Теория графов. Глава 2. Пути и циклы.

Д. В. Карпов

2022

Эйлеров цикл

• В этом разделе в рассматриваемых графах возможны кратные рёбра.

Определение

1) *Эйлеров путь* в графе G — это путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.
2) *Эйлеров цикл* в графе G — это цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.
3) Граф G — *эйлеров*, если в нём есть эйлеров цикл.

• Разумеется, эйлеров путь и цикл в графе могут иметь самопересечения по вершинам.

Теорема 1

Связный граф G — эйлеров, если и только если степени всех вершин G четны.

Доказательство теоремы 1

$\Rightarrow$. Каждый раз, проходя через вершину v, эйлеров цикл проходит по двум ребрам, поэтому $d_G(v)$ четна.

$\Leftarrow$. Начнем путь в произвольной вершине a и будем идти, удаляя из графа пройденные ребра, пока это возможно.

• Так как все степени четны, наш путь обязательно закончится в вершине a. В результате получится цикл Z.

• Пусть $G_1, \dots, G_k$ — компоненты графа $G - E(Z)$. Степени всех вершин каждой из компонент четны. Поэтому, в каждом графе G_i есть эйлеров цикл Z_i.

• Поскольку граф G связен, то для каждого $i \in [1..k]$ существует вершина $u_i \in V(G_i)$, лежащая на цикле Z. Тогда по вершине u_i несложно состыковать циклы Z и Z_i в один.

• Проделав такую операцию последовательно для циклов $Z_1, \dots, Z_k$, мы получим искомый эйлеров цикл в графе G. $\square$

Эйлеров путь

Следствие

Связный граф G имеет эйлеров путь, если и только если в графе G нет вершин нечетной степени или таких вершин ровно две.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Пусть ЭП имеет концы a и b. Если $a = b$, то наш путь — ЭЦ, а значит, степени всех вершин четны. Если же $a \neq b$, то в графе ровно две вершины нечетной степени — концы пути a и b.

$\Leftarrow$. Количество вершин нечетной степени в графе четно. Если их нет, то в графе есть даже ЭЦ.

• Пусть в графе G ровно две вершины нечетной степени a и b. Добавим в граф ребро ab (если такое ребро есть, то добавим еще одно). Мы получили связный граф, в котором все вершины имеют четную степень и по теореме 2 есть ЭЦ C. Удалим из цикла C добавленное ребро ab и получим ЭП с концами a и b.

Гамильтонов путь и цикл

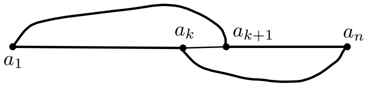
Определение

1) *Гамильтонов путь* в графе G — это простой путь, проходящий по каждой вершине графа.
2) *Гамильтонов цикл* в графе G — это простой цикл, проходящий по каждой вершине графа.
3) Граф называется *гамильтоновым*, если в нем есть гамильтонов цикл.

Лемма 1

Пусть $n > 2$, $a_1 \dots a_n$ — максимальный путь в графе G, причём $d_G(a_1) + d_G(a_n) \ge n$. Тогда в графе есть цикл длины n.

Доказательство Леммы 1



- Если вершины a_1 и a_n смежны, то $a_1a_2\dots a_n$ — искомый цикл.
- Пусть a_1 и a_n несмежны. Понятно, что $\mathrm{N}_G(a_1), \mathrm{N}_G(a_n) \subset \{a_2, \dots, a_{n-1}\}$.
- Пусть вершина a_n смежна с a_k, а вершина a_1 смежна с a_{k+1}. Тогда в графе есть цикл из n вершин: $a_1a_2\dots a_ka_na_{n-1}\dots a_{k+1}$ (см. рисунок).
- Пусть $\mathrm{N}_G(a_n) = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_\ell}\}$, тогда либо в графе есть цикл длины n, либо $a_{i_1+1}, \dots a_{i_\ell+1} \notin \mathrm{N}_G(a_1)$, следовательно, $d_G(a_1) \le n - 1 - d_G(a_n)$.
- Противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Критерий Оре

Теорема 2

(O. Ore, 1960.) 1) *Если для любых двух несмежных вершин* $u, v \in V(G)$ *выполняется* $d_G(u) + d_G(v) \geq v(G) - 1$, *то в графе* G *есть гамильтонов путь.*

2) *Если* $v(G) > 2$ *и для любых двух несмежных вершин* $u, v \in V(G)$ *выполняется* $d_G(u) + d_G(v) \geq v(G)$, *то в графе* G *есть гамильтонов цикл.*

Доказательство. 1) • Случай, когда в графе G ровно две вершины, очевиден. Далее пусть $v(G) > 2$.

• *Граф G связен.* (Пусть a и b — две несмежные вершины графа, тогда $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G) - 1$, откуда следует, что $\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(b) \neq \varnothing$, то есть, вершины a и b связаны.)

Доказательство критерия Оре

• Пусть $a_1 \dots a_n$ — наибольший простой путь графа G. Поскольку граф G связен и $v(G) > 2$, то $n \ge 3$. Предположим, что $n \le v(G) - 1$.

• В графе есть цикл на n вершинах: при $a_1 a_n \in E(G)$ это очевидно, а при $a_1 a_n \notin E(G)$ мы имеем $d_G(a_1) + d_G(a_n) \ge v(G) - 1 \ge n$ и цикл существует по лемме 1 в графе G есть цикл Z из n вершин.

• Так как граф связен, существует не вошедшая в этот цикл вершина, смежная хотя бы с одной из вершин цикла. Тогда и путь на $n+1$ вершине, противоречие. Таким образом, в графе есть ГП.

2) • Гамильтонов путь в графе уже есть по пункту 1. Пусть $n = v(G)$ и это путь $a_1 \dots a_n$.

• Если вершины a_1 и a_n смежны, то $a_1 \dots a_n$ — ГЦ. Если $a_1 a_n \notin E(G)$, то $d_G(a_1) + d_G(a_n) \ge v(G) = n$ и ГЦ есть по Лемме 1. □

Критерий Дирака

А теперь приведем прямое следствие теоремы Оре.

Следствие

(G. A. Dirac, 1952.) 1) *Если* $\delta(G) \geq \frac{v(G)-1}{2}$, *то в графе* G *есть гамильтонов путь.*

2) *Если* $\delta(G) \geq \frac{v(G)}{2}$, *то в графе* G *есть гамильтонов цикл.*

Замыкание графа: метод Хватала

Лемма 2

Пусть $ab \notin E(G)$, $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$. *Тогда граф* G *— гамильтонов, если и только если граф* $G + ab$ *— гамильтонов.*

Доказательство.

$\Rightarrow$. Очевидно.

$\Leftarrow$. • Пусть граф $G + ab$ — гамильтонов. Если ГЦ в графе $G + ab$ не проходит по ребру ab, то этот цикл есть и в графе G.

• Пусть ГЦ в графе $G + ab$ проходит по ребру ab. Тогда в графе G есть гамильтонов ab-путь. По лемме 1 в графе G существует ГЦ. $\square$

Замыкание графа: метод Хватала

Определение

Рассмотрим произвольный граф G. Если существуют две несмежные вершины $a, b \in V(G)$, для которых $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$, то добавим в граф ребро ab. Далее продолжим процесс с полученным графом, и так далее, до тех пор, пока это возможно. Полученный в результате граф назовем *замыканием* графа G и обозначим через $C(G)$.

• Непосредственно из леммы 2 следует достаточно интересный результат:

Следствие

(V. Chvatal, 1974.) *Граф G гамильтонов, если и только если его замыкание $C(G)$ — гамильтонов граф.*

• Найти гамильтонов цикл в замыкании обычно гораздо проще, чем в исходном графе.

Единственность замыкания

Лемма 3

Замыкание графа G определено однозначно (не зависит от порядка добавления рёбер).

Доказательство.

• Пусть в результате двух разных цепочек добавления рёбер были получены различные графы G_1 и G_2.
• Тогда есть ребра, добавленные при построении G_1, которых не добавили при построении G_2. Рассмотрим такое ребро ab, добавленное самым первым.
• Пусть G_0 — граф, к которому добавили ab. Тогда $d_{G_0}(a) + d_{G_0}(b) \geq v(G)$.
• Однако, все рёбра, которые добавили к G при построении G_0, добавлены и при построении G_2 (мы так выбрали ребро ab!). Поэтому, $d_{G_2}(a) + d_{G_2}(b) \geq v(G)$, а значит, процесс построения замыкания, давший нам G_2, не закончен: нужно добавить ребро ab. Противоречие. $\square$

Критерий Хватала

Теорема 3

(V. Chvatal, 1972) *Пусть* $d_1 \le d_2 \le \dots \le d_n$ *— последовательность степеней вершин графа* G*, а для каждого* $i \in [1..n-1]$ *выполняется неравенство* $d_i + d_{n-i} \ge n$*. Тогда граф* G *— гамильтонов.*

Доказательство.

- Докажем, что замыкание $C(G)$ — гамильтонов граф.
- Пусть $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, причем $d_G(v_i) = d_i$. При $i + j \ge n$

$$d_G(v_i) + d_G(v_j) = d_i + d_j \ge d_i + d_{n-i} \ge n,$$

следовательно, вершины v_i и v_j смежны в $C(G)$.

- Теперь легко построить ГЦ в $C(G)$.

При $n = 2m+1$ он будет иметь вид

$v_1 v_{2m} v_2 v_{2m-1} \dots v_m v_{m+1} v_{2m+1}$.

При $n = 2m$ цикл будет иметь вид

$v_1 v_{2m-1} v_2 v_{2m-2} \dots v_{m-1} v_{m+1} v_m v_{2m}$.

Гамильтонов цикл в кубе графа

Определение

Для графа G и натурального числа d обозначим через G^d граф на вершинах из $V(G)$, в котором вершины x и y смежны тогда и только тогда, когда $\mathrm{dist}_G(x, y) \le d$.

Теорема 4

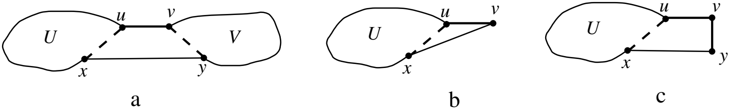
(G. Chartrand, S. F. Kapoor, 1969.) *Для любого связного графа G с $v(G) \ge 3$ и ребра $e \in E(G)$ в графе G^3 существует гамильтонов цикл, содержащий ребро e.*

Доказательство. • Достаточно доказать теорему для случая, когда G — дерево (иначе выделим остовное дерево, содержащее ребро e).

• Мы докажем утверждение индукцией по количеству вершин. *База* для дерева на трех или четырех вершинах очевидна (тогда G^3 — это полный граф).

Доказательство теоремы Чартранда-Капура: переход

- Пусть для меньших чем G всех деревьев теорема.
- Пусть $e = uv$, тогда в графе $G - uv$ две компоненты связности $U \ni u$ и $V \ni v$. Пусть $G_u = G(U)$ и $G_v = G(V)$. НУО $|U| \geq 3$. Тогда в G_u^3 есть ГЦ, содержащий инцидентное u ребро $ux \in E(G)$.
- Если $|V| \geq 3$, то аналогично мы построим ГЦ в графе G_v^3, содержащий инцидентное вершине v ребро $vy \in E(G)$ и соединим эти два цикла в один, заменив рёбра ux и vy на uv и xy, см. рисунок а (из $\mathrm{dist}_G(x, y) = 3$ следует $xy \in E(G^3)$).



Остаются очевидные случаи, когда $|V| < 3$. При $V = \{v\}$ мы заменим в ГЦ графа G_u^3 ребро ux на uv и vx (рис. b). При $V = \{v, y\}$, очевидно, $vy \in E(G)$ и мы заменим в ГЦ графа G_u^3 ребро ux на uv, vy и yx (рис. c).

Материалы курса можно найти вот здесь:

logic.pdmi.ras.ru/~dvk/ITMO/