  $W_1$ . Как? Очень просто — решаем ОСЛУ  $Bx = 0$ : приводим к трапециевидной форме, находим базис  $B_1$  пространства решений — именно он нам и нужен. Для этого проще всего подставить значение любой одной *главной переменной* (помните, что это такое? если нет, смотрите лекции), равное 1, а остальных главных переменных — равное 0, остальные переменные вычисляем. Для самоконтроля полезно понимать, что  $|B_1| = \dim(W_1) = n - \text{rank}(B)$ .

Далее ищем  $W_2$  — решаем систему  $B^2x = 0$  (кстати, матрицу  $B$  придется возвести в квадрат). Все решения из  $W_1$  автоматом подходят. Нужно найти  $B_2$  — дополнение  $B_1$  до базиса  $W_2$ . Систему решаем также, там появляются новые главные переменные, в них 1 и нужно подставлять, чтобы получить вектора из  $B_2$  (разумеется, эти вектора неединственны!). Проверяем себя — общее количество векторов  $|B_1| + |B_2| = \dim(W_2) = n - \text{rank}(B^2)$ .

И так далее — ищем  $B_3, \dots, B_\ell$ . Как понять, что дальше искать не нужно? Очень просто — когда мы получим очередное пространство  $W_\ell$  с  $\dim(W_\ell) = m$ .

#### 2. ПОСТРОЕНИЕ ЛЕСТНИЦЫ.

Для этого вычисляем  $r_i = \dim(W_i) - \dim(W_{i-1})$  и лестница готова — см. лекцию и картинку. На верхнем этаже лестницы расставляем вектора из  $B_\ell$ . Далее заполняем лестницу — это подробно описано в презентации. На всякий случай — все вектора полученного базиса должны быть ЛНЗ (если это не так, Вы ошилились с выбором одного из векторов на каком-то шаге заполнения лестницы, нужно выбрать другой вектор).

#### 3. ЖНФ и ЖОРДАНОВ БАЗИС.

Итак, все лестницы построены. Теперь берем лестницу для каждого числа и выписываем вектора каждого ее столбца снизу вверх. В ЖНФ на диагонали каждому столбцу лестницы для  $\lambda$  (скажем, высоты  $q$ ) будет соответствовать блок в виде жордановой клетки  $q \times q$  с  $\lambda$  на диагонали.

В ответе должна быть ЖНФ и правильный порядок векторов жорданова базиса (соответствующий выписанной ЖНФ). Однако, меня интересуют все шаги алгоритма, скажем базисы ядер  $W_i$ ! Не нужно использовать программы, считающие ЖНФ и Жорданов базис. Вы должны показать знание алгоритма. Калькулятор и даже компьютер для перемножения матриц использовать можно, хотя я выдам такие, что и в уме легко перемножаются, если знать, как это делается.

Каждый находит свое личное задание дальше, и решает именно его. Решения нужно высылать мне. С указанием фамилии и номера варианта.

УДАЧИ!

---

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса  
Вариант 5А

5	0	0	0	0	0	0
3	5	0	0	0	0	0
0	-1	5	0	0	0	0
0	0	0	5	0	0	0
0	0	1	3	5	0	0
0	0	-3	-1	0	5	0
1	0	3	1	0	-1	4

Букреев Степан

---

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса  
Вариант 8А

8	0	0	0	0	0	0
0	8	0	0	0	0	0
0	-1	8	0	0	0	0
0	2	-4	8	0	0	0
0	0	-1	3	8	0	0
0	0	3	1	0	8	0
2	0	0	4	0	3	7

Газизуллин Ринат

---

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса  
Вариант 9А

9	0	0	0	0	0	0
0	9	0	0	0	0	0
2	0	9	0	0	0	0
0	-1	-4	9	0	0	0
0	4	1	0	9	0	0
0	0	3	0	-1	9	0
0	0	3	1	-2	2	8

Гнездилов Дмитрий

---

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса  
Вариант 11А

-2	0	0	3	0	0	-2
0	-2	1	4	-1	0	0
0	0	-2	0	0	-4	0
0	0	0	-2	0	0	4
0	0	0	0	-2	3	0
0	0	0	0	0	-2	-1
0	0	0	0	0	0	1

Горшелев Кирилл

---

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса  
Вариант 28А

5	0	0	0	0	0	0
2	5	0	0	0	0	0
-3	0	5	0	0	0	0
0	0	0	5	0	0	0
0	0	2	-3	5	0	0
0	0	-3	2	0	5	0
1	0	-2	2	1	3	4

Касимов Аскар

---

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 30А

7	0	0	0	0	0	0
3	7	0	0	0	0	0
0	-2	7	0	0	0	0
0	0	2	7	0	0	0
0	0	0	0	7	0	0
3	1	0	-1	1	7	0
4	0	1	-3	0	2	8

Клеева Ульяна

---

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 33А

-1	3	2	0	0	0	3
0	-1	0	-4	0	0	1
0	0	-1	0	3	1	2
0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	-1	1	-1
0	0	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	1

Корнеев Григорий

---

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 43А

-1	-1	3	0	0	0	-1
0	-1	2	-1	0	0	0
0	0	-1	0	3	2	1
0	0	0	-1	0	0	2
0	0	0	0	-2	-3	0
0	0	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	-1	-1

Орлов Игорь

---

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 77

5	0	0	0	0	0	0
3	5	0	0	0	0	0
0	-2	5	0	0	0	0
4	0	0	5	0	0	0
0	0	1	2	5	0	0
0	0	-2	-1	0	5	0
-2	0	0	-1	1	2	3

Гаврилов Данил

---