

Будем считать, что мы имеем дело с линейным пространством над \mathbb{C} , чтобы характеристический многочлен нашего оператора раскладывался на линейные множители, и было выполнено условие теоремы о существовании ЖНФ.

Как мы обычно задаем линейный оператор φ ? Квадратной матрицей A , только не очень хорошей.

Ниже по пунктам изложим алгоритм построения ЖНФ. В лекциях можно увидеть подробности.

0. ПОИСК СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ.

Нужно посчитать $\chi_\varphi(t) = \det(A - tE)$ и найти его корни. Как это сделать? Ну, мы же умеем считать определитель!

Итак, теперь мы знаем $\text{Spec}(\varphi)$ и кратности всех собственных чисел. Дальнейшие действия проводятся отдельно для каждого собственного числа.

Пусть $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ имеет кратность m . Далее мы покажем, что делать с числом λ .

1. ПОСТРОЕНИЕ ЯДЕР W_i .

Пусть $\psi = \varphi - \text{lid}$, тогда его матрица $B = A - \lambda E_n$. Введем обозначения $W_0 = \{0\}$, $W_i = \ker(\psi^i)$ для $i \in \mathbb{N}$. Мы знаем что существует такое минимальное натуральное число ℓ , что $W_\ell = V(\lambda)$, тогда $W_0 \subseteq W_1 \subseteq \dots \subseteq W_\ell = W_{\ell+1} = W_{\ell+2} = \dots$ (далее W_ℓ искать ядра бессмысленно).

Сначала ищем W_1 . Как? Очень просто — решаем ОСЛУ $Bx = 0$: приводим к трапециевидной форме, находим базис B_1 пространства решений — именно он нам и нужен. Для этого проще всего подставить значение любой одной *главной переменной* (помните, что это такое? если нет, смотрите лекции), равное 1, а остальных главных переменных — равное 0, остальные переменные вычисляем. Для самоконтроля полезно понимать, что $|B_1| = \dim(W_1) = n - \text{rank}(B)$.

Далее ищем W_2 — решаем систему $B^2x = 0$ (кстати, матрицу B придется возвести в квадрат). Все решения из W_1 автоматом подходят. Нужно найти B_2 — дополнение B_1 до базиса W_2 . Систему решаем также, там появляются новые главные переменные, в них 1 и нужно подставлять, чтобы получить вектора из B_2 (разумеется, эти вектора неединственны!). Проверяем себя — общее количество векторов $|B_1| + |B_2| = \dim(W_2) = n - \text{rank}(B^2)$.

И так далее — ищем B_3, \dots, B_ℓ . Как понять, что дальше искать не нужно? Очень просто — когда мы получим очередное пространство W_ℓ с $\dim(W_\ell) = m$.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЛЕСТНИЦЫ.

Для этого вычисляем $r_i = \dim(W_i) - \dim(W_{i-1})$ и лестница готова — см. лекцию и картинку. На верхнем этаже лестницы расставляем вектора из B_ℓ . Далее заполняем лестницу — это подробно описано в презентации. На всякий случай — все вектора полученного базиса должны быть ЛНЗ (если это не так, Вы ошилились с выбором одного из векторов на каком-то шаге заполнения лестницы, нужно выбрать другой вектор).

3. ЖНФ и ЖОРДАНОВ БАЗИС.

Итак, все лестницы построены. Теперь берем лестницу для каждого числа и выписываем вектора каждого ее столбца снизу вверх. В ЖНФ на диагонали каждому столбцу лестницы для λ (скажем, высоты q) будет соответствовать блок в виде жордановой клетки $q \times q$ с λ на диагонали.

В ответе должна быть ЖНФ и правильный порядок векторов жорданова базиса (соответствующий выписанной ЖНФ). Однако, меня интересуют все шаги алгоритма, скажем базисы ядер W_i ! Не нужно использовать программы, считающие ЖНФ и Жорданов базис. Вы должны показать знание алгоритма. Калькулятор и даже компьютер для перемножения матриц использовать можно, хотя я выдам такие, что и в уме легко перемножаются, если знать, как это делается.

Каждый находит свое личное задание дальше, и решает именно его. Решения нужно высылать мне. С указанием фамилии и номера варианта.

УДАЧИ!

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 1

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Босенко Борис

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Бейгандт Владислав

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 3

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Веселов Фёдор

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 4

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Гаджиев Тимур

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 5

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Галов Алексей

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 6

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Головин Роман

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 7

7	0	0	0	0	0
1	7	0	0	0	0
0	-3	7	0	0	0
0	0	3	7	0	0
0	3	0	0	7	0
-2	1	0	-3	3	7

Головской Дмитрий

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 8

8	0	0	0	0	0
0	8	0	0	0	0
3	-1	8	0	0	0
1	0	-2	8	0	0
0	0	-1	4	8	0
0	0	4	-1	0	8

Горобец Олег

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 9

9	0	0	0	0	0
1	9	0	0	0	0
2	0	9	0	0	0
0	-3	-4	9	0	0
0	4	3	0	9	0
0	0		5	-2	9

Ежелев Георгий

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 10

-1	1	2	0	0	0
0	-1	4	-1	0	0
0	0	-1	0	-1	3
0	0	0	-1	3	-1
0	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	-1

Жгилев Иван

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 11

-2	0	0	3	0	2
0	-2	1	4	-1	0
0	0	-2	0	0	-2
0	0	0	-2	0	0
0	0	0	0	-2	3
0	0	0	0	0	-2

Зайцев Иван

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 12

2	1	2	0	0	3
0	2	0	2	8	0
0	0	2	-4	-1	0
0	0	0	2	2	0
0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	0	2

Зайцев Никита

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 13

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Затепакина Таисия

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 14

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Клеева Ульяна

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 15

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Крамарь Михаил

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 16

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Лазарев Виталий

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 17

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Лекомцев Максим

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 18

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Логинов Даниил

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 19

-9	2	0	-2	0	0
0	-9	4	1	0	-3
0	0	-9	1	3	0
0	0	0	-9	0	0
0	0	0	0	-9	0
0	0	0	0	0	-9

Логинова Дарья

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 20

-1	-2	3	0	0	0
0	-1	3	-2	0	0
0	0	-1	0	2	-1
0	0	0	-1	0	4
0	0	0	0	-1	-3
0	0	0	0	0	-1

Макаров Алексей

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 21

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	2	1	0	0	0
0	-3	0	1	0	0
2	0	0	3	1	0
1	0	-3	1	0	1

Машинников Алексей

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 22

2	0	0	0	0	0
0	2	0	0	0	0
3	3	2	0	0	0
0	-4	1	2	0	0
1	0	0	2	2	0
0	4	-1	0	1	2

Нестерович Елизавета

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 23

3	0	0	0	0	0
3	3	0	0	0	0
0	0	3	0	0	0
2	-1	3	3	0	0
0	3	-1	0	3	0
1	0	0	4	2	3

Пугин Сергей

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 24

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Семенова Елена

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 25

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -20 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Сивков Александр

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 26

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Сиромашенко Владислав

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 27

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Трифан Тимофей

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 28

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ушаков Роман

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 29

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Федоров Вадим

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 30

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Халкечев Дмитрий

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 31

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Шулай Роман

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 32

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Юрганова Мария

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 33

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ярков Сергей

Поиск ЖНФ матрицы и жорданова базиса

Вариант 34

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ортис В. С.Х.