Теория графов. Глава 1. Основные понятия.

Д. В. Карпов

2022

Граф. Вершины и рёбра

- Пусть G — *граф*. Что это такое в нашем понимании?
- $G = (V(G), E(G))$, где $V(G)$ — *множество вершин* графа G, а $E(G)$ — *множество ребер* графа G.
- В нашем курсе рассматриваются только конечные графы, множества вершин и рёбер всегда конечны.
- Количество вершин графа G мы будем обозначать через $v(G)$, а количество ребер — через $e(G)$.
- Если не упоминается обратное, граф считается неориентированным, тогда каждое его ребро имеет два *конца*, порядок которых не имеет значения.
- Ребро e называется *петлёй*, если начало и конец e совпадают.
- Рёбра e и e' называются *кратными*, если множества их концов совпадают.

Вершины и рёбра. Смежность и инцидентность.

• Запись $e = xy$ будет обозначать, что вершины x и y — концы ребра e.

• В случае, когда граф не имеет кратных рёбер, концы ребра его однозначно задают. Если же кратные рёбра допустимы, возможны несколько рёбер с концами x и y и запись $e = xy$ допускает наличие другого ребра $e' = xy$.

• Как правило, мы будем рассматривать графы без петель и кратных рёбер. В случаях, когда кратные рёбра или петли допускаются, об этом будет сказано.

• Про концы ребра $e = xy$ — вершины x и y — мы будем говорить, что они *соединены ребром e*.

• Соединённые ребром вершины мы будем называть *смежными*. Кроме того, мы будем называть *смежными* рёбра, имеющие общий конец. Если вершина x — конец ребра e, то мы будем говорить, что x и e *инцидентны*.

Окрестность и степень вершины.

Определение

Для любой вершины $v \in V(G)$ через $\mathrm{N}_G(v)$ мы будем обозначать *окрестность* вершины v — множество всех вершин графа G, смежных с v.

Определение

1) Для вершины $x \in V(G)$ через $d_G(x)$ обозначим *степень* вершины x в графе G, то есть, количество рёбер графа G, инцидентных x.

2) *Минимальную степень* вершины графа G обозначим через $\delta(G)$, а *максимальную степень* вершины графа G — через $\Delta(G)$.

Лемма 1

1) *Сумма степеней всех вершин графа G равна $2e(G)$.*

2) *Количество вершин нечетной степени в любом графе четно.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно следует из того, что любое ребро имеет ровно два конца, а второе — из первого.

Подграфы

Определение

1) Граф H является *подграфом* графа G, если $V(H) \subset V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$.

2) Подграф H графа G — *остовный*, если $V(H) = V(G)$.

3) Пусть $U \subset V(G)$. Через $G(U)$ мы обозначим *индуцированный подграф* на множестве вершин U. Это означает, что $V(G(U)) = U$, а $E(G(U))$ состоит из всех рёбер множества $E(G)$, оба конца которых лежат в U.

4) Пусть $F \subset E(G)$. Через $G(F)$ мы обозначим *индуцированный подграф* на множестве рёбер F. Это значит, что $E(G(F)) = F$, а $V(G(F))$ состоит из всех вершин множества $V(G)$, инцидентных хотя бы одному ребру из F.

5) *Собственный подграф* графа G — это подграф, отличный от G.

• В дальнейшем, говоря "*индуцированный подграф графа G*", мы всегда будем подразумевать подграф, индуцированный на некотором множестве вершин $U \subseteq V(G)$.

Некоторые операции над графами

Определение

Пусть G_1 и G_2 — два графа. Тогда их *объединение* $G_1 \cup G_2$ — это граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством рёбер $E(G_1) \cup E(G_2)$.

Определение

1) Для любого множества $R \subset E(G) \cup V(G)$ обозначим через $G - R$ граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер множества R, а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R.
Для $x \in E(G) \cup V(G)$ положим $G - x = G - \{x\}$.

2) Пусть e — ребро, соединяющее пару вершин из $V(G)$, не обязательно входящее в $E(G)$. Если $e \notin E(G)$, то через $G + e$ мы будем обозначать граф, полученный из G в результате добавления ребра e (то есть, $G + e = (V(G), E(G) \cup \{e\})$). Если $e \in E(G)$, то $G + e = G$.

Операция стягивания ребра

• В большинстве глав мы имеем дело с графами без петель и кратных рёбер и эту операцию удобно определить следующим образом.

Определение

Для ребра $e \in E(G)$ через $G \cdot e$ мы обозначим граф, полученный в результате *стягивания* ребра $e = xy$. Это означает, что граф $G \cdot e$ получается из графа $G - x - y$ добавлением новой вершины w, которая будет смежна в графе $G \cdot e$ со всеми вершинами графа G, смежными в G хотя бы с одной из вершин x и y. Мы будем применять обозначение $w = x \cdot y$.

• В результате описанной операции концы x и y ребра e стягиваются в новую вершину w. При определенном таким образом стягивании ребра не возникают ни петли, ни кратные рёбра.

Маршрут

Определение

1) Последовательность вершин $a_1a_2\dots a_n$ и рёбер $e_1,\dots,e_{n-1}$ графа G, где $e_i=a_ia_{i+1}$ для всех $i\in[1..n-1]$, называется *маршрутом*.
2) Мы будем говорить, что определенный выше маршрут *проходит* по рёбрам $e_1,\dots,e_{n-1}$ и по вершинам $a_1,a_2,\dots,a_n$.
3) Маршрут называется *замкнутым*, если $a_1=a_n$.

• Отметим, что вершины маршрута *не обязательно различны*. Более того, рёбра, по которым проходит маршрут, *не обязательно различны*.

Путь

Определение

1) *Путь* — это маршрут $a_1a_2\dots a_n$, не проходящий ни по какому ребру дважды. Кроме того, мы будем говорить, что *путь* — это подграф графа G, состоящий из вершин и рёбер, по которым этот путь проходит.

2) Вершину a_1 назовём *началом*, а вершину a_n — *концом* пути.

3) Путь называется *простым*, если все вершины $a_1, \dots, a_n$ различны.

4) *Длина* пути — это количество его рёбер.

5) Если граф P — простой путь, то его *внутренность* $\mathrm{Int}(P)$ — это множество всех его вершин, отличных от начала и конца этого пути. Вершины из $\mathrm{Int}(P)$ называются *внутренними* вершинами пути P.

• Путь у нас — это одновременно последовательность вершин, в которой все пары соседних вершин соединены ребрами, а также подграф из этих вершин и рёбер. Эта двусмысленность в дальнейшем нисколько не помешает.

xy-путь. Расстояние

• Строго говоря, путь — неориентированный граф. Но при работе с путями удобно вводить направление прохода по пути, отличать начало и конец пути друг от друга. При замене направления на противоположное путь как граф не изменяется.

• Говоря "путь от x до y" мы будем подразумевать простой путь с началом x и концом y.

Определение

1) Пусть $x, y \in V(G)$. Назовем *xy-путем* любой простой путь от x до y.
2) Пусть $X, Y \subset V(G)$. Назовем *XY-путем* любой простой путь с началом в множестве X и концом в множестве Y, внутренние вершины которого не принадлежат множествам X и Y.
3) *Расстоянием* между вершинами x и y графа G называется длина наименьшего xy-пути. Обозначение: $\mathrm{dist}_G(x, y)$.

Участки путей

• Как правило, мы будем подразумевать, что рассматриваемый путь — простой, и задавать его как последовательность вершин: $a_1 a_2 \dots a_n$.

Определение

1) Если P — это путь, а $x, y \in V(P)$, мы будем через xPy обозначать участок пути P от вершины x до вершины y.
2) Через xP и Py мы будет обозначать участки пути P от x до конца и от начала до y, сооответственно.

• Мы будем использовать введенные выше обозначения и для стыковки разных путей: так, например, $xPyQz$ — это путь, проходящий сначала участок пути P от x до y, а затем участок пути Q от y до z.

• Как правило, мы для удобства фиксируем направление прохода пути P. На участке xPy это направление задано порядком вершин x и y и может отличаться от заданного ранее направления прохода пути P.

Цикл

Определение

1) *Цикл* — это последовательность вершин $a_1a_2\dots a_n$ и различных рёбер $e_1,\dots,e_n$ графа G, где $e_i = a_ia_{i+1}$ для всех $i \in [1..n]$ (мы считаем, что $a_{n+i} = a_i$).
2) Мы будем говорить, что определенный выше цикл *проходит* по рёбрам $e_1,\dots,e_n$ и по вершинам $a_1, a_2, \dots, a_n$.
3) Кроме того, мы будем говорить, что цикл — это подграф графа G, состоящий из вершин и рёбер, по которым этот цикл проходит.
4) Цикл называется *простым*, если все вершины $a_1,\dots,a_n$ различны.
5) *Длина* цикла — это количество его рёбер.

• Как и в ситуации с путём, цикл — это одновременно последовательность вершин и подграф. Мы будем считать, что цикл не изменяется при циклической перестановке его вершин и при изменении их порядка на противоположный.

Дуги и хорды

Определение

Пусть C — простой цикл, а x, y — две его несоседние вершины.
1) Вершины x и y делят цикл C на два пути с концами x и y, которые мы будем называть *дугами*.
2) Если $xy \in E(G)$, назовем ребро xy *хордой* или (что то же самое) *диагональю* цикла C.

• Как правило, для удобства задано направление обхода цикла. В этом случае для обозначения дуги цикла C с началом x и концом y (то есть, от x до y по направлению обхода цикла) мы также будем применять обозначение xCy.

Определение

Индуцированный цикл графа G — это простой цикл, не имеющий диагоналей.

• индуцированные циклы графа — это как раз те циклы, что являются его индуцированными подграфами.

Лемма 2

1) *Для любого цикла Z существует такой простой цикл Z', что $V(Z') \subset V(Z)$ и $E(Z') \subset E(Z)$.*
2) *Если в графе есть нечетный цикл, то есть и простой нечетный цикл.*
3) *Из xy-пути можно выделить простой xy-путь.*

Доказательство.

1) Найдем первую повторившуюся вершину b (если она есть). Участок между двумя посещениями b — искомый ПЦ.
2) Найдем первую повторившуюся вершину b (если она есть). Изменим порядок обхода нашего большого цикла Z в вершине b: разомкнем его на простой цикл Z' (как в пункте 1) и цикл Z_1 из оставшихся рёбер цикла Z. Эти циклы имеют общую вершину v и $e(Z) = e(Z_1) + e(Z')$, а значит, либо $e(Z')$ нечетно (тогда цикл Z' — искомый), либо $e(Z_1)$ нечетно, тогда продолжим рассуждения с меньшим нечетным циклом Z_1.
3) Аналогично.

Лемма 3

1) *в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$.*

2) *Если $\delta(G) \ge 2$, то в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G) + 1$.*

Доказательство.

1) Рассмотрим путь максимальной длины $P = a_1 a_2 \dots a_n$ в нашем графе G. Из его последней вершины a_n выходит хотя бы $\delta(G) - 1$ ребер в вершины, отличные от a_{n-1}. Так как путь P нельзя продлить, вершина a_n смежна только с вершинами пути P. Следовательно, $n - 1 \ge \delta(G) - 1$.

2) Пусть a_m — вершина наименьшего номера, смежная с a_n. Тогда в множестве $\{a_m, \dots, a_{n-1}\}$ лежат не менее $d_G(a_n) \ge \delta(G) \ge 2$ концов выходящих из a_n ребер. Следовательно $a_m \ne a_{n-1}$ и мы получаем цикл $a_m \dots a_{n-1} a_n$, в котором не менее $\delta(G) + 1$ вершин. □

Компоненты связности

Определение

1) Вершины a и b графа G называются *связанными*, если в графе существует путь между ними.
2) Граф называется *связным*, если любые две его вершины связаны.
3) Множество $U \subset V(G)$ называется *связным*, если граф $G(U)$ связен.
4) *Компоненты связности* графа G — максимальные (по включению) связные множества вершин. Через $c(G)$ обозначим их количество.
5) Будем называть *компонентами* графа G подграфы, индуцированные на его компонентах связности.

• Две различные компоненты связности графа не могут пересекаться, так как иначе все вершины их объединения попарно связаны, а значит, содержатся в одной компоненте связности.

• Множество вершин графа разбито на компоненты связности.

Дерево

Определение

1) *Дерево* — это связный граф без циклов.
2) *Лес* — это граф без циклов.
3) Вершина x графа G, имеющая степень 1, называется *висячей вершиной* или *листом*.

• Все компоненты леса — это деревья. Таким образом, лес, как и положено, состоит из нескольких деревьев.

• Название "лист" для вершины степени 1 применяют, как правило, только в случае, когда граф — дерево.

Лемма 4

1) *В дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребро.*
2) *У любого связного графа существует остовное дерево (то есть, остовный подграф, являющийся деревом).*

Доказательство Леммы 4

1) • Индукция по количеству вершин в дереве. База для дерева с одной вершиной очевидна.

• Рассмотрим дерево T с $n \geq 2$ вершинами. По лемме 3 в графе, степени всех вершин которого не менее 2, есть цикл. Очевидно, у связного графа T на $n \geq 2$ вершинах не может быть вершин степени 0. Значит, у дерева T есть висячая вершина a.

• Понятно, что граф $T - a$ также связен и не имеет циклов, то есть, это дерево на $n - 1$ вершинах. По индукционному предположению мы имеем $e(T - a) = n - 2$, откуда очевидно следует, что $e(T) = n - 1$.

2) • Если в графе есть цикл, то можно удалить из этого цикла ребро. Граф, очевидно, останется связным.

• Продолжим такие действия до тех пор, пока циклы не исчезнут. В результате мы получим связный граф без циклов, являющийся остовным подграфом исходного графа, то есть, остовное дерево этого графа. $\square$

Следствие

1) *Дерево с более чем одной вершиной имеет не менее двух висячих вершин.*

2) *Для любого графа* G *выполнено* $e(G) \geq v(G) - c(G)$.

Доказательство.

1) Если в дереве T не более одной висячей вершины, то остальные имеют степень хотя бы 2 и сумма степеней вершин не менее, чем $2v(T) - 1$. Однако, она же равна $2e(T) = 2v(T) - 2$ по пункту 1 леммы 4, противоречие.

2) По лемме 4 каждая компонента графа G имеет остовное дерево, у которого рёбер ровно на одно меньше чем вершин. $\square$

Лемма 5

Граф G является деревом, если и только если для любых двух вершин существует единственный простой путь, соединяющий их.

Доказательство.

$\Leftarrow$. Предположим, что в графе G существует единственный простой путь между любыми двумя вершинами. Тогда граф связен. Если в графе есть цикл, то между любыми двумя вершинами цикла существуют как минимум два простых пути. Значит, G — дерево.

$\Rightarrow$. • Пусть G — дерево. Между любыми двумя его вершинами есть путь.

• Пусть существует два разных простых ab-пути P_1 и P_2. Отрежем общие начала этих путей: предположим, что они начинаются в вершине c и их первые рёбра не совпадают.

• Пойдем по пути P_1 до первого пересечения с P_2 в вершине d (понятно, что такая вершина есть, так как у путей общий конец b). Мы получили два простых cd-пути без общих внутренних вершин, которые образуют цикл, противоречие. $\square$

Нормальное дерево, или дерево поиска в глубину

Определение

Пусть G — связный граф, $a \in V(G)$. Остовное дерево T называется *нормальным* деревом с корнем a, если для любого ребра $xy \in E(G)$ либо x лежит на ay-пути дерева T, либо y лежит на ax-пути дерева T.

Теорема 1

Пусть G — связный граф, $a \in V(G)$. Тогда у графа G существует нормальное остовное дерево с корнем a.

Доказательство. • Индукция по $v(G)$. База для графов с 1 или 2 вершинами очевидна.

Переход. • Предположим, что для меньших чем G графов теорема уже доказана.

• Пусть $U_1, \dots, U_m$ — все компонеты связности графа $G - a$, $G_i = G(U_i)$.

• Для каждого $i \in [1..m]$ отметим вершину $a_i \in U_i \cap \mathrm{N}_G(a)$ и построим нормальное остовное дерево T_i графа G_i с корнем a_i.

• После этого соединим a с $a_1, \dots, a_m$ и получим остовное дерево T исходного графа.

• Пусть $xy \in E(G)$. Если обе вершины x и y отличны от a, то они лежат в одной из компонент связности U_i (так как рёбер между разными компонентами нет), а значит, свойство для ребра xy выполнено по индукционному предположению для T_i (если, скажем, x лежит на a_iy-пути по T_i, то x лежит и на ay-пути по T).

• Если же $x = a$, то доказываемое свойство для ребра xy очевидно. $\square$

Диаметр, радиус и центр

Определение

1) *Диаметром* $d(G)$ графа G называется наибольшее расстояние между его вершинами.

2) *Эксцентриситетом* вершины v называется величина $e(v) = \max_{u \in V(G)} \mathrm{dist}(u, v)$.

3) *Радиусом* $r(G)$ графа G называется наименьший из эксцентриситетов его вершин.

4) *Центром* графа называется вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа.

Лемма 6

$r(G) \le d(G) \le 2r(G)$.

Доказательство. • Неравенство $r(G) \le d(G)$ очевидно.

• Пусть ab-путь D — это диаметр графа, а c — центр. Тогда существуют ac-путь Q_a и bc-путь Q_b с $e(Q_a) = \mathrm{dist}(a, c) \le r$ и $e(Q_b) = \mathrm{dist}(c, b) \le r$.

• Так как D — кратчайший ab-путь, а aQ_acQ_bb — какой-то ab-путь, имеем $d = e(D) \le e(Q_a) + e(Q_b) = 2r$. $\square$

Подвешивание графа за вершину, или дерево поиска в ширину

• Далее неоднократно будет использоваться термин “подвесить (связный) граф за вершину”. Вот что будет под этим подразумеваться.

• Одна из вершин a связного графа G объявляется *корнем* и составляет множество вершин уровня 0 (назовем его L_0). Остальные вершины разбиваются на уровни так: в *уровень* L_k попадают все вершины, находящиеся на расстоянии k от корня a. Каждая вершина уровня k присоединяется к одной из смежных с ней вершин уровня $k-1$.

• В результате получается дерево, часто бывает удобно ориентировать его рёбра от меньшего уровня к большему. Таким образом, разбиение на уровни единственно, а само дерево — нет.

Подвешивание графа за вершину, или дерево поиска в ширину

• Количество уровней в построенном выше дереве равно $e(a)$ — эксцентриситету вершины a.
• Наименьшее количество уровней достигается в случае, когда a — центр графа G, и равно $r(G)$. .

Лемма 7

Рёбра графа G могут соединять либо вершины соседних уровней, либо одного и того же уровня.

Доказательство.

Пусть ребро $xy \in E(G)$ соединяет вершину $x \in L_k$ с $y \in L_m$ и $m > k$. Тогда
$m = \mathrm{dist}_G(a, y) \leq \mathrm{dist}_G(a, x) + 1 = k + 1$. $\square$

Двудольные графы

Определение

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на два множества, внутри которых нет рёбер (эти множества называются *долями*).

• Часто бывает удобно, говоря от двудольном графе, разбивать его вершины на две *доли* — множества попарно несмежных вершин, имеющих в правильной двуцветной раскраске один и тот же цвет. Таким образом, двудольный граф G представим в виде $(V_1(G), V_2(G), E(G))$, где рёбра соединяют вершины из разных долей. Такое представление двудольного графа может быть не единственным.

Теорема 2

Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не имеет циклов нечетной длины.

Доказательство теоремы 2

$\Rightarrow$. Очевидно, так как цикл нечетной длины невозможно правильным образом покрасить в два цвета.

$\Leftarrow$. Можно считать, что наш граф G связен, иначе докажем утверждение отдельно для каждой компоненты.

• Подвесим граф за любую вершину a, назовем полученное дерево T. Первую долю образуют вершины на нечетном расстоянии от a, а вторую — сама a и вершины на четном расстоянии от a.

• Предположим, что две смежные вершины x и y попали в одну долю. Рассмотрим простые пути P_x и P_y в дереве T от a до x и y. В дереве такие пути единственны и имеют одинаковую четность, то есть, в сумме дают четное число.

• Отрежем от P_x и P_y их общее начало (если такое есть) и получим xy-путь четной длины, который, очевидно, не содержит ребра xy. При добавлении этого ребра образуется нечетный цикл, противоречие. Таким образом, граф без нечетных циклов является двудольным. $\square$

Материалы курса можно найти вот здесь:

`logic.pdmi.ras.ru/~dvk/ITMO/DM/2021-22`