Серия 11.

1. В компании из 50 человек каждый имеет хотя-бы 25 знакомых. Докажите, что четверых из них можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый из них сидел между двумя своими знакомыми.

2. Докажите, что любой не сильно связный турнир не менее чем на 3 вершинах можно сделать сильно связным, изменив направление одной стрелки.

3. На фестиваль военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран. Каждый хор должен исполнить три песни, после чего сразу уехать домой (не выслушивая следующие песни). Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из участвующих стран. Докажите, что порядок выступлений можно назначить так, чтобы никто не выслушивал более трех оскорбительных для его страны песен

4. Связный граф G называется *кактусом*, если каждое ребро графа G принадлежит ровно одному простому циклу.

а) Докажите, что все блоки кактуса — простые циклы.

б) Докажите, что если в графе без мостов все циклы нечетны, то это — кактус.

5. Пусть G — связный плоский граф.

а) Грани G правильным образом раскрасшиваются в два цвета. Докажите, что G — эйлеров.

б) Граф G — эйлеров. Докажите, что грани G правильным образом раскрасшиваются в два цвета.

6. Между волейбольными командами двух стран был проведен матч-турнир, в котором каждая команда сыграла ровно по одному разу со всеми командами другой страны. При этом каждая команда выиграла хотя бы одну встречу. Докажите, что найдутся четыре команды A, B, C и D такие, что A выиграла у B, B выиграла у C, C выиграла у D, а D выиграла у A. (Ничьих в волейболе не бывает).

7. Пусть G — турнир на n^2+1 вершине. Его стрелки раскрашены в два цвета так, что нет одноцветных циклов. Докажите, что в G есть одноцветный простой путь длины n.