

Алгебра. Глава 9. Квадратичные формы и скалярное произведение

Д. В. Карпов

2026

Квадратичные формы

- Здесь и далее K — поле характеристики не 2 (то есть, $2 \neq 0$ в поле K).
- Мы будем иметь дело с линейным пространством V над K с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$.
- Элементы V будут записываться как столбцы координат в этом базисе: $X = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Определение

Функция $f : V \rightarrow K$, заданная формулой

$$f((x_1, \dots, x_n)^T) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{i,j} x_i x_j,$$

где все коэффициенты $a_{i,j} \in K$, называется *квадратичной формой*.

- Зачем в определении фигурирует $2a_{i,j}x_ix_j$ при $i \neq j$?

Для того, чтобы была возможность расписать этот член как $a_{i,j}x_ix_j + a_{j,i}x_jx_i$, где $a_{i,j} = a_{j,i}$.

- Рассмотрим *симметричную* матрицу

$A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M_n(K)$ (то есть, удовлетворяющую

условию $a_{i,j} = a_{j,i}$ для всех пар индексов) и вектор

$$X = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

- Тогда значение квадратичной формы f на векторе X может быть переписано как $f(X) = X^T A X$.
- Матрица A называется *матрицей квадратичной формы f* .
- Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса V ?
- Пусть базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ меняется на $\{e'_1, \dots, e'_n\}$, в котором координаты записываются как $X' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$ (мы считаем, что столбец координат без штрихов в старом базисе соответствует столбцу со штрихами в новом), а матрица квадратичной формы f обозначается A' .
- Это означает, что квадратичная форма f в исходном базисе записывается как $X^T A X$ а в новом базисе — как $(X')^T A' X'$.
- Как нам известно, изменение координат при замене базиса делается умножением на матрицу перехода.

- Пусть C — матрица перехода от $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ к $\{e_1, \dots, e_n\}$.
- Тогда $X = CX'$ и $X^T A X = (CX')^T A (CX') = (X')^T (C^T A C) X'$.
- Следовательно, $A' = C^T A C$.

Определение

- Квадратичной форма имеет *диагональный вид*, если она записывается $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, то есть, ее матрица — диагональная.
- *Привести квадратичную форму к диагональному виду* значит найти такой базис, в котором эта форма имеет диагональный вид.

Теорема 1

Любую квадратичную форму $f : V \rightarrow K$ можно привести к диагональному виду.

Доказательство. • Индукция по количеству переменных n .

• База $n = 1$ очевидна. Также утверждение очевидно в случае, когда все коэффициенты квадратичной формы равны 0 (такая форма уже имеет диагональный вид).

• Пусть $n > 1$, для меньшего числа переменных теорема доказана и мы рассматриваем в базисе e_1, \dots, e_n квадратичную форму

$$f((x_1, \dots, x_n)^T) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{i,j} x_i x_j,$$

имеющую хотя бы один ненулевой коэффициент.

• Разберем два случая.

Случай 1: $a_{i,i} \neq 0$ для $i \in \{1, \dots, n\}$

- НУО $i = 1$. Рассмотрим члены f , содержащие x_1 — это

$$a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + \dots + 2a_{1,n}x_1x_n =$$

$$a_{1,1}(x_1 + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2 + \dots + \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n)^2 - a_{1,1} \left(\sum_{i=2}^n \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}}x_i \right)^2. \quad (*)$$

- Построим новый базис $e'_1 = e_1$ и $e'_i = e_i - \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}}e_1$ при $i \in \{2, \dots, n\}$. (Очевидно, вектора e'_1, \dots, e'_n — ЛНЗ, а значит, образуют базис n -мерного пространства.)
- Тогда вектор $(x_1, \dots, x_n)^T$ в исходном базисе в новом базисе имеет вид $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$, где $x'_1 = x_1 + (\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_2 + \dots + \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n)$ и $x'_i = x_i$ при $i \in \{2, \dots, n\}$.
- Поэтому, ввиду (*) получаем

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_{1,1}(x'_1)^2 + g(x'_2, \dots, x'_n),$$

где g — квадратичная форма, которую можно привести к диагональному виду по индукционному предположению.

- Сделаем это и оставим без изменений базисный вектор e'_1 , в результате получится базис, в котором f имеет диагональный вид.

Случай 2: все коэффициенты $a_{i,i} = 0$

- Но есть ненулевой коэффициент — тогда не умаляя общности можно считать, что $a_{1,2} \neq 0$.
- Рассмотрим новый базис, в котором изменен только первый вектор: $e'_1, e_2, e_3, \dots, e_n$, причем $e'_1 = e_1 - e_2$.
- Нетрудно понять, что вектор с координатами $(x_1, \dots, x_n)^T$ в исходном базисе в новом базисе имеет вид $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$, где $x'_2 = x_2 + x_1$ и $x'_i = x_i$ при $i \neq 2$.
- Одночлен $2a_{1,2}x_1x_2 = 2a_{1,2}x'_1(x'_2 - x'_1)$ в новом базисе содержит $-2a_{1,2}(x'_1)^2$.
- В других одночленах $(x'_1)^2$ появиться не может, поэтому, мы получаем $a'_{1,1} = -2a_{1,2} \neq 0$ и попадаем в разобранный выше случай 1. □

Вещественные квадратичные формы

- В этом разделе мы рассмотрим *вещественные* квадратичные формы, то есть, случай $K = \mathbb{R}$.
- Вещественные числа в первую очередь хороши тем, что на них есть отношение порядка больше-меньше.
- Следующую теорему называют *законом инерции квадратичных форм*.

Теорема 2

Пусть $f((x_1, \dots, x_n)^T)$ — вещественная квадратичная форма, которая двумя способами приведена к диагональному виду:

$$g((y_1, \dots, y_n)^T) = \sum_{i=1}^n a_i y_i^2 \text{ и } h((z_1, \dots, z_n)^T) = \sum_{i=1}^n b_i z_i^2.$$

Тогда среди a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n поровну положительных коэффициентов. Также среди a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n поровну отрицательных коэффициентов, а значит, и поровну нулевых коэффициентов.

Доказательство. • Достаточно доказать равенство количеств положительных коэффициентов. Утверждение для отрицательных коэффициентов доказывается аналогично, после чего утверждение для нулевых выводится.

- Предположим противное, пусть, скажем, у g положительных коэффициентов меньше, чем у h .
- Можно занумеровать коэффициенты так, чтобы $a_1, \dots, a_p > 0$, $b_1, \dots, b_{p+q} > 0$, а все остальные коэффициенты не превосходили 0.
- По определению, диагональный вид квадратичной формы — это ее запись в другом базисе, то есть, существуют такие невырожденные матрицы перехода $C, D \in M_n(\mathbb{R})$, что $f((x_1, \dots, x_n)^T) = a_1 y_1^2 + \dots + a_n y_n^2 = b_1 z_1^2 + \dots + b_n z_n^2$, где $(y_1, \dots, y_n)^T = C(x_1, \dots, x_n)^T$, $(z_1, \dots, z_n)^T = D(x_1, \dots, x_n)^T$.
- Попробуем подобрать такой **ненулевой** вектор $(x_1, \dots, x_n)^T$, что для него $y_1 = \dots = y_p = z_{p+q+1} = \dots = z_n = 0$.
- Равенство нулю каждой координаты — это линейное уравнение на x_1, \dots, x_n , вместе получаем ОСЛУ с переменными x_1, \dots, x_n :

$$\begin{cases} y_1 &= c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,n}x_n = 0, \\ &\dots \\ y_p &= c_{p,1}x_1 + c_{p,2}x_2 + \dots + c_{p,n}x_n = 0, \\ z_{p+q+1} &= d_{p+q+1,1}x_1 + d_{p+q+1,2}x_2 + \dots + d_{p+q+1,n}x_n = 0, \\ &\dots \\ z_n &= d_{n,1}x_1 + d_{n,2}x_2 + \dots + d_{n,n}x_n = 0. \end{cases}$$

- В полученной ОСЛУ n переменных и $n - q$ уравнений, а значит, существует ненулевое решение — вектор x^0 , которому соответствуют

$$Cx^0 = y^0 = (0, \dots, 0, y_{p+1}, \dots, y_n) \quad \text{и}$$

$$Dx^0 = z^0 = (z_1, \dots, z_{p+q}, 0, \dots, 0).$$

- Тогда

$$f(x^0) = \sum_{i=1}^n a_i y_i^2 = \sum_{i=p+1}^n a_i y_i^2 \leq 0 \quad \text{и}$$

$$f(x^0) = \sum_{i=1}^n b_i z_i^2 = \sum_{i=1}^{p+q} b_i z_i^2 \geq 0,$$

откуда следует, что $f(x^0) = 0$ и $z_1 = \dots = z_{p+q} = 0$.

- Таким образом, $z^0 = 0$, а это значит, что $D \cdot x^0 = 0$ для $x^0 \neq 0$, что для невырожденной матрицы D невозможно. Противоречие. □

Положительно определенные квадратичные формы

- Пусть V — линейное пространство над \mathbb{R} .

Определение

Вещественная квадратичная форма $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ называется *положительно определенной*, если для любого $x \in V$, $x \neq 0$ мы имеем $f(x) > 0$.

- На всякий случай заметим, что для квадратичной формы всегда выполнено $f(0) = f((0, \dots, 0)^T) = 0$.

Теорема 3

Пусть положительно определенная квадратичная форма $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ приведена к диагональному виду $a_1 y_1^2 + \dots + a_n y_n^2$. Тогда все коэффициенты a_1, \dots, a_n положительны.

Доказательство. • Пусть это не так и, скажем, $a_1, \dots, a_p > 0$, $a_{p+1}, \dots, a_n \leq 0$, $p < n$.

- По определению, диагональный вид квадратичной формы — это ее запись в другом базисе.

- Это означает, что существуют такая невырожденная матрица перехода $C \in M_n(\mathbb{R})$, что

$$f((y_1, \dots, y_n)^T) = a_1 y_1^2 + \dots + a_n y_n^2, \quad (y_1, \dots, y_n)^T = C(x_1, \dots, x_n)^T.$$

- Попробуем подобрать такой **ненулевой** вектор $(x_1, \dots, x_n)^T$, что для него $y_1 = \dots = y_p = 0$.
- Получаем ОСЛУ

$$\begin{cases} y_1 = c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,n}x_n = 0, \\ \dots \\ y_p = c_{p,1}x_1 + c_{p,2}x_2 + \dots + c_{p,n}x_n = 0. \end{cases}$$

- В этой ОСЛУ n переменных и $p < n$ уравнений, а значит, существует ненулевое решение — вектор x^0 .
- Так как матрица C невырождена, вектор $Cx^0 = y^0 = (0, \dots, 0, y_{p+1}, \dots, y_n)$ не равен 0.
- Тогда

$$f(x^0) = \sum_{i=1}^n a_i y_i^2 = \sum_{i=p+1}^n a_i y_i^2 \leq 0,$$

что противоречит положительной определенности f . □

Кривые второго порядка на плоскости

- **Кривая второго порядка** — это все точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, являющиеся решением уравнения $a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'x + e'y = f'$, где коэффициенты $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$, где среди коэффициентов a', b', c' есть ненулевой.
- Для начала, уменьшим число ненулевых коэффициентов. Невырожденной заменой координат можно привести квадратичную форму $a'x^2 + b'y^2 + c'xy$ (*) к диагональному виду (при этом, изменятся коэффициенты d', e', f').
- Таким образом, достаточно рассматривать уравнения вида $ax^2 + by^2 + d''x + e''y = f''$.
- Легко видеть, что хотя бы один из коэффициентов a, b не равен 0.
- При этом, вне зависимости от способа приведения квадратичной формы (*) к диагональному у виду количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов среди a и b по закону инерции будет одним и тем же.
- Рассмотрим случаи.

Случай 1. Коэффициенты a, b одного знака

- НУО $a, b > 0$ (иначе умножим уравнение на -1).
- Так как $ax^2 + by^2 + d''x + e''y = f'' \iff$
$$a\left(x + \frac{d''}{2a}\right)^2 + b\left(y + \frac{e''}{2b}\right)^2 = f'' + \frac{(d'')^2}{4b} + \frac{(e'')^2}{4a}, \quad (\#)$$
- после замены переменных получится уравнение вида $ax^2 + by^2 = f \quad (1)$.
- При $f < 0$ уравнение (1) не имеет решений.
- При $f = 0$ единственное решение — точка $(0, 0)$.
- При $f > 0$ получаем кривую на плоскости, которая называется **эллипсом**.
- От исходной системы координат на плоскости мы перешли к итоговой с помощью обратимого линейного оператора (замены базиса) и **параллельного переноса** на вектор $\left(\frac{(d'')^2}{4b}, \frac{(e'')^2}{4a}\right)$ (в переходе $(\#)$).
- Оба преобразования плоскости обратимы, поэтому в случаях, когда получается точка или пустое множество, то же самое получается и в исходных координатах.

Случай 2. Коэффициенты a, b разных знаков

- НУО $a > 0$ и $b < 0$ (иначе умножим уравнение на -1).
- Аналогично случаю 1, заменой переменных уравнение приводится к виду $ax^2 + by^2 = f$.
- Поделим x на \sqrt{a} , а y на $\sqrt{-b}$ и получим в новых координатах уравнение

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = f. \quad (2)$$

- При $f = 0$ решение этого уравнения — две прямые $x = y$ и $x = -y$.
- При $f \neq 0$ сделаем еще одну невырожденную замену переменных: $x' := x + y$, $y' := x - y$ и получим уравнение

$$x'y' = f \quad (2').$$

- Такая кривая на плоскости называется **гиперболой**.
- От исходной системы координат на плоскости мы перешли к итоговой с помощью обратимых преобразований плоскости, которые переводят прямую в прямую.
- Поэтому в случае, когда получаются две пересекающиеся прямые, то же самое получается и в исходных координатах.

Случай 3. Один из коэффициентов a, b равен 0

- НУО $a > 0$ и $b = 0$ (иначе переобозначим переменные и при необходимости умножим уравнение на -1).
- Мы имеем уравнение $ax^2 + d'x + e'y = f'$. (*)
- Аналогично случаю 1, заменой переменных уравнение приводится к виду

$$dy = ax^2 + f. \quad (3)$$

- При $d \neq 0$ уравнение (3) задает на плоскости **параболу**.
- При $d = 0$ решение получаем $ax^2 = -f$. При $f > 0$ решений нет, при $f = 0$ решения — прямая $x = 0$, а при $f < 0$ — две параллельные прямые $x = \sqrt{\frac{-f}{a}}$ и $x = -\sqrt{\frac{-f}{a}}$.
- От исходной системы координат на плоскости мы перешли к итоговой с помощью обратимых линейных операторов и параллельного переноса.
- Эти преобразования плоскости обратимы и переводят прямую в прямую, а параллельные прямые — в параллельные прямые.
- Поэтому в случаях, когда получается прямая или две параллельные прямые или когда нет решений, то же самое получается и в исходных координатах.

Определение

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{R} , а отображение $(,) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x, y, z \in V$;

2°. $(x, y) = (y, x)$ для любых $x, y \in V$;

3°. $(x, x) > 0$ для любого $x \in V$, отличного от 0.

Тогда $(,)$ называется *вещественным скалярным произведением*, а V — *пространством со скалярным произведением*, или *Евклидовым пространством*.

Комплексное скалярное произведение

Определение

Пусть V — линейное пространство над \mathbb{C} , а отображение $(,) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $x, y, z \in V$;

2°. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для любых $x, y \in V$;

3°. Для любого $x \in V$, отличного от 0, число (x, x) — вещественное и положительное.

Тогда $(,)$ называется *комплексным скалярным произведением*, а V — *пространством со скалярным произведением*, или *Эрмитовым пространством*.

Свойство 1

Пусть V — пространство со скалярным произведением над \mathbb{C} . Тогда $(z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}(z, x) + \overline{\beta}(z, y)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $x, y, z \in V$.

Доказательство. $(z, \alpha x + \beta y) = \overline{(\alpha x + \beta y, z)} = \overline{\alpha(x, z) + \beta(y, z)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{(x, z)} + \overline{\beta} \cdot \overline{(y, z)} = \overline{\alpha}(z, x) + \overline{\beta}(z, y).$



- Многие свойства вещественного и комплексного скалярного произведения аналогичны, мы будем их доказывать одинаково, используя обозначение $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Свойство 2

Пусть V — пространство со скалярным произведением над K , $x \in V$. Тогда $(0, x) = (x, 0) = 0$ для любого $x \in V$.

Доказательство. Ввиду определения, нам достаточно доказать, что $(0, x) = 0$. Это очевидно следует из $(0, x) = (0 + 0, x) = (0, x) + (0, x)$. □

Определение

Пусть $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, V — пространство со скалярным произведением над K , а e_1, \dots, e_n — базис V .

Матрица Грама базиса e_1, \dots, e_n — это матрица $G = (g_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$, где $g_{i,j} = (e_i, e_j)$.

- Непосредственно из определений можно вывести свойства матрицы Грама.

Свойство 3

Пусть V — пространство со скалярным произведением над K . Тогда на главной диагонали матрицы Грама стоят положительные вещественные коэффициенты.

Свойство 4

Пусть V — пространство со скалярным произведением над \mathbb{R} .
Тогда матрица Грама симметрична (то есть, $G^T = G$).

Свойство 5

Пусть V — пространство со скалярным произведением над \mathbb{C} .
Тогда $G^T = \overline{G}$ (то есть, $g_{i,j} = \overline{g_{j,i}}$).

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца над \mathbb{R}

Теорема 4

Пусть V — пространство со скалярным произведением над \mathbb{R} ,
 $x, y \in V$. Тогда $(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$.

Доказательство. • По определению вещественного скалярного произведения, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y). \quad (*)$$

• При фиксированных x и y мы имеем квадратный трехчлен относительно λ , у которого, очевидно, не более одного корня, а значит, его дискриминант неположителен:

$$4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0,$$

откуда следует доказываемое неравенство.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца над \mathbb{C}

Теорема 5

Пусть V — пространство со скалярным произведением над \mathbb{C} ,
 $x, y \in V$. Тогда $|(x, y)|^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$.

Доказательство. • Пусть $(x, y) = |(x, y)|e^{i\varphi}$.

• Тогда $\overline{(x, y)} = |(x, y)|e^{-i\varphi}$.

• По определению комплексного скалярного произведения и
сказанному выше, для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 \leq (tx + e^{i\varphi}y, tx + e^{i\varphi}y) &= (tx, tx) + (e^{i\varphi}y, tx) + (tx, e^{i\varphi}y) + (e^{i\varphi}y, e^{i\varphi}y) = \\ &= t^2(x, x) + t \cdot ((e^{i\varphi}y, x) + (x, e^{i\varphi}y)) + e^{i\varphi} \cdot \overline{e^{i\varphi}}(y, y) = \\ &= t^2(x, x) + t \cdot (e^{i\varphi}\overline{(x, y)} + \overline{e^{i\varphi}}(x, y)) + N(e^{i\varphi})(y, y) = \\ &= t^2(x, x) + t \cdot (e^{i\varphi}e^{-i\varphi}|(x, y)| + e^{-i\varphi}e^{i\varphi}|(x, y)|) + (y, y) = \\ &= t^2(x, x) + 2t|(x, y)| + (y, y). \end{aligned}$$

• При фиксированных x и y мы имеем квадратный трехчлен
относительно t , у которого, очевидно, не более одного корня,
а значит, его дискриминант неположителен:

$$4|(x, y)|^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0.$$

Определение

Пусть $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$, V — пространство со скалярным произведением над K , $x \in V$. **Длина** вектора x — это $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$.

- Длина ненулевого вектора — положительное вещественное число.

Свойство 1

Если $\lambda \in K$, то $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

Доказательство. (при $K = \mathbb{R}$ считаем, что $\bar{\lambda} = \lambda$)

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot (x, x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

□

Свойство 2

Если $x, y \in V$, то $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Доказательство. • $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) =$
 $(x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x)$ (*).

• При $K = \mathbb{R}$ по Теореме 4 имеем $(x, y) = (y, x) \leq \|x\| \cdot \|y\|$ и
(*) продолжается так:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

откуда следует доказываемое неравенство.

• При $K = \mathbb{C}$ по Теореме 5 имеем
 $(x, y) + (y, x) = 2\operatorname{Re}((x, y)) \leq 2|(x, y)| \leq 2\|x\| \cdot \|y\|$ и (*)
продолжается точно так же, как в вещественном случае. □

Свойство 3

(Неравенство треугольника). Если $x, y, z \in V$, то
 $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$.

Доказательство. Так как $x - y = (x - z) + (z - y)$,
утверждение следует из Свойства 2. □

Ортогональный и ортонормированный базис

- В этом разделе $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а V — пространство со скалярным произведением.

Определение

Пусть e_1, \dots, e_n — базис V .

- 1) Базис называется *ортогональным*, если его матрица Грама диагональна и *ортонормированным*, если его матрица Грама равна E_n .
- 2) Векторы $x, y \in V$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

- Ортогональность базиса эквивалентна тому, что $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ (то есть, любые два различных базисных вектора ортогональны).
- Базис является ортонормированным, если и только если он ортогональный и $(e_i, e_i) = 1$ для каждого базисного вектора.

Свойство 1

Пусть V — пространство со скалярным произведением над \mathbb{R} , e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис V , $x, y \in V$, причем $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ — координаты векторов в указанном базисе. Тогда $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Доказательство.

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

так как $(e_i, e_i) = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. □

Свойство 2

Пусть V — пространство со скалярным произведением над \mathbb{C} , e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис V , $x, y \in V$, причем $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ — координаты векторов в указанном базисе. Тогда $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{y}_i$.

Доказательство.

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot \bar{y}_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{y}_i,$$

так как $(e_i, e_i) = 1$ и $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. □

Ортогонализация Грама-Шмидта

- Это в точности алгоритм, из которого состоит доказательство следующей теоремы.

Теорема 6

Пусть V — пространство со скалярным произведением над K , а $e_1, \dots, e_m \in V$. Тогда существует такой ортогональный набор векторов $f_1, \dots, f_m \in V$, что для любого $p \in \{1, \dots, m\}$ выполнено $\text{Lin}(f_1, \dots, f_p) = \text{Lin}(e_1, \dots, e_p)$.

Доказательство. • Будем доказывать утверждение индукцией по m .

База для $m = 1$ очевидна: возьмем $f_1 = e_1$.

Переход. Пусть набор f_1, \dots, f_k уже построен.

- Будем искать следующий вектор в виде

$$f_{k+1} = e_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i.$$

- Так как $\text{Lin}(e_1, \dots, e_k) = \text{Lin}(f_1, \dots, f_k)$ и по построению f_{k+1} , мы имеем

$$\text{Lin}(f_1, \dots, f_k, f_{k+1}) = \text{Lin}(f_1, \dots, f_k, e_{k+1}) = \text{Lin}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}).$$

- Если $f_i = 0$, коэффициент α_i может быть любым. Пусть $f_i \neq 0$.
- Для того, чтобы найти коэффициент α_i (где $i \in \{1, \dots, k\}$), заметим, что

$$0 = (f_{k+1}, f_i) = (e_{k+1}, f_i) + \sum_{j=1}^k \alpha_j (f_j, f_i) = (e_{k+1}, f_i) + \alpha_i (f_i, f_i),$$

откуда $\alpha_i = \frac{-(e_{k+1}, f_i)}{(f_i, f_i)}$ (напомним, что $(f_i, f_i) \neq 0$). □

- Если вектора e_1, \dots, e_k (где $k \leq m$) попарно ортогональны, то алгоритм ортогонализации их не изменит и мы получим $f_i = e_i$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$.

Следствие 2

Любое подпространство $W < V$ имеет ортогональный и ортонормированный базис.

Доказательство. • Рассмотрим базис W и подвергнем его ортогонализации — получится ортогональный базис e_1, \dots, e_n .

- Базис e'_1, \dots, e'_n , где $e'_i = \frac{1}{\sqrt{(e_i, e_i)}} e_i$ — ортонормированный (извлечение квадратного корня корректно, так как (e_i, e_i) — положительное вещественное число). □

Ортогональное дополнение

- В этом разделе $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а V — пространство над K со скалярным произведением.

Определение

Для $W < V$ определим *ортогональное дополнение* как $W^\perp = \{x \in V : \forall w \in W (x, w) = 0\}$.

Теорема 7

Пусть $W < V$, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$. Тогда $W^\perp < V$, $\dim(W^\perp) = n - m$, $W \oplus W^\perp = V$ и $(W^\perp)^\perp = W$.

Доказательство. • Пусть f_1, \dots, f_m — ортогональный базис W , который мы уже научились строить.

• Дополним его до базиса V , пусть получился базис $f_1, \dots, f_m, e_{m+1}, \dots, e_n$.

• Применим к этому базису ортогонализацию Грама-Шмидта, пусть в результате получились векторы $f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n$ (напомним, что первые m векторов не изменились!).

• Рассмотрим $U = \text{Lin}(f_{m+1}, \dots, f_n)$.

Утверждение 1

$$U \subset W^\perp.$$

Доказательство. • Пусть $u \in U$, $w \in W$. Нам нужно доказать, что $(w, u) = 0$.

• Тогда $w = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i$ и $u = \sum_{j=m+1}^n \beta_j f_j$, где $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$.

• Так как для любых $i \in \{1, \dots, m\}$ и $j \in \{m+1, \dots, n\}$ мы имеем $(f_i, f_j) = 0$,

$$(w, u) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=m+1}^n \alpha_i \cdot \overline{\beta_j} \cdot (f_i, f_j) = 0. \quad \square$$

Утверждение 2

$$U \supset W^\perp.$$

Доказательство. • Пусть $x \in W^\perp$. Тогда $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$.

• Для любого $s \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$0 = (x, f_s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (f_i, f_s) = \alpha_s (f_s, f_s),$$

откуда следует, что $\alpha_s = 0$. Но тогда $x \in U$.

- Таким образом, $W^\perp = U = \text{Lin}(f_{m+1}, \dots, f_n)$ и $\dim(W^\perp) = n - m$.
- Так как $f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n$ — базис V , то 0 единственным образом представляется в виде линейной комбинации этих векторов.
- Следовательно,
$$V = \text{Lin}(f_1, \dots, f_m) \oplus \text{Lin}(f_{m+1}, \dots, f_n) = W \oplus W^\perp.$$
- Теперь возьмем ортогональный базис f_{m+1}, \dots, f_n пространства W^\perp , дополним его векторами f_1, \dots, f_m до базиса V .
- Этот базис и так ортогонален, и мы аналогично сказанному выше получаем, что $(W^\perp)^\perp = \text{Lin}(f_1, \dots, f_m) = W$. □

Свойства ортогонального дополнения

Свойство 1

Пусть $W, U < V$, причем $W \subset U$. Тогда $U^\perp \subset W^\perp$.

Доказательство. Непосредственное следствие определения.

Свойство 2

Пусть $W, U < V$. Тогда $(W + U)^\perp = W^\perp \cap U^\perp$.

Доказательство. • По Свойству 1, $(W + U)^\perp \subset W^\perp$ и $(W + U)^\perp \subset U^\perp$, следовательно, $(W + U)^\perp \subset W^\perp \cap U^\perp$.

- Наоборот, пусть $a \in W^\perp \cap U^\perp$.
 - Рассмотрим любой вектор $x \in W + U$. Тогда $x = y + z$, где $y \in W$ и $z \in U$.
 - Так как $a \in W^\perp$, мы имеем $(a, y) = 0$. Так как $a \in U^\perp$, мы имеем $(a, z) = 0$.
 - Но тогда $(a, x) = (a, y + z) = (a, y) + (a, z) = 0$.
- Следовательно, $W^\perp \cap U^\perp \subset (W + U)^\perp$.



Свойство 3

Пусть $W, U < V$. Тогда $(W \cap U)^\perp = W^\perp + U^\perp$.

Доказательство. • По Свойству 2 мы имеем

$$(W^\perp + U^\perp)^\perp = (W^\perp)^\perp \cap (U^\perp)^\perp = W \cap U.$$

• Следовательно,

$$(W \cap U)^\perp = ((W^\perp + U^\perp)^\perp)^\perp = W^\perp + U^\perp. \quad \square$$

Теорема 8

Пусть V и U — два пространства со скалярным произведением над $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\dim(V) = \dim(U) = n$. Тогда существует изоморфизм (то есть, биективное линейное отображение) $\varphi : V \rightarrow U$, сохраняющий скалярное произведение (то есть, $(x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$ для любых $x, y \in V$).

Доказательство. • Пусть e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис V , а f_1, \dots, f_n — ортонормированный базис U .

- Зададим φ формулами $\varphi(e_i) = f_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Если $(x_1, \dots, x_n)^T$ — координаты $x \in V$ в базисе e_1, \dots, e_n , то $\varphi(x)$ имеет такие же координаты в базисе f_1, \dots, f_n .
- Аналогично, пусть $(y_1, \dots, y_n)^T$ — координаты $y \in V$ в базисе e_1, \dots, e_n и $\varphi(y)$ в базисе f_1, \dots, f_n .
- Если $K = \mathbb{R}$, то $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (\varphi(x), \varphi(y))$.
- Если $K = \mathbb{C}$, то $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{y}_i = (\varphi(x), \varphi(y))$. □