

Алгебра. Практика. 2024-25

Занятие 1. 09.09.2025.

0. Пусть K — кольцо, $a \in K$. Докажите, что $a \cdot 0 = 0$.
1. Выполните деление: $\frac{2+1i}{1-2i}$.
2. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 4x + 5 = 0$.
3. Найдите модуль и аргумент числа $-\sqrt{3} + i$.
4. Пусть $a = \cos(\frac{5\pi}{7}) + i \sin(\frac{5\pi}{7})$ и $b = \cos(\frac{4\pi}{7}) + i \sin(\frac{4\pi}{7})$.
 - а) Найдите $(a + b)^4$.
 - б) Найдите все корни 3 степени из $(a + b)$.
5. Комплексное число z таково, что $z + \frac{1}{z} = 2 \cos(\alpha)$ (где α известно). Найдите $z^n + \frac{1}{z^n}$.
6. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -1$, $|z| = 1$. Докажите, что существует такое вещественное число t , что $z = \frac{1-ti}{1+ti}$.

Занятие 2. 16.09.2025.

1. Пусть $x + iy = (s + it)^n$. Докажите, что $x^2 + y^2 = (s^2 + t^2)^n$.
2. Решите уравнение:
 - а) $z^5 = \bar{z}$; б) $z^5 + \bar{z} = 0$.
3. Найдите НОД и его линейное представление с помощью алгоритма Евклида:
 - а) $(2453, 2007)$;
 - б) $(2376, 702)$.
4. Последовательность чисел Фибоначчи определяется соотношениями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ при $n \geq 1$.
 - а) Найдите (F_n, F_{n+1}) .
 - б) Найдите линейное представление НОД (F_n, F_{n+1}) .
5. Докажите, что все натуральные числа, имеющие нечетное число натуральных делителей — это точные квадраты
6. Пусть $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n , взаимно простых с n . Докажите, что $\varphi(n) \vdots 2$ при $n > 2$.

Занятие 3. 23.09.2025.

1. Решите в целых числах уравнение.
 - а) $258x - 172y = 112$;
 - б) $209x - 513y = 76$.
2. Натуральное число n не имеет собственных делителей, больших 1 и не превосходящих $\sqrt{n}$. Докажите, что $n \in \mathbb{P}$.
3. Докажите, что простых чисел вида $4k - 1$ бесконечно много.
4. Докажите, что $d(n)$ (количество натуральных делителей n) мультипликативна (то есть $d(ab) = d(a)d(b)$ для взаимно простых натуральных a и b).
5. а) Верно ли, что $2\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов?
б) Опишите все идеалы в кольца $2\mathbb{Z}$.

Занятие 4. 30.09.2025.

1. Найдите вычет обратный 17 по модулю 336.
2. Решите сравнение: а) $91x \equiv 154 \pmod{112}$; а) $76x \equiv 232 \pmod{220}$.
3. Решите систему сравнений
а)
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases};$$
4. Число $n \in \mathbb{N}$ имеет 15 натуральных делителей. Сколько простых делителей может иметь n ?
5. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ пусть $S_j(n) = C_n^j + C_n^{j+4} + \dots$ (сумма всех биномиальных коэффициентов с номерами, имеющими остаток j от деления на 4).
 - а) Докажите, что $S_0 - S_2 = \operatorname{Re}((1 + i)^n)$.
 - б) Найдите S_0, S_1, S_2 и S_3 .

Занятие 5. 7.10.2025.

1. Докажите, что функция Мёбиуса μ мультипликативна.
2. Решите систему сравнений
а
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 37 \pmod{41} \\ x \equiv 7 \pmod{85} \end{cases} .$$
3. Пусть $\rho \in \mathbb{C}$ — корень 3 степени из 1, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Докажите, что $(a + b\rho + c\rho^2)^{13}(a + b\rho^2 + c\rho)^{13} \in \mathbb{R}$.
4. Число n нечетно. Докажите, что $2^{n!} - 1$ делится на n .
5. Число $\varepsilon \in \mathbb{C}$ называется *первообразным* корнем из 1 степени n , если $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^k \neq 1$ при $k < n$.
 - а) Найдите сумму первообразных корней степени p из 1, где $p \in \mathbb{P}$.
 - б) Найдите сумму первообразных корней степени $p_1 p_2 \dots p_k$ из 1, где $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ — разные.

Упражнения для самостоятельной тренировки перед КР 1.

1. Решите в целых числах уравнение $561x - 171y = 24$.
2. Найдите вычет, обратный к 117 по модулю 484.
3. Решите систему сравнений.
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 11 \pmod{13} \\ x \equiv 51 \pmod{53} \end{cases} .$$