Теория графов. Глава 10. Экстремальные задачи теории графов.

Д. В. Карпов

10.12.2020

Теория Рамсея

• Всё началось с классической работы Рамсея (F. Ramsey) 1930 года, в которой было доказано, что в графе на достаточно большом количестве вершин без больших клик обязательно есть большое независимое множество вершин.

Числа Рамсея

• Основным объектом изучения в этом разделе будут полные графы, рёбра которых покрашены в несколько цветов. Напомним, что множество вершин, образующих полный подграф, а также сам этот подграф мы называем *кликой*.

Определение

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. *Число Рамсея* $r(m, n)$ — это наименьшее из всех таких чисел $x \in \mathbb{N}$, что при любой раскраске рёбер полного графа на x вершинах в два цвета обязательно найдётся клика на n вершинах с рёбрами цвета 1 или клика на m вершинах с рёбрами цвета 2.

• В 1930 году Рамсей доказал, что число $r(m,n)$ существует (то есть, конечно).

• Несмотря на современные вычислительные мощности, известно немного точных значений чисел Рамсея.

• Очевидно, $r(n,1) = r(1,n) = 1$, $\quad r(n,2) = r(2,n) = n$, $r(m,n) = r(n,m)$.

• Мы приведём оценки сверху и снизу на числа Рамсея. Начнём с простейших оценок сверху.

Теорема 1

(P. Erdös, G. Szekeres, 1935.) *Пусть $n, m \ge 2$ — натуральные числа. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) $\quad r(n,m) \le r(n,m-1) + r(n-1,m)$.

2) $\quad$ *Если оба числа $r(n,m-1)$ и $r(n-1,m)$ — чётные, то $r(n,m) \le r(n,m-1) + r(n-1,m) - 1$.*

• Из Теоремы 1 в частности следует, что число Рамсея $r(m,n)$ для любых натуральных m и n существует (то есть, конечно).

Доказательство. 1) • Рассмотрим клику на $r(n, m-1) + r(n-1, m)$ вершинах с рёбрами цветов 1 и 2 и ее произвольную вершину a. От вершины a отходит $r(n, m-1) + r(n-1, m) - 1$ рёбер цветов 1 и 2.

• Предположим, что от вершины a отходит хотя бы $r(n, m-1)$ рёбер цвета 2. Рассмотрим концы этих ребер. Среди них есть либо клика на n вершинах с рёбрами цвета 1, либо клика на $m-1$ вершинах с рёбрами цвета 2. В первом случае теорема доказана, а во втором случае случае добавим вершину a и получим клику на m вершинах с рёбрами цвета 2.

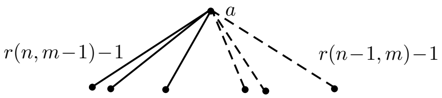
• Предположим, что от вершины a отходит не более $r(n, m-1) - 1$ рёбер цвета 2. Тогда a инцидентна хотя бы $r(n-1, m)$ рёбрам цвета 1. Аналогично получаем, что в графе есть искомая клика.

2) • Рассмотрим клику на $r(n, m-1) + r(n-1, m) - 1$ вершинах с рёбрами цветов 1 и 2 и её произвольную вершину a.

• Если вершине a инцидентны хотя бы $r(n, m-1)$ рёбер цвета 2 или хотя бы $r(n-1, m)$ рёбер цвета 1, то мы найдём в графе клику на n вершинах с рёбрами цвета 1 или клику на m вершинах с рёбрами цвета 2.

• Остаётся случай, когда вершине a инцидентны ровно $r(n, m-1) - 1$ рёбер цвета 2 и ровно $r(n-1, m) - 1$ рёбер цвета 1, то же самое для всех остальных вершин.

• Это означает, что в графе из рёбер цвета 2 всего $r(n, m-1) + r(n-1, m) - 1$ вершин и степень каждой вершины равна $r(n, m-1) - 1$. Однако, тогда в графе нечётное количество вершин нечётной степени. $\square$



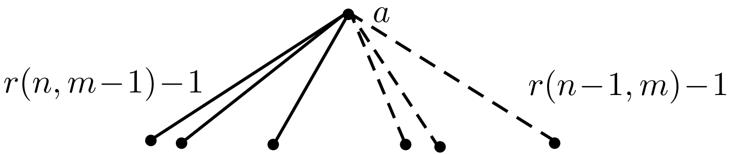
• Как это ни странно, с помощью неравенства из Теоремы 1 мы можем получить несколько точных значений чисел Рамсея.

• $r(3,3) \le 2r(2,3) = 6$.

• Так как числа $r(3,3)$ и $r(2,4)$ четны, $r(3,4) \le r(3,3) + r(2,4) - 1 \le 9$.

• $r(3,5) \le r(2,5) + r(3,4) \le 14$.

• $r(4,4) \le 2r(3,4) \le 18$. Все эти значения являются точными!



Теорема 2

(P. Erdös, 1947.) *Для любого натурального числа* $k \ge 2$ *выполняется неравенство* $r(k,k) \ge 2^{k/2}$.

Доказательство. • $r(2,2) = 2 \ge 2^{2/2}$. Далее $k \ge 3$.

• Зафиксируем множество различных помеченных вершин $v_1, \dots, v_n$. Пусть $g(n,k)$ — доля среди всех графов на вершинах $v_1, \dots, v_n$ тех графов, что содержат клику на k вершинах.

• Всего графов на наших вершинах, очевидно, $2^{\mathrm{C}_n^2}$ (каждое из возможных $\mathrm{C}_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ рёбер можно провести или не провести).

• Посчитаем графы с кликой на k вершинах так: существует

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} < \frac{n^k}{k!}$$

способов выбрать k вершин для клики в нашем множестве, после чего все рёбра между ними будем считать проведёнными, а остальные рёбра выбираются произвольным образом.

• Таким образом, каждый граф с кликой на k вершинах будет посчитан, причём некоторые даже более одного раза. Количество графов с кликой размера k оказывается не более, чем $\mathrm{C}_n^k \cdot 2^{\mathrm{C}_n^2-\mathrm{C}_k^2}$. Следовательно,

$$g(n,k) \le \frac{\mathrm{C}_n^k \cdot 2^{\mathrm{C}_n^2-\mathrm{C}_k^2}}{2^{\mathrm{C}_n^2}} = \frac{\mathrm{C}_n^k}{2^{\mathrm{C}_k^2}} < \frac{n^k}{k! \cdot 2^{\mathrm{C}_k^2}}. \qquad (1)$$

• Подставив $n < 2^{k/2}$ в неравенство (1), мы получаем

$$g(n,k) < \frac{2^{k^2/2} \cdot 2^{-\mathrm{C}_k^2}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2} \quad \text{при } k \ge 3.$$

• Предположим, что $r(k,k) = n < 2^{k/2}$ и разобьём все графы на n вершинах на пары $G, \overline{G}$ (граф и его дополнение).

• Так как $g(n,k) < \frac{1}{2}$, то существует пара, в которой ни G, ни $\overline{G}$ не содержат клики на k вершинах. Рассмотрим раскраску рёбер K_n в два цвета, в которой рёбра цвета 1 образуют граф G. В такой раскраске нет клики на k вершинах ни цвета 1, ни цвета 2, противоречие.

• Следовательно, $r(k,k) \ge 2^{k/2}$. $\square$

Следствие 1

Для любых $k, m \in \mathbb{N}$ *таких, что* $2 \le k \le m$, *выполняется неравенство* $r(k, m) \ge 2^{k/2}$.

• Удивительно, но на настоящий момент не известно ни более точной оценки на $r(k, k)$, чем в Теореме 2, ни более точной оценки на$r(k, m)$, чем в Следствии 1.

Числа Рамсея для раскрасок в несколько цветов

• Естественным обобщением классических чисел Рамсея является случай, когда рёбра полного графа красятся не в два, а в произвольное число цветов.

Определение

Пусть $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. *Число Рамсея* $r(k; n_1, \ldots, n_k)$ — это наименьшее из всех таких чисел $x \in \mathbb{N}$, что при любой раскраске рёбер полного графа на x вершинах в k цветов для некоторого $i \in [1..k]$ обязательно найдётся клика на n_i вершинах с рёбрами цвета i.

• Отметим, что $r(2; n, m)$ — это определённое ранее число Рамсея $r(n, m)$.

Теорема 3

(P. Erdös, G. Szekeres, 1935.) *Пусть* $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$ *— натуральные числа. Тогда*

$$r(k; n_1, \dots, n_k) \leq r(k; n_1-1, n_2, \dots, n_k)+r(k; n_1, n_2-1, \dots, n_k)+ \cdots + r(k; n_1, n_2, \dots, n_k - 1) - k + 2.$$

Доказательство. • Рассмотрим клику на $p = r(k; n_1 - 1, n_2, \dots, n_k) + r(k; n_1, n_2 - 1, \dots, n_k) + \cdots + r(k; n_1, n_2, \dots, n_k - 1) - k + 2$ вершинах с рёбрами цветов 1, ..., k и ее произвольную вершину a. От вершины a отходит $p - 1$ рёбер цветов 1,... k.

• Мы хотим доказать, что существует такое $j \in \{1, \dots, k\}$, для которого найдется клика на n_j вершинах с рёбрами цвета j.

• Предположим, что от вершины a отходит хотя бы $r(k; n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_k)$ рёбер цвета i. Рассмотрим концы этих ребер. Среди них есть либо клика на n_s вершинах с рёбрами цвета $s \neq i$, либо клика на $n_i - 1$ вершинах с рёбрами цвета i. В последнем случае добавим вершину a и получим клику на m вершинах с рёбрами цвета 2.

• Остается случай, когда для каждого i вершине a инцидентно не более $r(k; n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_k) - 1$ рёбер цвета i. Тогда a инцидентна не более чем $r(k; n_1 - 1, n_2, \dots, n_k) - 1 + r(k; n_1, n_2 - 1, \dots, n_k) - 1 + \dots + r(k; n_1, n_2, \dots, n_k - 1) - 1 = p - 2$ рёбрам, противоречие. $\square$

Числа Рамсея больших размерностей

• Результат этого раздела не относится к классической теории графов, но тесно с ней связан. Даже формулировать определения и результаты мы будем не на языке графов.

Определение

Пусть $m, k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, причём $n_1, \dots, n_k \geq m$. *Число Рамсея* $r_m(k; n_1, \dots, n_k)$ — это наименьшее из всех таких чисел $x \in \mathbb{N}$, что при любой раскраске m-элементных подмножеств x-элементного множества M в k цветов для некоторого $i \in [1..k]$ обязательно найдётся такое множество W_i, что $|W_i| = n_i$ и все m-элементные подмножества множества W_i имеют цвет i.
Число m называется *размерностью* числа Рамсея $r_m(k; n_1, \dots, n_k)$.

• Нетрудно понять, что числа Рамсея размерности 2 — это определённые выше числа Рамсея для клик.

• При количестве цветов, равном 2, этот параметр мы будем опускать и писать $r_m(n_1, n_2)$ вместо $r_m(2; n_1, n_2)$.

• Для каждого множества M через M^k мы будем обозначать множество всех k-элементных подмножеств M.

Теорема 4

(F. Ramsey, 1930.) *Пусть $m, k, n_1, \dots, n_k$ — натуральные числа, причём $k \ge 2$, а $n_1, \dots, n_k \ge m$. Тогда число Рамсея $r_m(k; n_1, \dots, n_k)$ существует (то есть, конечно).*

Доказательство. **1.** • Мы будем доказывать теорему по индукции. Начнем со случая $k = 2$. Приступая к доказательству для числа $r_m(n_1, n_2)$ мы будем считать доказанным утверждение теоремы для чисел Рамсея всех меньших размерностей и чисел Рамсея размерности m с меньшей суммой $n_1 + n_2$. В качестве базы будем использовать случай чисел Рамсея размерности 2, разобранный в Теореме 1.

• Мы докажем, что

$$r_m(n_1, n_2) - 1 \le p = r_{m-1}(r_m(n_1 - 1, n_2), r_m(n_1, n_2 - 1)).$$

• Рассмотрим $(p+1)$-элементное множество M и выделим в нём элемент a.

• Пусть $M_0 = M \setminus \{a\}$, а $\rho : M^m \to \{1,2\}$ — произвольная раскраска в два цвета. Определим раскраску $\rho' : M_0^{m-1} \to \{1,2\}$: для каждого множества $B \in M_0^{m-1}$ положим $\rho'(B) := \rho(B \cup \{a\})$.

• Так как $|M_0| = p = r_{m-1}(r_m(n_1-1,n_2), r_m(n_1,n_2-1))$, либо существует $r_m(n_1-1,n_2)$-элементное подмножество $M_1 \subset M_0$, для которого $\rho'(B) = 1$ на всех $B \in M_1^{m-1}$, либо существует $r_m(n_1,n_2-1)$-элементное подмножество $M_2 \subset M_0$, для которого $\rho'(B) = 2$ на всех $B \in M_2^{m-1}$. Случаи аналогичны, рассмотрим первый случай и множество M_1.

• По индукционному предположению из $|M_1| = r_m(n_1 - 1, n_2)$ следует, что либо существует $n_1 - 1$ элементное подмножество $N_1 \subset M_1$, для которого $\rho(A) = 1$ на всех $A \in N_1^m$, либо существует n_2-элементное подмножество $N_2 \subset M_1$, для которого $\rho(A) = 2$ на всех $A \in N_2^m$.

• Во втором случае искомое подмножество найдено (это N_2),

• Рассмотрим первый случай и множество $N = N_1 \cup \{a\}$. Пусть $A \in N^m$. Если $A \not\ni a$, то $A \in N_1^m$ и, следовательно, $\rho(A) = 1$. Если же $A \ni a$, то множество $A \setminus \{a\} \in N_1^{m-1} \subset M_1^{m-1}$ и потому $\rho(A) = \rho'(A \setminus \{a\}) = 1$. Учитывая, что $|N| = n_1$, мы нашли искомое подмножество и в этом случае.

2. • При $k > 2$ будем вести индукцию по k с доказанной выше базой $k = 2$.

• Докажем неравенство

$$r_m(k; n_1, \dots, n_k) \le q = r_m(r_m(k-1; n_1, \dots, n_{k-1}), n_k).$$

• Рассмотрим множество M на q вершинах и произвольную раскраску $\rho : M^m \to [1..k]$ в k цветов.

• Рассмотрим раскраску $\rho' : M^m \to \{0, k\}$, в которой цвета $1, \dots, k-1$ раскраски ρ склеены в цвет 0.

• Тогда существует либо такое подмножество $M_0 \subset M$, что $|M_0| = r_m(k-1; n_1, \dots, n_{k-1})$ и $\rho'(A) = 0$ на всех $A \in M_0^m$, либо существует такое n_k-элементное подмножество $M_k \subset M$, что $\rho(A) = \rho'(A) = k$ на всех $A \in M_k^m$.

• Во втором случае M_k — искомое подмножество, а в первом случае заметим, что на любом подмножестве $A \in M_0^m$ из $\rho'(A) = 0$ следует $\rho(A) \in [1..k-1]$. Исходя из размера множества M_0, по индукционному предположению получаем, что найдётся искомое подмножество множества M для одного из цветов $1, \dots, k-1$. □

Задача о выпуклом многоугольнике

- Для любого $m \geq 3$ мы докажем, что если взять на плоскости очень много точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой), среди них найдется m, образующих выпуклый m-угольник.
- *Выпуклая оболочка* k точек — минимальный по включению выпуклый многоугольник, все их содержащий. Известно, что вершины выпуклой оболочки — всегда некоторые из наших точек.
- Если все k точек являются вершинами своей выпуклой оболочки, то они образуют выпуклый k-угольник.

Лемма 1

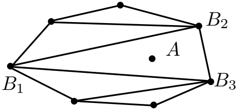
На плоскости дано множество M из k точек общего положения на плоскости таких, что любой 4-угольник с вершинами в 4 из этих точек выпуклый. Тогда точки из M образуют выпуклый k-угольник.

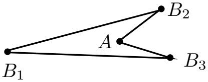
Доказательство. • Предположим противное и рассмотрим выпуклую оболочку точек множества M, тогда в ней $s < k$ вершин.

• Триангулируем этот s-угольник диагоналями и рассмотрим точку $A \in M$, не являющуюся вершиной M.

• Точка A попала внутрь одного из треугольников триангуляции — скажем, в $B_1B_2B_3$ (см. рисунок). Тогда $B_1B_2AB_3$ — невыпуклый четырёхугольник, противоречие.

$\square$





Лемма 2

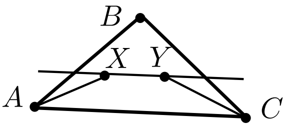
Из любых 5 точек общего положения на плоскости можно выбрать 4, образующие выпуклый 4-угольник.

Доказательство. • Рассмотрим выпуклую оболочку наших 5 точек. Если это 4- или 5-угольник, Лемма доказана.

• Пусть выпуклая оболочка — треугольник ABC. Внутри него расположены еще оставшиеся точки — скажем, X и Y.

• Прямая XY не может проходить через вершину треугольника ABC (точки в общем положении), а значит, XY пересекает две стороны треугольника — скажем, AB и BC (см. рисунок).

• Тогда 4-угольник $AXYC$ — выпуклый. □



Теорема 5

Для любого $m \geq 3$ существует такое $k_m \in \mathbb{N}$, что среди любых k_m точек общего положения на плоскости есть m, образующих выпуклый m-угольник.

Доказательство. • Пусть $k_m = r_4(m, 5)$.

• Рассмотрим любые k_m точек общего положения на плоскости и покрасим четверки этих точек в цвет 1, если они образуют выпуклый 4-угольник, и в цвет 2 — если невыпуклый.

• Тогда найдутся либо m точек, все четверки среди которых цвета 1, либо 5 точек, все четверки среди которых цвета 2.

• В первом случае по Лемме 1 мы нашли m точек, образующих выпуклый m-угольник.

• Второй случай невозможен по Лемме 2. □

Теорема 6

(I. Schur, 1917.) *Пусть $n \in \mathbb{N}$, а натуральные числа от 1 до n покрашены в k цветов. Тогда при любом достаточно большом n найдется одноцветное решение уравнения $x + y = z$ в числах $\{1, \cdots n\}$.*

Доказательство. • Пусть $n \geq r(k; 3, \dots, 3)$ (здесь k троек).

• Соединим каждые два числа $s, t \in \{1, \cdots n\}$ ребром, покрашенным в цвет $|s - t|$.

• Тогда найдется треугольник с одноцветными рёбрами — скажем, из чисел $a > b > c$.

• Это означает, что $a - b$, $b - c$, $a - c$ — одноцветное решение уравнения $x + y = z$, так как $(a - b) + (b - c) = a - c$. □

Числа Рамсея для произвольных графов

• Ещё один способ обобщения классической теории Рамсея — замена клик на произвольные графы-шаблоны.

Определение

Пусть H_1, H_2 — два данных графа. Число Рамсея $r(H_1, H_2)$ — это наименьшее из всех таких чисел $x \in \mathbb{N}$, что при любой раскраске рёбер полного графа на x вершинах в два цвета обязательно найдётся подграф с рёбрами цвета 1, изоморфный H_1, или подграф с рёбрами цвета 2, изоморфный H_2.

• Из результатов классической теории Рамсея понятно, что числа $r(H_1, H_2)$ обязательно существуют (то есть, конечны). Интересно, что иногда их можно точно вычислить.

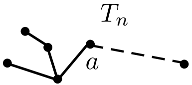
Лемма 3

Пусть $m > 1$, а граф H таков, что $v(H) \geq (m-1)(n-1)+1$ и $\alpha(H) \leq m-1$. Тогда граф H содержит в качестве подграфа любое дерево на n вершинах.

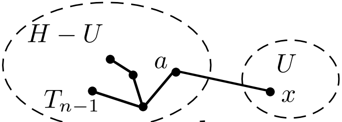
Доказательство. • Зафиксируем m и проведём индукцию по n. База для $n = 1$ очевидна.

Индукционный переход $n-1 \to n$ $(n > 1)$. • Рассмотрим произвольное дерево T_n на n вершинах, пусть дерево T_{n-1} получено из T_n удалением висячей вершины (см. рис. a).

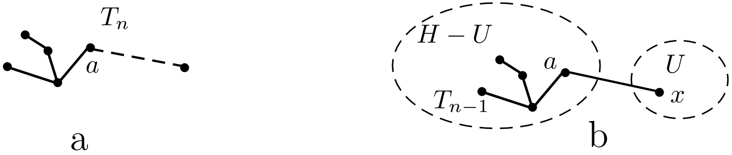
• Пусть U — максимальное независимое множество вершин графа H. Тогда $|U| = \alpha(H) \leq m-1$, следовательно, $v(H-U) \geq (m-1)(n-2)+1$ и, очевидно, $\alpha(H-U) \leq m-1$.



a



b



• По индукционному предположению граф $H-U$ содержит в качестве подграфа дерево T_{n-1}. Пусть a — вершина этого дерева, присоединив к которой висячую вершину, мы получим дерево T_n.

• Заметим, что множество $U \cup \{a\}$ не является независимым ввиду максимальности U, следовательно, вершина a смежна хотя бы с одной вершиной $x \in U$.

• Так как $x \notin V(T_{n-1})$, можно присоединить вершину x к вершине a дерева T_{n-1}. В результате мы получим дерево T_n в качестве подграфа графа H. $\square$

Теорема 7

(V. Chvatal, 1977.) *Пусть T_n — дерево на n вершинах. Тогда $r(T_n, K_m) = (m-1)(n-1)+1$.*

Доказательство. **1.** • Докажем, что $r(T_n, K_m) \geq (m-1)(n-1)+1$.

• Для этого предъявим раскраску рёбер графа $K_{(m-1)(n-1)}$, в которой нет ни одного связного подграфа на n вершинах с рёбрами цвета 1 и нет клики на m вершинах с рёбрами цвета 2. Разобьём вершины графа на $m-1$ клику по $n-1$ вершине и покрасим все рёбра этих клик в цвет 1, а остальные рёбра — в цвет 2.

• Тогда любой связный подграф с рёбрами цвета 1 содержит не более $n-1$ вершины, в частности, нет подграфа с рёбрами цвета 1, изоморфного T_n. Рёбра цвета 2 (то есть, все оставшиеся рёбра) образуют $(m-1)$-дольный граф, в котором, очевидно, нет клики на m вершинах.

2. • Рассмотрим произвольную раскраску рёбер полного графа $K_{(m-1)(n-1)+1}$ в два цвета и его остовный подграф G_1 с рёбрами первого цвета.

• Предположим, что не существует клики на m вершинах с рёбрами цвета 2. Тогда $m > 1$ и $\alpha(G_1) \le m - 1$. По Лемме 3 граф G_1 содержит в качестве подграфа любое дерево на n вершинах, в частности, дерево, изоморфное T_n. $\square$

Наследственное свойство

Определение

• Назовем свойство P графа *наследственным*, если для любого графа G, удовлетворяющего свойству P, любой индуцированный подграф H графа G также удовлетворяет свойству P.

• Обозначим через $P(n)$ наибольшее возможное количество рёбер в графе на n вершинах, удовлетворяющем свойству P.

• Наследственных свойств довольно много. Например, свойства “граф не содержит подграфа, изоморфного данному” или “хроматическое число графа не превосходит k” являются наследственными.

Теорема 8

Пусть P — наследственное свойство графов и $n \geq 3$. Тогда $P(n) \leq \frac{n}{n-2}P(n-1)$.

Доказательство. • Рассмотрим удовлетворяющий свойству P граф G на n вершинах с $e(G) = P(n)$. Пусть $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$.

• Так как граф $G_i = G - v_i$ — индуцированный подграф G — также удовлетворяет свойству P, мы имеем неравенство $e(G) - d_G(v_i) = e(G_i) \leq P(n-1)$.

• Сложив такие неравенства для всех $i \in [1..n]$, мы получим

$$(n-2)P(n) = (n-2)e(G) = ne(G) - \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) \leq n \cdot P(n-1),$$

откуда немедленно следует утверждение теоремы. □

Задача о запрещенном подграфе

Определение. Пусть H — некоторый фиксированный граф. Через $\mathrm{ex}(v, H)$ мы обозначим наибольшее возможное количество рёбер в графе на v вершинах, не содержащем подграфа, изоморфного H.

- Мы рассмотрим самый простой случай задачи о запрещенном подграфе — это задача о максимальном числе рёбер в графе без полного подграфа K_n.
- *$(n-1)$-дольный граф* — это граф, вершины которого разбиты на $n-1$ *долю* так, что внутри долей нет ребер.
- *Полный $(n-1)$-дольный граф* имеет все рёбра между долями.
- Очевидно, полный s-дольный граф при $s \geq n$ содержит K_n, а при $s \leq n-1$ не содержит K_n.
- Пусть $v = q(n-1) + r$, где r — остаток от деления v на $n-1$. Обозначим через $T_{v,n}$ полный $(n-1)$-дольный граф на v вершинах с r долями размера $q+1$ и $n-1-r$ долями размера q.

Лемма 4

Среди всех s-дольных графов на n вершинах, где $s \le n-1$, наибольшее число ребер имеет $T_{v,n}$

Доказательство. • Пусть H — подходящий под условие граф с максимальным числом ребер. Понятно, что он является полным s-дольным для некоторого $s \le n-1$.

• Можно считать H полным $(n-1)$-дольным графом с долями размеров $k_1, \dots, k_{n-1}$ (при $s < n-1$ добавим доли размера 0), где $k_1 + \dots + k_{n-1} = v$.

• Количество ребер полного графа на v вершинах равно $\mathrm{C}_v^2 = \frac{v(v-1)}{2}$, а количество рёбер полного графа на k_i вершинах равно $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$.

• Следовательно,

$$e(H) = \frac{v(v-1)}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i(k_i-1)}{2} =$$

$$\frac{v(v-1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i^2}{2}.$$

• Значит, $e(H)$ максимально, когда $\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2$ минимально.

• При $\sum_{i=1}^{n-1} k_i = v$ минимум суммы квадратов достигается на "почти равных" $k_1, \dots, k_{n-1}$ — случае графа $T_{v,n}$

• В самом деле, пусть для $k_1, \dots, k_{n-1}$ сумма их квадратов минимальна. Рассмотрим наибольшее и наименьшее числа — скажем, k_i и k_j. Если $k_i - k_j \geq 2$, то $k_i^2 + k_j^2 > (k_i - 1)^2 + (k_j + 1)^2$, что противоречит выбору $k_1, \dots, k_{n-1}$.

• Значит, при минимальной $\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2$ минимум и максимум из чисел $k_1, \dots, k_{n-1}$ отличаются не более чем на 1. Так как они целые числа, то при $v = q(n-1) + r$, где r — остаток от деления v на $n-1$ это как раз r чисел $q+1$ и $n-1-r$ чисел q. Это случай графа $T_{v,n}$. $\square$

• Количество ребер графа $T_{v,n}$ Нетрудно подсчитать:

$$e(T_{v,n}) = \frac{(n-2)(v^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2},$$

где r — остаток от деления v на $n-1$.

Теорема 9

(P. Turán, 1941.) *При* $n \geq 3$

$$ex(v, K_n) = e(T_{v,n}) = \frac{(n-2)(v^2 - r^2)}{2(n-1)} + \frac{r(r-1)}{2},$$

где r *— остаток от деления* v *на* $n-1$*.*

Доказательство. • Пусть H — граф без K_n на v вершинах.

• Для $a, b \in V(H)$ будем писать $a \sim b$, если $\mathrm{N}_H(a) = \mathrm{N}_H(b)$.

• Если $a \sim b$, то очевидно, что a и b несмежны. Следовательно, a и b не могут входить в одну клику K_n.

• Понятно, что $a \sim b$ — отношение эквивалентности. Значит, $V(H)$ разбито на классы эквивалентности по $\sim$.

• Пусть $a \not\sim b$ и эти вершины несмежны. НУО $d_H(a) \geq d_H(b)$. Тогда заменим весь класс эквивалентности вершины b на вершины, эквивалентные a. Количество ребер не уменьшится, но станет меньше классов эквивалентности. Так как эквивалентные вершины не могут входить вместе в K_n, в полученном графе также нет K_n.

• Будем выполнять такие операции, пока это возможно. Процесс конечен (уменьшается число классов эквивалентности), значит, он закончится, и в результате получится граф G без K_n, в котором $e(G) \geq e(H)$ и любые две неэквивалентные вершины смежны.

• Пусть в G ровно s классов эквивалентности. Тогда G — Полный s-дольный граф, в котором доли — именно эти классы. Так как G не содержит K_n, $s \leq n - 1$.

• По Лемме 4 мы имеем $e(G) \leq e(T_{v,n})$. □

• В 1970 году Эрдеш доказал, что $T_{v,n}$ — единственный граф на v вершинах без K_n, на котором достигается минимум числа рёбер.