Алгоритм построения Жордановой нормальной формы оператора и Жорданова базиса.

Будем считать, что мы имеем дело с линейными пространством над $\mathbb{C}$, чтобы характеристический многочлен нашего оператора раскладывался на линейные множители, и было выполнено условие тероемы о существовании ЖНФ.

Как мы обычно задаем линейный оператор φ? Квадратной матрицей A, только не очень хорошей.

Ниже по пунктам изложим алгоритм построения ЖНФ. В лекциях можно увидеть подробности.

0. Поиск собственных чисел.
Нужно посчитать $\chi_\varphi(t) = \det(A - tE)$ и найти его корни. Как это сделать? Ну, мы же умеем считать определитель!

Итак, теперь мы знаем $\mathrm{Spec}(\varphi)$ и кратности всех собственных чисел. Дальнейшие действия проводятся отдельно для каждого собственного числа.

Пусть $\lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)$ имеет кратность m. Далее мы покажем, что делать с числом λ.

1. Построение ядер W_i.
Пусть $\psi = \varphi - \lambda \mathrm{id}$, тогда его матрица $B = A - \lambda E_n$. Введем обозначения $W_0 = \{0\}$, $W_i = \ker(\psi^i)$ для $i \in \mathbb{N}$. Мы знаем что существует такое минимальное натуральное число ℓ, что $W_\ell = V(\lambda)$, тогда $W_0 \le W_1 \le \ldots \le W_\ell = W_{\ell+1} = W_{\ell+2} = \ldots$ (далее W_ℓ искать ядра бессмысленно).

Сначала ищем W_1. Как? Очень просто — решаем ОСЛУ $Bx = 0$: приводим к трапециевидной форме, находим базис B_1 пространства решений - именно он нам и нужен. Для этого проще всего подставить значение любой одной *главной переменной* (помните, что это такое? если нет, смотрите лекции), равное 1, а остальных главных переменных — равное 0, остальные переменные вычисляем. Для самоконтроля полезно понимать, что $|B_1| = \dim(W_1) = n - \mathrm{rank}(B)$.

Далее ищем W_2 — решаем систему $B^2x = 0$ (кстати, матрицу B придется возвести в квадрат). Все решения из B_1 автоматом подходят. Нужно найти B_2 — дополнение B_1 До базиса W_2. Систему решаем также, там появляются новые главные переменные, в них 1 и нужно подставлять, чтобы получить вектора из B_2 (разумеется, эти вектора неединственны!). Проверяем себя — общее количество векторов $|B_1| + |B_2| = \dim(W_2) = n - \mathrm{rank}(B^2)$.

И так далее – ищем $B_3, \ldots, B_\ell$. Как понять, что дальше искать не нужно? Очень просто — когда мы получим очередное пространство W_ℓ с $\dim(W_\ell) = m$.

2. Построение лестницы.
Для этого вычисляем $r_i = \dim(W_i) - \dim(W_{i-1})$ и лестница готова — см. лекцию и картинку. На верхнем этаже лестницы расставляем вектора из B_ℓ. Далее заполняем лестницу — это подробно описано в презентации. На всякий случай — все вектора полученного базиса должны быть ЛНЗ (если это не так, Вы ошились с выбором одного из векторов на каком-то шаге заполнения лестницы, нужно выбрать другой вектор).

3. ЖНФ и Жорданов базис.
Итак, все лестницы построены. Теперь берем лестницу для каждого числа и выписываем вектора каждого ее столбцы снизу вверх. В ЖНФ на диагонали каждому столбцу лестницы для λ (скажем, высоты q) будет соответствовать блок в виде жордановой клетки $q \times q$ с λ на диагонали.

В ответе должна быть ЖНФ и правильный порядок векторов жорданова базиса (соответствующий выписанной ЖНФ). Однако, меня интересуют все шаги алгоритма, скажем базисы ядер W_i! Не нужно использовать программы, считающие ЖНФ и Жорданов базис. Вы должны показать знание алгоритма. Калькулятор и даже копьютер для перемножения матриц использовать можно, хотя я выдам такие, что и в уме легко перемножаются, если знать, как это делается.

Каждый находит свое личное задание дальше, и решает именно его. Решения нужно высылать мне. С указанием фамилии и номера варианта.

УДАЧИ!