Теория графов. Глава 9. Остовные деревья.

Д. В. Карпов

Определение

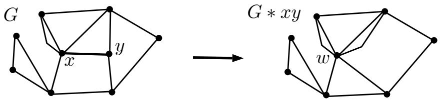
• Пусть G — граф, в котором допустимы петли и кратные рёбра, а $e = xy \in E(G)$, причем $x \neq y$.

• Положим $V(G * e) = (V(G) \setminus \{x, y\}) \cup \{w\}$.

• Отображение $\varphi : V(G) \to V(G * e)$ задано так, что $\varphi(x) = \varphi(y) = w$ и $\varphi(z) = z$ для остальных вершин z.

• Для любого ребра $f = ab \in E(G - e)$ в графе $G * e$ будет ребро $\varphi(f)$ с концами $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$, а других рёбер в определяемом графе нет.

• Будем говорить, что граф $G * e$ получен из G в результате *стягивания* ребра e и применять обозначение $w = x * y$.



• Отображение $\varphi : E(G - e) \to E(G * e)$, определенное выше — биекция. Далее мы будем отождествлять соответствующие друг другу при этой биекции рёбра.

Количество остовных деревьев

• Обозначим через $st(G)$ количество остовных деревьев связного графа G.

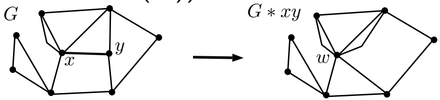
• Следующий результат иногда называют *формулой Кэли*.

Теорема 1

(A. Cayley, 1889.) *Пусть G — граф, в котором возможны петли и кратные рёбра, а ребро $e \in E(G)$ — не петля. Тогда $st(G) = st(G - e) + st(G * e)$.*

Доказательство. • Количество остовных деревьев графа G, не содержащих ребра e, очевидно, равно $st(G - e)$.

• Между остовными деревьями, содержащими ребро e и остовными деревьями графа $G * e$ существует взаимно однозначное соответствие $T \to T * e$ (где T — остовное дерево графа G, $e \in E(T)$). $\square$



- С помощью формулы Кэли можно вычислить количество остовных деревьев произвольного графа, однако этот процесс весьма небыстрый.
- Для ряда графов можно напрямую вычислить количество остовных деревьев. Наверное, наиболее известный результат в этом направлении — подсчёт количества остовных деревьев полного графа, который был получен Артуром Кэли также в 1889 году.
- Вместо первоначального доказательства со сложными рекуррентными соотношениями мы приведём ставшее даже более классическим доказательство Прюфера, опубликованное в 1918 году. Каждому дереву будет поставлен в соответствие так называемый *код Прюфера*.

Теорема 2

(A. Cayley, 1889.) $st(K_n) = n^{n-2}$.

Доказательство. **(H. Prüfer, 1918.)**

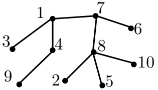
• Пусть $V(K_n) = [1..n]$. Мы построим взаимно однозначное соответствие между остовными деревьями K_n (то есть всеми деревьями на вершинах $[1..n]$.) и последовательностями длины $n-2$, в которых каждый член принимает натуральное значение от 1 до n.

• Количество таких последовательностей равно в точности n^{n-2}.

• Пусть T — дерево на вершинах $[1..n]$. Построим соответствующую ему последовательность $t_1, \dots, t_{n-2}$.

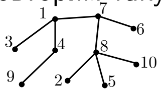
• Пусть ℓ_1 — висячая вершина наименьшего номера в дереве T, тогда t_1 — единственная смежная с ℓ_1 вершина дерева T, $T_1 = T - \ell_1$.

• Затем найдём в T_1 висячую вершину наименьшего номера ℓ_2, пусть t_2 — единственная смежная с ℓ_1 вершина дерева T_1, $T_2 = T_1 - \ell_2$, и так далее, будем повторять процесс, пока не получим последовательность длины $n-2$ (при этом, останется дерево T_{n-2} на двух вершинах).



8 1 8 7 4 1 7 8

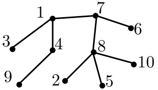
- Построим обратное соответствие. Пусть дана последовательность $t_1, \dots, t_{n-2}$ с элементами из $[1..n]$.
- Отметим, что по построению каждая вершина x встречается в последовательности дерева T ровно $d_T(x) - 1$ раз, поэтому вершины, которые в этой последовательности не встречаются, и есть висячие вершины дерева.
- Выберем такую вершину ℓ_1 с наименьшим номером и соединим её с t_1, после чего удалим ℓ_1 из списка номеров: $V_1 = V \setminus \{\ell_1\}$.
- Теперь выберем вершину $\ell_2 \in V_1$ с наименьшим номером, которая не встречается в последовательности $t_2, \dots, t_{n-2}$, соединим ℓ_2 с t_2 и положим $V_2 = V_1 \setminus \{\ell_2\}$. И так далее, повторим такую операцию $n-2$ раза.



8 1 8 7 4 1 7 8

Рис.: Дерево и его код Прюфера.

- В результате будет использована вся последовательность и проведено $n-2$ ребра, останется множество V_{n-2} из двух вершин и одно непроведённое ребро дерева T.
- Именно две вершины из V_{n-2} и нужно соединить ребром: их степени в имеющемся графе равны количеству вхождений этих вершин в последовательность $t_1, \dots, t_{n-2}$, то есть на 1 меньше, чем их степени в дереве T.



8 1 8 7 4 1 7 8

Рис.: Дерево и его код Прюфера.

Теорема о промежуточных значениях

• Мы докажем, что на самом деле все количества висячих вершин в остовных деревьях связного графа G от минимума до максимума достижимы.

• Будем обозначать количество висячих вершин дерева T через $u(T)$.

Теорема 3

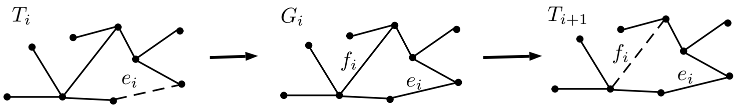
(S. Schuster, 1983.) *Пусть связный граф G имеет остовные деревья с m и n висячими вершинами, $m < n$. Тогда для любого натурального $k \in [m..n]$ существует остовное дерево графа G ровно с k висячими вершинами.*

Доказательство. • Пусть T_1 и T^* — остовные деревья с $u(T_1) = n$ и $u(T^*) = m$.

• Начиная с дерева T_1, будем выполнять следующий шаг. Пусть уже построена последовательность остовных деревьев $T_1, \dots, T_i$ графа G.

• Если $T_i \neq T^*$, то существует ребро $e_i \in E(T^*) \setminus E(T_i)$, пусть $G_i = T_i + e_i$.

• Если $T_i \neq T^*$, то существует ребро $e_i \in E(T^*) \setminus E(T_i)$, пусть $G_i = T_i + e_i$.

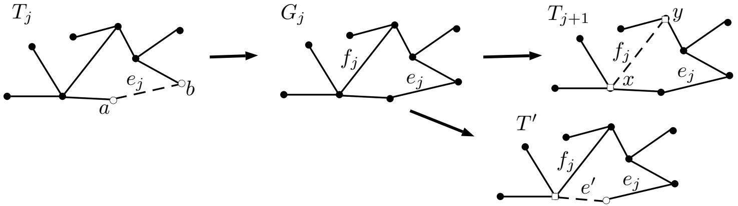


• В графе G_i есть ровно один простой цикл C_i, проходящий по ребру e_i. Понятно, что $E(C_i) \not\subset E(T^*)$, поэтому существует ребро $f_i \in E(C_i) \setminus E(T^*)$. Положим $T_{i+1} = G_i - f_i = T_i + e_i - f_i$.

• Поскольку в дереве T_{i+1} больше рёбер из $E(T^*)$, чем в T_i, в некоторый момент мы получим $T_\ell = T^*$. Рассмотрим последовательность деревьев $T_1, T_2, \dots, T_\ell = T^*$.

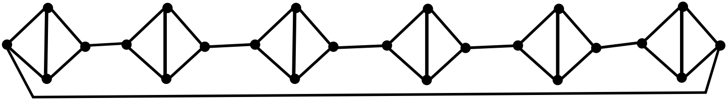
• Деревья T_i и T_{i+1} отличаются двумя рёбрами, поэтому, $|u(T_i) - u(T_{i+1})| \le 2$. Следовательно, количества висячих вершин деревьев нашей последовательности деревьев покрывают отрезок натурального ряда $[m..n]$ с пробелами не более чем в одно число.

- Пусть $t \in [m..n]$ и в нашей последовательности нет дерева с t вершинами.
- Тогда существует такое j, что $u(T_j) = t+1$ и $u(T_{j+1}) = t-1$. По построению, $T_{j+1} = G_j - f_j$ и $T_j = G_j - e_j$, пусть $f_j = ab$, $e_j = xy$.
- Тогда $d_{G_j}(a) = d_{G_j}(b) = 2$ (обе вершины a и b становятся висячими после удаления ребра e_j), $d_{G_j}(x) > 2$ и $d_{G_j}(y) > 2$ (вершины x и y не становятся висячими после удаления ребра f_j).
- Таким образом, в цикле C_j есть вершины степени 2 и есть вершины степени более 2, тогда одно из рёбер $e' = uw \in E(C_i)$ таково, что $d_{G_j}(u) > 2$ и $d_{G_j}(w) = 2$. Значит, в дереве $T' = G_i - e'$ ровно одна из вершин $V(C_i)$ — вершина w — становится висячей, то есть $u(T') = t$. □



Теорема 4

(D. J. Kleitman, D. B. West, 1991.) *В связном графе G с $\delta(G) \geq 3$ существует остовное дерево с не менее чем $\frac{v(G)}{4}$ листьями.*



• Изображенный пример показывает, что эта оценка почти точная.

Доказательство. • Мы приведем алгоритм построения остовного дерева с соответствующим количеством висячих вершин. Алгоритм будет выделять в графе G дерево, последовательно, по шагам добавляя к нему вершины.

• Пусть в некоторый момент уже построено дерево F — подграф графа G.

Определение

• Висячую вершину x дерева F назовем *мертвой*, если все вершины графа G, смежные с x, входят в дерево F.

• Количество мёртвых вершин дерева F мы обозначим через $b(F)$.

• Мертвые вершины останутся мертвыми висячими вершинами на всех последующих этапах построения. Для дерева F мы определим

$$\alpha(F) = \frac{3}{4}u(F) + \frac{1}{4}b(F) - \frac{1}{4}v(F).$$

Мы хотим построить такое остовное дерево T графа G, что $\alpha(T) \geq 0$.

• Так как в остовном дереве все висячие вершины — мертвые, то $u(T) = b(T) = \frac{1}{4}v(G) + \alpha(T)$ и дерево T нас устраивает.

Базовое дерево F' — это дерево, в котором произвольная вершина a соединена со всеми $k \geq 3$ вершинами из ее окрестности. Мы имеем $v(F') = k+1$, $u(F') = k$

$$\alpha(F') \geq \frac{3}{4} \cdot k - \frac{1}{4} \cdot (k+1) = \frac{2k-1}{4} > \frac{5}{4}.$$

Шаг алгоритма.

• Пусть после нескольких шагов построения мы получили дерево F (естественно $V(F) \subset V(G)$, $E(F) \subset E(G)$).

• Пусть в результате шага добавилось Δv вершин, количество висячих вершин увеличилось на Δu, а количество мертвых вершин — на Δb.

• Назовем доходом шага S величину $P(S) = \frac{3}{4}\Delta u + \frac{1}{4}\Delta b - \frac{1}{4}\Delta v$.

• Мы будем выполнять только шаги с неотрицательным доходом. При вычислении дохода шага мы будем полагать, что все добавленные вершины, про которые не сказано, что они мертвые, не являются мёртвыми. Это предположение лишь уменьшит доход шага.

• Понятно, что для итогового остовного дерева T число $\alpha(T)$ будет складываться из $\alpha(F')$ (где F' — базовое дерево, с которого мы начали построение) и суммы доходов всех шагов.

• Мы опишем несколько вариантов шага алгоритма. К очередному варианту мы будем переходить, только когда убедимся в невозможности всех предыдущих.

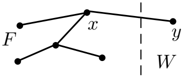
• Введём обозначение $W = V(G) \setminus V(F)$.

• Вот какие шаги мы будем выполнять.

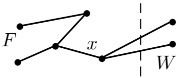
S1. *В дереве F есть невисячая вершина x, смежная с $y \in W$.*

Добавим в дерево вершину y, получим $\Delta v = \Delta u = 1$ и

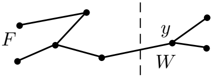
$$p(S1) \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$



S1



S2



S3

S2. *В дереве F есть вершина x, смежная хотя бы с двумя вершинами из W.*

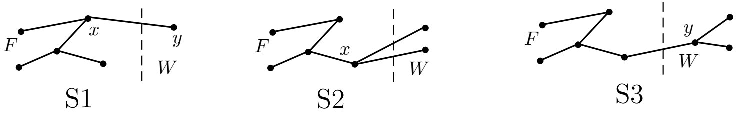
Добавим в дерево эти две вершины, получим $\Delta v = 2$, $\Delta u = 1$ и

$$p(S2) \geq \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

S3. *Существует вершина $y \in W$, смежная с деревом F и хотя бы с двумя вершинами из W.*

Добавим в дерево y и две смежные с ней вершины из W. Получим $\Delta v = 3$, $\Delta u = 1$ и

$$p(S3) \geq \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

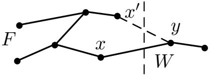


S4. *Существуют не вошедшие в дерево F вершины.*

• Тогда существует и смежная с деревом F вершина $y \in W$. Так как невозможно выполнить $S3$, то y смежна не более, чем с одной вершиной из W.

• Однако $d_G(y) \geq 3$, следовательно, вершина y смежна с двумя вершинами $x, x' \in V(F)$. Присоединим y к x. Так как невозможно выполнить шаги $S1$ и $S2$, вершина x' — висячая в дереве F и смежна ровно с одной вершиной из W — с вершиной y.

• Поэтому, в новом дереве вершина x' — мёртвая. Таким образом, $\Delta v = 1$, $\Delta b \geq 1$ и $P(S4) \geq 0$.



S4

• Ввиду конечности графа, построение закончится, и мы получим искомое остовное дерево графа G. $\square$

Матричная теорема о деревьях

• Для $x, y \in V(G)$ через $e_G(x, y)$ обозначается количество рёьер графа G между вершинами x и y.

Определение

Пусть G — граф на множестве вершин $[1..n]$. *Лапласиан* графа G — это квадратная матрица $L = (\ell_{i,j})_{i,j\in[1..n]}$, заданная следующим образом: $\ell_{i,i} = d_G(i)$, и $\ell_{i,j} = -e_G(i, j)$ при $i \neq j$.

• Из определения и отсутствия петель следует, что сумма элементов в любой строке и в любом столбце матрицы L равна 0.

• Таким образом, матрица L вырождена (сумма строк равна 0, значит, они ЛЗ). Следовательно, $\det(L) = 0$.

• Матрица L симметрична относительно главной диагонали.

Определение

Пусть $A \in M_n(K)$ — матрица с коэффициентами из поля K.
1) Через $A_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_m}$ будем обозначать матрицу, полученную из A удалением строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_m$.
2) Число $(-1)^{i+j}\det(A_{i;j})$ называется *алгебраическим дополнением* элемента $a_{i,j}$ матрицы A.

Теорема 5

(G. Kirhhoff, 1847.) *Пусть G — граф без петель (возможно, с кратными ребрами) на $n \geq 2$ вершинах, а L — его лапласиан. Тогда $st(G) = \det(L_{i;i})$ для любого $i \in [1..n]$.*

Доказательство. • При одновременной перестановке пары строк и пары столбцов с такими же номерами знак определителя не меняется. Поэтому нумерация вершин не имеет значения, что мы будем использовать.

• Докажем, что $st(G) = \det(L_{1;1})$.

• При $n = 1$ матрица $L_{1;1}$ — пустая. Мы будем считать, что $\det(L_{1;1}) = 1$ — именно столько остовных деревьев у графа на одной вершине.

• Если граф имеет более одной вершины и не имеет ребер, то его лапласиан — нулевая матрицы размера не менее чем 2×2, и алгебраическое дополнение любого ее элемента равно 0. Эти случаи будут базой индукции.

• Далее рассмотрим случай, когда G имеет ребро e. Будем считать, что для всех меньших графов утверждение теоремы доказано.

- Если $d_G(1) = 0$ (то есть, вершина 1 — изолированная), то $st(G) = 0$ ввиду несвязности графа.
- В этом случае в L первая строка и первый столбец состоят из 0.
- Поэтому, i строка $L_{1;1}$ получается из соответствующей строки L вычеркиванием 0.
- Следовательно, сумма элементов в каждой строке $L_{1,1}$ равна 0, откуда следует, что $\mathrm{rk}(L_{1;1}) < n - 1$, а значит, $\det(L_{1;1}) = 0$.
- Случай разобран, далее считаем, что $d_G(1) \geq 1$.
- Тогда НУО ребро e соединяет вершины 1 и 2.

- По Теореме 1 мы знаем, что $st(G) = st(G - e) + st(G * e)$.
- Пусть H — граф, полученный из $G * e$ удалением всех петель. Понятно, что $st(H) = st(G * e)$.
- Пусть L' и L^* — лапласианы графов $G - e$ и H соответственно. Тогда по индукцинному предпложению $st(G - e) = \det(L'_{1;1})$ и $st(H) = \det(L^*_{1;1})$.
- Остается доказать, что $\det(L_{1;1}) = \det(L'_{1;1}) + \det(L^*_{1;1})$.
- Как изменяется лапласиан графа при удалении ребра между вершинами 1 и 2?
- Из $\ell_{1,1}$ и $\ell_{2,2}$ вычитается по 1, а к $\ell_{1,2}$ и $\ell_{2,1}$ прибавляется по 1.
- При вычеркивании первого столбца и первой строчки получается, что $L'_{1,1}$ отличается от $L_{1,1}$ только элементом в левом верхнем углу — это $\ell_{2,2} - 1$ у $L'_{1,1}$ вместо $\ell_{2,2}$ у $L_{1,1}$.
- Пусть вершина графа H, полученная объединением 1 и 2 вершин графа G, имеет номер 1, а остальные вершины H занумеруем так же, как в графе G — числами 3,4, ..., n (пропустив индекс 2).
- Тогда все элементы матрицы L^* вне 1 строки и 1 столбца равны элементам L с соответствующим индексами.
- Значит, $L^*_{1;1} = L_{1,2;1,2}$.

• Разложим определитель $L_{1,1}$ по первой строке (она же вторая строка матрицы L с удаленным 1 элементом), используя обозначения элементов матрицы L (но учитывая, что вторая строка матрицы L — это первая строка $L_{1;1}$, а $j \geq 2$ столбец L — это $j-1$ столбец матрицы $L_{1;1}$):

$$\det(L_{1,1}) = \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+(j-1)} \ell_{2,j} \cdot \det(L_{1,2;1,j}) =$$

$$\det(L_{1,2;1,2}) + \left((\ell_{2,2}-1) \cdot \det(L_{1,2;1,2}) + \sum_{j=3}^{n} (-1)^{1+(j-1)} \ell_{2,j} \cdot \det(L_{1,2;1,j}) \right) =$$

$$\det(L^*_{1;1}) + \det(L'_{1;1}). \qquad \square$$

Следствие 1

Пусть L — лапласиан связного графа G без петель на $n \geq 2$ вершинах. Тогда $st(G) = (-1)^{i+j}\mathrm{det}(L_{i;j})$ для любых $i, j \in [1..n]$.

Доказательство. • Так как сумма элементов любой строки матрицы L равна 0, система уравнений

$$LX = 0 \qquad (*)$$

имеет ненулевое решение — столбец из n единиц.

• Следовательно, матрица L вырождена, а значит, $\mathrm{rk}(L) \leq n - 1$ и $\mathrm{det}(L) = 0$.
• По Теореме 5 мы знаем, что $\mathrm{det}(L_{i;i}) = st(G) \neq 0$ (так как граф G связен).

• Таким образом, матрица L имеет ненулевой минор порядка $n - 1$, а значит, $\mathrm{rk}(L) = n - 1$.

• Размерность пространства решений системы $(*)$ равна $n - \mathrm{rk}(L) = 1$.

• Значит, все решения пропорциональны вектору из n единиц, то есть все n координат любого решения $(*)$ равны.

• Введем обозначение для алгебраических дополнений элементов матрицы L: пусть $a_{i,j} := (-1)^{i+j}\mathrm{det}(L_{i;j})$.

• Напомним, что сумма произведений элементов строки матрицы на их алгебраические дополнения равна ее определителю, а сумма произведений элементов строки матрицы на алгебраические дополнения другой строки равна 0.

• Так как $\mathrm{det}(L) = 0$, мы имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \ell_{k,j}a_{k,j} = \mathrm{det}(L), \quad , \sum_{j=1}^{n} \ell_{s,j}a_{k,j} = 0 \text{ при } s \neq k.$$

• Таким образом, столбец из алгебраических дополнений любой строки $(a_{k,1}, \dots, a_{k,n})^T$ является решением системы $(*)$.

• Следовательно, алгебраические дополнения всех элементов одной строки равны и $(-1)^{i+k}\mathrm{det}(L_{k;i}) = a_{k,i} = a_{k,k} = \mathrm{det}(L_{k;k}) = st(G)$ по Теореме 5. $\square$